Ann. sc. math. Québec, **13** (1), 1989, 1–17.

ÉQUATIONS DE NAVIER–STOKES COUPLÉES À DES ÉQUATIONS DE LA CHALEUR: RÉSOLUTION PAR UNE MÉTHODE DE POINT FIXE EN DIMENSION INFINIE

MAURICE GAULTIER ET MIKEL LEZAUN

RÉSUMÉ. À l'aide d'un nouveau théorème de point fixe en dimension infinie, on démontre des résultats d'existence, d'unicité et de régularité pour un système d'équations aux dérivées partielles non-linéaires qui modélise le mouvement laminaire d'un fluide incompressible en régime stationnaire.

ABSTRACT. With a new fixed point theorem in infinite dimension we prove existence, uniqueness and regularity results for a system of nonlinear partial differential equations which represents the laminar motion of a stationary and incompressible fluid.

1. Introduction. Le présent article est consacré à l'étude du mouvement laminaire d'un fluide en régime stationnaire. Ce problème est modélisé par un système d'équations aux dérivées partielles non-linéaires couplant une équation de Navier–Stokes en dimension 2 et des équations du type équation de la chaleur. Plus précisément soit Ω un ouvert borné de R^2 de frontière Γ; il s'agit de trouver, $u = (u_1, u_2)$, une fonction scalaire p et $s = (s_1, \dots, s_N)$ vérifiant

$$(*)\begin{cases} \operatorname{div}(u) = 0 & \text{dans } \Omega \\ -\mu\Delta u + \sum_{i=1}^{2} u_i D_i u + \nabla p = g(s) & \text{dans } \Omega \\ -\nu\Delta s + \sum_{i=1}^{2} u_i D_i s = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

et des conditions aux limites de Dirichlet en u et mixtes en s.

La fonction g est déterminée à partir de l'hypothèse de Boussinesq.

Lorsque $N = 1$, le système $(*)$ est relatif à un transport de chaleur, le scalaire s est alors la température du fluide.

Lorsque $N \geq 2$, le système d'équations $(*)$ intervient dans l'étude de fluides non homogènes et en particulier dans des problèmes d'épuration. La première composante du vecteur s est la température du fluide, notée θ, et $s_2, \dots, s_N$ représentent les concentrations de constituants du fluide. La nature physique du problème impose des conditions aux limites de même nature pour chacune des composantes du vecteur s et par conséquent la résolution de ce problème n'est pas différente de celle du cas $N = 1$, seules les notations sont plus compliquées. Aussi pour des raisons de clarté de l'exposé, nous traitons le cas $N = 1$.

Nous prenons pour Ω un rectangle car ce domaine est très bien adapté aux conditions aux limites en température: sur deux cotés parallèles la température est maintenue à des valeurs constantes (paroi chaude et paroi froide) et les deux autres sont thermiquement isolés. D'autre part, un tel domaine nous a permis d'expliciter des constantes qui interviennent dans les résultats d'existence et d'unicité (et qui sont très utiles pour les essais numériques). Naturellement, nos résultats sont valables pour d'autres domaines assez réguliers du plan.

Nous avons choisi de présenter ici une méthode de point fixe en dimension infinie pour résoudre le problème posé. Cette méthode est techniquement moins compliquée

Reçu le 19 avril 1988 et, sous forme révisée, le 10 juillet 1988.

que la méthode variationnelle habituelle ([**2**],[**7**],[**14**]) qui utilise de manière essentielle un théorème de point fixe en dimension finie (variante du théorème de Brouwer). S'il y a un certain couplage supplémentaire dans les conditions aux limites (voir Remarque 4.2), le problème ($*$) n'a pas de formulation variationnelle dans le cadre fonctionnel habituel, *par contre notre méthode permet d'obtenir un résultat d'existence et d'unicité.*

Dans la deuxième partie de l'article, nous établissons un certain nombre d'inégalités dans le but de préciser quelques constantes qui seront utilisées dans la quatrième partie. Enfin, nous terminons par la démonstration d'une nouvelle inégalité d'interpolation concernant les éléments de $H^1(\Omega)$, nuls seulement sur une partie de la frontière de Ω.

La troisième partie de l'article est consacrée à la démonstration de deux théorèmes de points fixes dans des espaces de Banach.

Les principaux résultats font l'objet de la quatrième partie de l'article:

(a) nous démontrons l'existence d'au moins une solution si une condition peu restrictive, portant sur les données, a lieu. Cette condition sera discutée avant la démonstration du Lemme 4.1. L'utilisation de la méthode variationnelle standard conduit exactement à la même condition.

(b) la géométrie du domaine et des résultats d'interpolation nous permettent d'établir un résultat nouveau de régularité pour ce type de problème.

(c) une condition supplémentaire sur les données prouve l'unicité.

2. Résultats préliminaires. Soit Ω un ouvert borné de R^2, de frontière Γ. Nous supposons que Ω est localement d'un même côté de Γ et que Γ est une variété de dimension 1, au moins localement lipschitzienne. Nous serons amené à envisager les espaces suivants:

$$\mathcal{V} = \{\varphi \in (\mathcal{D}(\Omega))^2, \mathrm{div}(\varphi) = 0\}$$

V = adhérence de $\mathcal{V}$ dans $(H_0^1(\Omega))^2 = \{u \in (H_0^1(\Omega))^2,\ \mathrm{div}(u) = 0\}$.

Pour des raisons de commodité d'écriture, nous noterons $|\cdot|$ la norme dans $L^2(\Omega)$ ou dans $(L^2(\Omega))^2$.

Nous désignerons par D_i la dérivée partielle première par rapport à x_i.

Sur V nous plaçons la norme du gradient: $\|u\| = |\nabla u|$, puis nous désignons par $\| \ \|_*$, la norme duale et par $\langle\ ,\ \rangle$ le crochet dualité entre V^* et V.

LEMME 2.1. *Pour chaque* $(u, \varphi, \psi) \in V \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$, *on a:*

$$\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega u_i(x) D_i\varphi(x)\psi(x)\,dx = -\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega u_i(x) D_i\psi(x)\varphi(x)\,dx.$$

DÉMONSTRATION: Soit $(u, \varphi) \in \mathcal{V} \times H^1(\Omega)$, on a:

$$u_i D_i\varphi = D_i(u_i, \varphi) - (D_i u_i)\varphi$$

d'où:

$$\sum_{i=1}^{2} u_i D_i\varphi = \sum_{i=1}^{2} D_i(u_i\,\varphi) - \sum_{i=1}^{2} (D_i\,u_i)\varphi = \mathrm{div}(\varphi u).$$

Par conséquent:

$$\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega u_i(x) D_i\varphi(x)\varphi(x)\,dx = \int_\Omega \mathrm{div}(\varphi\,u)(x)\varphi(x)\,dx = -\int_\Omega \varphi(x) u(x)\cdot\nabla\varphi(x)\,dx,$$

donc

$$\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega u_i(x) D_i\varphi(x)\varphi(x)\,dx = -\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega u_i(x) D_i\varphi(x)\varphi(x)\,dx = 0.$$

Or l'application $(u, \varphi, \varphi) \to \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega u_i(x) D_i\varphi(x)\varphi(x)\,dx$ est continue sur $V \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ et comme d'autre part $\mathcal{V}$ est dense dans V, on en déduit que $\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega u_i(x) D_i\varphi(x)$ $\varphi(x)\,dx = 0$, $\forall (u, \varphi) \in V \times H^1(\Omega)$ ce qui implique

$$\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega u_i(x) D_i(\varphi + \psi)(x)(\varphi + \psi)(x)\,dx = 0, \ \forall (u, \varphi, \psi) \in V \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega).$$

Il suffit alors de développer les calculs, pour avoir le résultat souhaité. □

LEMME 2.2 (INÉGALITÉ DE FRIEDRICHS [**11**]). *Si l et L sont des dimensions d'un rectangle circonscrit à Ω, on a:*

$$|u| \le 1/\sqrt{2}\ \min(l, L)|\nabla u|, \ \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

DÉMONSTRATION: Pour $(x_1, x_2) \in \overline{\Omega}$, nous définissons: $\alpha_1(x_2) = \inf\{t, (t, x_2) \in \Omega\}$ et $\alpha_2(x_2) = \sup\{t, (t, x_2) \in \Omega\}$ et $\alpha_2(x_2) - \alpha_1(x_2) \le L$ (L est l'une des dimensions du rectangle circonscrit à Ω et dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées).

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \varphi(x_1, x_2) = \int_{\alpha_1(x_2)}^{x_1} D_1\varphi(\xi, x_2)\,d\xi$.

Par l'application de l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on en déduit successivement:

$$\varphi^2(x_1, x_2) \le [x_1 - \alpha_1(x_2)] \int_{\alpha_1(x_2)}^{x_1} (D_1\varphi(\xi, x_2))^2\,d\xi$$

$$\int_{\alpha_1(x_2)}^{\alpha_2(x_2)} \varphi^2(x_1, x_2)\,dx_1 \le 1/2[\alpha_2(x_2) - \alpha_1(x_2)]^2 \int_{\alpha_1(x_2)}^{\alpha_2(x_2)} (D_1\varphi(x_1, x_2))^2\,dx_1$$

$$\int_\Omega \varphi^2(x)\,dx \le (L^2/2) \int_\Omega (D_1\varphi(x))^2\ dx \le (L^2/2)|\nabla\varphi|^2.$$

De manière analogue:

$$\int_\Omega \varphi^2(x)\,dx \le (l^2/2)|\nabla\varphi|^2.$$

Par conséquent $|\varphi| \le 2^{-1/2} \min(l, L)|\nabla\varphi|$ et le résultat suit par densité. Nous définissons sur $(H_0^1(\Omega)^2 \times (H_0^1(\Omega))^2 \times (H_0^1(\Omega))^2$ la forme trilinéaire suivante:

$$b(u, v, w) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \int_\Omega u_i(x) D_i v_j(x) w_j(x)\,dx.$$

Cette forme est continue ([**9**],[**13**]), donc il existe une constante positive C, qui ne dépend que de Ω, telle que:

$$|b(u, v, w)| \le C\|u\|\,\|v\|\,\|w\|.$$

Notre but est de préciser une valeur de la constante C et nous avons dans ce sens le:

LEMME 2.3. *Pour chaque* $(u,v,w) \in (H_0^1(\Omega)^2 \times (H_0^1(\Omega))^2 \times (H_0^1(\Omega))^2$:

$$|b(u,v,w)| \leq \min(l,L)\|u\|\,\|v\|\,\|w\|.$$

DÉMONSTRATION:

$$|b(u,v,w)| \leq \sum_{j=1}^{2}\left[\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega |u_i(x)|\,|D_i v_j(x)|\,|w_j(x)|\,dx\right]$$

Pour le rectangle, l'inclusion algébrique et topologique $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ a lieu ([**11**]), on a donc:

$$|b(u,v,w)| \leq \sum_{j=1}^{2}\left[\sum_{i=1}^{2}\left(\|u_i\|_{L^4(\Omega)}|D_i v_j|\right)\right]\|w_j\|_{L^4(\Omega)}$$

Appliquons deux fois l'inégalité de Cauchy–Schwartz:

$$|b(u,v,w)| \leq \left(\sum_{i=1}^{2}\|u_i\|^2_{L^4(\Omega)}\right)^{1/2}\sum_{j=1}^{2}\left[\|w_j\|_{L^4(\Omega)}\left(\sum_{i=1}^{2}|D_i v_j|^2\right)^{1/2}\right]$$

$$|b(u,v,w)| \leq \left(\sum_{i=1}^{2}\|u_i\|^2_{L^4(\Omega)}\right)^{1/2}\|v\|\left(\sum_{j=1}^{2}\|w_j\|^2_{L^4(\Omega)}\right)^{1/2}.$$

Il est d'autre part bien connu que ([**4**], [**9**]): $\|u_i\|_{L^4(\Omega)} \leq 2^{1/4}|u_i|^{1/2}|\nabla u_i|^{1/2}$ et de même pour w_j. Ainsi:

$$|b(u,v,w)| \leq \sqrt{2}\,(|u|\;|\nabla u|\;|w|\;|\nabla w|)^{1/2}\|v\|.$$

Posons $k = \min(l,L)$ et utilisons le Lemme 2.2, il vient alors:

$$|b(u,v,w)| \leq \sqrt{2}\,(k/\sqrt{2}\;|\nabla u|^2\,k/\sqrt{2}\,|\nabla w|^2)^{1/2}\,\|v\| = k\|u\|\,\|v\|\,\|w\|.$$

On peut donc choisir pour la valeur de C le plus petit des deux nombres l et L. □

Puisque la forme trilinéaire b est continue sur $V \times V \times V$, pour chaque $u \in V$, il existe un élément unique $B(u)$ dans le dual V^* de V tel que $b(u,u,v) = \langle B(u), v\rangle$, $\forall v \in V$, et le Lemme 2.3 admet alors le

COROLLAIRE 2.1. *Pour chaque* $(u,v) \in V \times V$, *on a:*

$$\|B(u) - B(v)\|_* \leq \min(l,L)(\|u\| + \|v\|)\|u - v\|.$$

DÉMONSTRATION: Pour chaque $(u,v,w) \in V \times V \times V$, nous écrivons:

$$\langle B(u) - B(v), w\rangle = b(v, u-v, w) + b(u-v, u, w)$$

donc:

$$|\langle B(u) - B(v), w\rangle| \leq |b(v, u-v, w)| + |b(u-v, u, w)|$$

et par application du Lemme 2.3

$$|\langle B(u) - B(v), w\rangle| \leq \min(l,L)(\|v\|\,\|u-v\|\,\|w\| + \|u-v\|\,\|u\|\,\|w\|)$$

ainsi

$$\|B(u)-B(v)\|_* \leq \min(l,L)(\|u\|+\|v\|)\|u-v\|$$

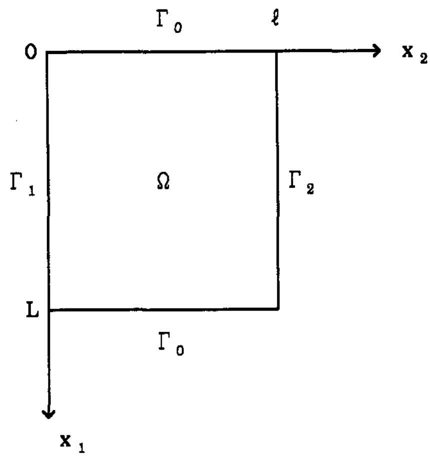
et a fortiori

$$\|B(u)-B(v)\|_* \leq \lambda \max(\|u\|,\|v\|)\|u-v\|$$

si nous avons posé $\lambda = 2\min(l,L) = 2k$. □

L'ouvert Ω est ici le rectangle suivant:

$$\Omega = \{(x_1,x_2)\in \mathbb{R}^2,\ 0<x_1<L,\ 0<x_2<l\}$$



Nous définissons: $Z(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega),\ v = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2\}$. Sur $Z(\Omega)$, nous plaçons la norme du gradient et nous la notons $\|\ \|_1$. Nous allons étendre aux éléments de $Z(\Omega)$ l'inégalité d'interpolation.

PROPOSITION 2.1. *Pour chaque $v \in Z(\Omega)$, l'inégalité suivante est vérifiée:*

$$\|v\|_{L^4(\Omega)} \leq 2H^{1/4}|v|^{1/2}|\nabla v|^{1/2}$$

où $H = \max\left(\frac{l}{2},1\right)$ *si* $L \geq \frac{\pi}{2}$ *et* $H = \frac{\pi}{2L}\max\left(\frac{l}{2},\sqrt{\frac{\pi^2+4L^2}{2\pi^2}}\right)$ *si* $L < \frac{\pi}{2}$.

DÉMONSTRATION: La famille de fonctions $\{\phi_{n,p} \mid (n,p) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*\}$ définies par $\phi_{n,p}(x) = \cos\left(\frac{\pi n x_1}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi p x_2}{l}\right)$ est totale dans $Z(\Omega)$ et orthogonale dans $L^2(\Omega)$ et dans $H^1(\Omega)$ ([8]). Il nous suffit donc de faire la démonstration lorsque v est combinaison linéaire finie de ces fonctions.

$$v(x) = \sum_{n,p} a_{n,p}\phi_{n,p}(x) = \sum_{n,p} a_{n,p}\cos\left(\frac{\pi n x_1}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi p x_2}{l}\right).$$

Soit Ω_- le symétrique de Ω par rapport à $0x_2$ et $\widetilde{\Omega} = \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid -L<x_1<L,\ 0<x_2<l\}$. Puis on définit $\tilde{v}$ sur $\widetilde{\Omega}$ par $\tilde{v}(x) = v(x)$ si $x\in\Omega$, $\tilde{v}(x) = \cos\left(\frac{\pi x_1}{2L}\right)v(-x_1,x_2)$ si $x\in\Omega_-$ et $v(0,x_2) = \sum_{n,p} a_{n,p}\sin\left(\frac{\pi p x_2}{l}\right)$.

Posons, pour simplifier les écritures, $m = \frac{\pi}{2L}$. On obtient facilement:

$$
\begin{aligned}
&|\tilde{v}|_{L^2(\Omega_-)} \leq |v|,\\
&|D_1\tilde{v}|^2_{L^2(\Omega_-)} \leq \max(1,m^2)(|v|^2+|D_1v|^2),\\
&|D_2\tilde{v}|_{L^2(\Omega_-)} \leq |D_2v|.
\end{aligned}
$$

D'autre part

$$\tilde{v}^2(x)=\tilde{v}^2(x_1,x_2)=2\int_{-L}^{x_1} v(t,x_2)D_1\tilde{v}(t,x_2)\,dt \leq 2\int_{-L}^{L}|\tilde{v}(x)||D_1\tilde{v}(x)|dx_1$$

et de même, puisque $\tilde{v}(x_1,0)=0$:

$$\tilde{v}^2(x)\leq 2\int_0^l |\tilde{v}(x)||D_2\tilde{v}(x)|dx_2.$$

Par conséquent

$$\tilde{v}^4(x)\leq 4\int_{-L}^{L}|\tilde{v}(x)||D_1\tilde{v}(x)|dx_1\int_0^l|\tilde{v}(x)||D_2\tilde{v}(x)|dx_2$$

Intégrons sur $\widetilde{\Omega}$ et appliquons l'inégalité de Cauchy–Schwartz:

$$\|\tilde{v}\|^4_{L^4(\Omega)}\leq 4|\tilde{v}|^2_{L^2(\widetilde{\Omega})}|D_1\tilde{v}|_{L^2(\widetilde{\Omega})}|D_2\tilde{v}|_{L^2(\widetilde{\Omega})}$$

Or:

$$|D_1\tilde{v}|_{L^2(\widetilde{\Omega})}\leq |D_1v|^2+\max(1,m^2)(|v|^2+|D_1v|^2) \text{ et } |D_2\tilde{v}|_{L^2(\widetilde{\Omega})}\leq\sqrt{2}|D_2v|$$

Reportons dans l'estimation de $\|\tilde{v}\|^4_{L^4(\widetilde{\Omega})}$:

$$\|\tilde{v}\|^4_{L^4(\widetilde{\Omega})}\leq 8\sqrt{2}|v|^2|D_2v|\left[|D_1v|^2+\max(1,m^2)(|v|^2+|D_1v|^2)\right]^{1/2}$$

Donc

$$\|\tilde{v}\|^4_{L^4(\widetilde{\Omega})}\leq 8\sqrt{2}|v|^2|D_2v|\left[\max(1,m^2)|v|^2+(1+\max(1,m^2))|D_1v|^2\right]^{1/2}.$$

Dans l'inégalité précédente, nous majorons $|D_2v|$ par $|\nabla v|$ et dans le crochet $|v|^2$ par $\frac{l^2}{2}|D_2v|^2$. On en déduit alors l'estimation

$$\|\tilde{v}\|^4_{L^4(\widetilde{\Omega})}\leq 8\sqrt{2}\left[\max[l^2/2\max(1,m^2),1+\max(1,m^2)]\right]^{1/2}|v|^2|\nabla v|^2$$

- Si $L\geq\frac{\pi}{2}$: $\|\tilde{v}\|^4_{L^4(\widetilde{\Omega})}\leq 16\max(l/2,1)|v|^2|\nabla v|^2$
- Si $L<\frac{\pi}{2}$: $\|\tilde{v}\|^4_{L^4(\widetilde{\Omega})}\leq 16m\max(l/2,\sqrt{(1+m^{-2})/2})|v|^2|\nabla v|^2$

Définissons la constante H par: $H = \max\left(\frac{l}{2}, 1\right)$ si $L \geq \frac{\pi}{2}$ et $H = m \max\left(\frac{l}{2}, \sqrt{\frac{1+m^{-2}}{2}}\right)$ avec $m = \frac{\pi}{2L}$ si $L < \frac{\pi}{2}$.

Alors

$$\|\tilde{v}\|^4_{L^4(\widetilde{\Omega})} \leq 2H^{1/4}|v|^{1/2}|\nabla v|^{1/2}$$

Finalement:

$$\|v\|_{L^4(\Omega)} \leq 2H^{1/4}|v|^{1/2}|\nabla v|^{1/2}, \ \forall v \in Z(\Omega). \quad \square$$

3. Théorème de points fixes. Soit X un espace de Banach réel réflexif dont le dual est noté X^* et Y un sous-espace dense de X. On désignera par $\| \ \|$ la norme dans X, par $\| \ \|_*$ la norme duale et par $\langle \ , \ \rangle$ le crochet de dualité entre X^* et X.

Soit A et F deux opérateurs de X dans X^*. Dans ce qui suit nous serons amenés à envisager certaines des hypothèses suivantes:

$(\mathcal{H}_1)$: A est linéaire borné et il existe une constante positive ν telle que $\langle Av, v\rangle \geq \nu\|v\|^2$, $\forall v \in X$.

$(\mathcal{H}_2)$: F, en général non linéaire, est borné et de plus

- (i) il existe $f \in X^*$ tel que $\langle Fv, v\rangle = \langle f, v\rangle$, $\forall v \in X$
- (ii) de chaque suite (u_n) de X, bornée, on peut extraire une sous-suite $\{u_{n_p}\}$ qui converge, dans la topologie faible de X, vers un élément u et telle que si $p \to +\infty$ $\langle Fu_{n_p}, v\rangle \to \langle Fu, v\rangle$, $\forall v \in Y$.

$(\mathcal{H}_3)$: Il existe deux constantes non négatives ρ et λ telles que

$$\|Fu - Fv\|_* \leq [\rho + \lambda \max(\|u\|, \|v\|)] \, \|u - v\|, \ \forall u \in X, \ \forall v \in X.$$

THÉORÈME 3.1. *Sous les hypothèses $(\mathcal{H}_1)$ et $(\mathcal{H}_2)$, l'équation $Au = Fu$ a au moins une solution.*

DÉMONSTRATION: On pose $P = A - F$

- P est un opérateur borné de X dans X^*
- $\langle Pv, v\rangle = \langle Av, v\rangle - \langle f, v\rangle \geq \nu\|v\|^2 - \|f\|_* \|v\|$ et donc $\lim_{\|v\| \to +\infty}(\langle Pv, v\rangle / \|v\|) = +\infty$

Soit $\{u_n\}$ une suite de X telle que $u_n \to \overline{u}$ dans X faible, $Pu_n \to \Lambda$ dans X^* faible et $\limsup_{n\to+\infty}\langle Pu_n, u_n\rangle \leq \langle \Lambda, \overline{u}\rangle$. Nous allons démontrer que $\Lambda = P\overline{u}$.

Il existe une sous-suite extraite de la suite $\{u_n\}$, notée $\{u_{n_p}\}$, qui vérifie la deuxième partie de l'hypothèse $(\mathcal{H}_2)$, avec $u = \overline{u}$.

Soit v un élément quelconque de Y. $\langle Pu_{n_p}, u_{n_p} - v\rangle = \langle Pu_{n_p}, u_{n_p}\rangle - \langle Pu_{n_p}, v\rangle$ et par passage à la limite supérieure: $\limsup_{p\to+\infty}\langle Pu_{n_p}, u_{n_p} - v\rangle \leq \langle \Lambda, \overline{u} - v\rangle$.

D'autre part:

$$\langle Pu_{n_p}, u_{n_p} - v\rangle = \langle Au_{n_p}, u_{n_p}\rangle - \langle Au_{n_p}, v\rangle - \langle Fu_{n_p}, u_{n_p}\rangle + \langle Fu_{n_p}, v\rangle$$

et par passage à limite inférieure:

$$\liminf_{p\to+\infty} < \langle Pu_{n_p}, u_{n_p} - v\rangle \geq \liminf_{p\to+\infty}\langle Au_{n_p}, u_{n_p}\rangle - \langle A\overline{u}, v\rangle - \langle f, \overline{u}\rangle + \langle F\overline{u}, v\rangle.$$

Or $\langle Au_{n_p}, u_{n_p}\rangle \geq \langle Au_{n_p}, \overline{u}\rangle + \langle A\overline{u}, u_{n_p} - \overline{u}\rangle$, ce qui implique $\liminf_{p\to+\infty}\langle Au_{n_p}, u_{n_p}\rangle \geq \langle A\overline{u}, \overline{u}\rangle$ et par conséquent :

$$\liminf_{p\to+\infty} < \langle Pu_{n_p}, u_{n_p} - v\rangle \geq \langle A\overline{u}, \overline{u}\rangle - \langle A\overline{u}, v\rangle - \langle f, \overline{u}\rangle + \langle F\overline{u}, v\rangle$$

$$\liminf_{p\to+\infty} < \langle Pu_{n_p}, u_{n_p} - v\rangle \geq \langle P\overline{u}, \overline{u} - v\rangle.$$

On a ainsi démontré que $\langle P\overline{u}, \overline{u} - v\rangle \leq \langle \Lambda, \overline{u} - v\rangle$, $\forall v \in Y$ et donc aussi $\forall v \in X$. Par conséquent $\Lambda = P\overline{u}$.

L'opérateur P est partout défini sur X, borné, coercif et de "type M" ([**9**]), il est donc surjectif, en particulier il existe au moins un élément $u \in X$ tel que $Au = Fu$ et de plus $\|u\| \leq \nu^{-1}\|f\|_*$. □

REMARQUE 3.1. A est un isomorphisme de X sur X^* et $\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X,X^*)} \leq \nu^{-1}$.

Le Théorème 3.1 prouve que l'opérateur $T = A^{-1}F$ a au moins un point fixe.

THÉORÈME 3.2. *Si les hypothèses* $(\mathcal{H}_1)$, $(\mathcal{H}_2)$, $(\mathcal{H}_3)$ *sont vérifiées et si de plus* $\nu > 1/2\left[\rho + (\rho^2 + 4\lambda\|f\|_*)^{1/2}\right]$, *l'équation* $Au = Fu$ *a une seule solution, non nulle si* $f \neq 0$.

DÉMONSTRATION: Les hypothèses $(\mathcal{H}_1)$ et $(\mathcal{H}_2)$ impliquent que l'opérateur $T = A^{-1}F$ a au moins un point fixe. Supposons qu'il existe deux points fixes u et v $(u \neq v)$; on a alors $Au = Fu$ et $Av = Fv$, ou encore $A(u - v) = Fu - Fv$, qui implique:

$$\|u - v\| \leq \nu^{-1}\|Fu - Fv\|_* \leq \nu^{-1}[\rho + \lambda \max(\|u\|, \|v\|)]\,\|u - v\|.$$

Or nous avons déjà remarqué que $\|u\| \leq \nu^{-1}\|f\|_*$ et aussi $\|v\| \leq \nu^{-1}\|f\|_*$ et donc $\|u - v\| \leq \nu^{-1}(\rho + \lambda\nu^{-1}\|f\|_*)\,\|u - v\|$ et puisque, par hypothèse, $u \neq v$, il en résulte que $\nu^2 - \rho\nu - \lambda\|f\|_* \leq 0$, soit $\nu \leq 1/2\left[\rho + (\rho^2 + 4\lambda\|f\|_*)^{1/2}\right]$. L'unicité est ainsi démontrée. □

Voici un autre résultat de point fixe. Soit X et Y deux espaces de Banach réels, A et F deux opérateurs de X dans Y et nous désignons, respectivement, par $R(A)$ et $R(F)$ les rangs de A et de F.

Nous faisons les hypothèses suivantes:

$(\mathcal{H}_4)$: A est linéaire, borné, injectif et il existe une constante positive ν telle que $\|A^{-1}f\|_X \leq \nu^{-1}\|f\|_Y$, $\forall f \in R(A)$.

$(\mathcal{H}_5)$: F est (en général) non linéaire, $R(F) \subset R(A)$ et il existe deux constantes non négatives ρ et λ telles que:

$$\|Fu - Fv\|_Y \leq [\rho + \lambda \max(\|u\|_X, \|v\|_X)]\,\|u - v\|_X,\ \forall u \in X,\ \forall v \in X.$$

On définit ensuite l'opérateur T de X dans lui-même par: $\forall u \in X$, $Tu = A^{-1}Fu$. On pose $\alpha = \|F0\|_Y$ puis, pour chaque $r > 0$:

$$\mathring{\mathrm{B}}(0,r) = \{u \in X, \|u\|_X < r\} \text{ et } \mathrm{B}(0,r) = \{u \in X, \|u\|_X \leq r\}.$$

THÉORÈME 3.3.

(1) *Si* $\lambda = 0$ *et si* $\nu > \rho$, T *a un point fixe unique de norme au plus égale à* $\alpha/(\nu - \rho)$.

(2) *Si* $\lambda \neq 0$, $\alpha = 0$ *et* $\nu > \rho$, T *n'a dans* $\mathring{B}(0, (\nu - \rho)/\lambda)$ *que le point fixe* 0.

(3) *Si* $\lambda \neq 0$, $\alpha \neq 0$ *et* $\nu \geq \rho + 2\sqrt{\lambda\alpha}$, *il existe une constante positive* R *telle que dans* $B(0,R)$, T *a un point fixe unique.*

Lorsque $\nu > \rho + 2\sqrt{\lambda\alpha}$, *il existe une constante* $R' > R$ *telle que dans* $B(0,R')\backslash B(0,R)$, *n'a pas de point fixe.*

DÉMONSTRATION: D'une manière générale, nous avons:

$$\begin{aligned}\|Tu - Tv\|_X &\leq \nu^{-1}\|Fu - Fv\|_Y \\ &\leq \nu^{-1}\left[\rho + \lambda \max(\|u\|_X, \|v\|_x)\right]\,\|u - v\|_X,\ \forall (u,v) \in X \times X \\ \|Tu\|_X &\leq \|Tu - T0\|_X + \|T0\|_X \leq \nu^{-1}(\lambda\|u\|_X^2 + \rho\|u\|_X + \alpha),\ \forall u \in X.\end{aligned}$$

(1) $\lambda = 0$ et $\nu > \rho$:

$$\|Tu - Tv\|_X \leq \nu^{-1}\rho\|u - v\|_X = L\|u - v\|_X, \ \forall u \in X, \ \forall v \in X$$

et avec $L = \nu^{-1}\rho < 1$, T est donc une contraction stricte de X

$$\|Tu\|_X \leq \nu^{-1}(\rho\|u\|_X + \alpha), \ \forall u \in X.$$

Posons $R = \alpha/(\nu - \rho)$ et soit $r \geq R$.

Si $\|u\|_X \leq r$, $\|Tu\|_X \leq \nu^{-1}(\rho r + \alpha) = \nu^{-1}[-(\nu - \rho)r + \alpha] + r$, donc $\|Tu\|_X \leq \nu^{-1}[-(\nu - \rho)\alpha/(\nu - \rho) + \alpha] + r = r$; ainsi $\|Tu\|_X \leq r$, quel que soit $\|u\|_X \leq r$.

Par conséquent dans toute boule $B(0, r)$, de rayon $\geq R$, T a un point fixe unique. Il en résulte que T a dans X un point fixe unique de norme au plus égale à $\alpha/(\nu - \rho)$.

(2) $\lambda \neq 0$, $\alpha = 0$ et $\nu > \rho$:

$$\|Tu - Tv\|_X \leq \nu^{-1}[\rho + \lambda \max(\|u\|_X, \|v\|_X)]\|u - v\|_X, \ \forall u \in X, \ \forall v \in X$$
$$\|Tu\|_X \leq \nu^{-1}(\lambda\|u\|_X + \rho)\|u\|_X = \nu^{-1}[\lambda\|u\|_X - (\nu - \rho)]\|u\|_X + \|u\|_X, \ \forall u \in X.$$

Soit $r < (\nu - \rho)/\lambda$:

- si $\|u\|_X \leq r$, $\|Tu\|_X \leq r$
- si $\|u\|_X \leq r$ et $\|v\|_X \leq r$, $\|Tu - Tv\|_X \leq \nu^{-1}(\rho + \lambda r)\|u - v\|_X$, $\|Tu - Tv\|_X \leq L\|u - v\|_X$, avec $L = \nu^{-1}(\rho + \lambda r) < 1$.

Ainsi dans toute boule $\mathrm{B}(0, r)$ où $r < (\nu - \rho)/\lambda$, T a un point fixe unique; par conséquent dans la boule $\mathring{\mathrm{B}}(0, (\nu - \rho)/\lambda)$, T n'a que le point fixe 0.

(3) $\lambda \neq 0$, $\alpha \neq 0$ et $\nu \geq \rho + 2\sqrt{\lambda\alpha}$:

Posons $\varphi(x) = \lambda x^2 - (\nu - \rho)x + \alpha$. Puisque $\nu \geq \rho + 2\sqrt{\lambda\alpha}$, $\varphi(x)$ a deux racines réelles (éventuellement confondues) qui sont: $R = 1/(2\lambda)\left[\nu - \rho - \sqrt{(\nu - \rho)^2 - 4\lambda\alpha}\right]$ et $R' = 1/(2\lambda)\left[\nu - \rho + \sqrt{(\nu - \rho)^2 - 4\lambda\alpha}\right]$ et si x vérifie $R \leq x \leq R'$, $\varphi(x) \leq 0$. Il en résulte que pour chaque r tel que $R \leq r \leq R'$ et $\|u\|_X \leq r$, on a:

$$\|Tu\|_X \leq \nu^{-1}(\lambda r^2 + \rho r + \alpha) = \nu^{-1}\varphi(r) + r \leq r.$$

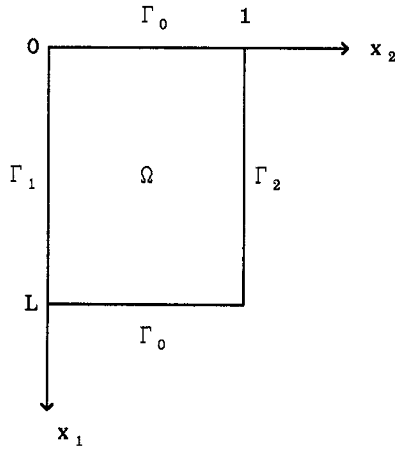
D'autre part, si $\|u\|_X \leq r$ et si $\|v\|_X \leq r$:

$$\|Tu - Tv\|_X \leq \nu^{-1}(\rho + \lambda r)\|u - v\|_X \leq \nu^{-1}(\rho + \lambda R')\|u - v\|_X = L\|u - v\|_X$$

où $L = \nu^{-1}(\rho + \lambda R') = \nu^{-1}\left[\rho + \left[\nu - \rho + \sqrt{(\nu - \rho)^2 - 4\lambda\alpha}\right]/2\right] < 1$. Ainsi dans toute boule $\mathrm{B}(0, r)$ où $R \leq r \leq R'$, T a un point fixe unique, donc dans la boule $B(0, R)$, T a un seul point fixe (qui n'est pas 0).

Lorsque $\nu > \rho + 2\sqrt{\lambda\alpha}$, $R < R'$ et donc $\mathrm{B}(0, R') \setminus \mathrm{B}(0, R)$ ne contient aucun point fixe de T. $\square$

4. Résultats d'existence, de régularité et d'unicité. L'ouvert Ω de frontière Γ est le rectangle figuré ci-dessous dont les dimensions sont 1 et L.



On cherche (u, p, θ) tel que (équations normalisées):

$$-\mu\Delta u + \sum_{i=1}^{2} u_i D_i u + \nabla p = -\gamma(\theta, 0) \text{ dans } \Omega \tag{4.1}$$

$$\operatorname{div}(u) = 0 \text{ dans } \Omega \tag{4.2}$$

$$-\nu\Delta\theta + \sum_{i=1}^{2} u_i D_i \theta = 0 \text{ dans } \Omega \tag{4.3}$$

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma \tag{4.4}$$

$$\theta = -1 \text{ sur } \Gamma_1, \quad \theta = 1 \text{ sur } \Gamma_2 \text{ et } \partial\theta/\partial x_1 = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \tag{4.5}$$

μ, ν et γ sont des constantes positives.

Si nous posons $r(x) \equiv 2x_2 - 1$, puis $\overline{\theta} = \theta - r$, nous sommes conduits à des conditions aux limites homogènes. Pour éviter des notations inutilement compliquées, nous écrivons dans ce qui suit θ au lieu de $\overline{\theta}$.

On cherche (u, p, θ) tel que :

$$-\mu\Delta u + \sum_{i=1}^{2} u_i D_i u + \nabla p = -\gamma(\theta + r, 0) \text{ dans } \Omega \tag{4.6}$$

$$\operatorname{div}(u) = 0 \text{ dans } \Omega \tag{4.2}$$

$$-\nu\Delta\theta + \sum_{i=1}^{2} u_i D_i \theta = -2u_2 \quad \text{dans } \Omega \tag{4.7}$$

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma \tag{4.4}$$

$$\theta = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \text{ et } \partial\theta/\partial x_1 = 0 \text{ sur } \Gamma_0. \tag{4.8}$$

Nous avons déjà introduit:

$$Z(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega),\ v = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2\}.$$

Posons:

$$X = V \times Z(\Omega),$$

muni de la topologie produit habituelle.

Définissons les formes bilinéaires et trilinéaires:

$$a(u,v) = \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega D_i u_j(x) D_i v_j(x)\, dx, \qquad \forall (u,v) \in V \times V$$

$$\hat{a}(\varphi,\psi) = \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega D_i \varphi(x) D_i \psi(x)\, dx, \qquad \forall (\varphi,\psi) \in Z(\Omega) \times Z(\Omega)$$

$$b(u,v,w) = \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega u_i(x) D_i v_j(x) w_j(x)\, dx, \; \forall (u,v,w) \in V \times V \times V$$

$$d(u,\varphi,\psi) = \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega u_i(x) D_i \varphi(x) \psi(x)\, dx, \qquad \forall (u,\varphi,\psi) \in X \times Z(\Omega).$$

Définissons les opérateurs A et F. Soit $(u,\theta) \in X$ et désignons dans ce qui suit par $\langle \; , \; \rangle$ aussi bien le crochet de dualité entre V^* et V qu'entre $Z(\Omega)^*$ et $Z(\Omega)$

(1) $A = (A_1, A_2)$ où :

$$\langle A_1(u,\theta), v\rangle = \mu a(u,v) + \gamma(\theta, v_1), \; \forall v = (v_1,v_2) \in V$$
$$\langle A_2(u,\theta), \varphi\rangle = \nu \hat{a}(\theta,\varphi) + 2(u_2,\varphi), \; \forall \varphi \in Z(\Omega)$$

($(\; , \;)$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$). A est donc un opérateur linéaire borné de X dans X^*.

(2) $F = (F_1, F_2)$ où:

$$\langle F_1(u,\theta), v\rangle = -b(u,u,v) - \gamma(r, v_1), \; \forall v = (v_1,v_2) \in V$$
$$\langle F_2(u,\theta), \varphi\rangle = -d(u,\theta,\varphi), \qquad \forall \varphi \in Z(\Omega).$$

Dans tout ce qui suit, nous supposons réalisé la condition suivante:

$$\exists \epsilon > 0 \text{ tel que } \mu - \epsilon k(\gamma+2)/4 > 0 \text{ et } \nu - k(\gamma+2)/(4\epsilon) > 0$$

où $k = \min(1, L)$. Puis nous posons:

$$\delta = \min\left[\mu - k\epsilon(\gamma+2)/4, \nu - k(\gamma+2)/(4\epsilon)\right].$$

Il s'agit de la condition dont il a été question dans l'introduction; elle est physiquement peu restrictive car pour une "forte" viscosité, elle exige seulement une "faible" diffusion et inversement. Cette même condition apparaît lorsque l'on utilise la méthode variationnelle standard

Notre méthode de point fixe appliquée à la seule équation de Navier–Stokes redonne très rapidement les résultats classiques et naturellement n'exige aucune condition pour l'existence d'au moins une solution. On trouvera les détails de cette étude dans [**5**], où, pour le cas non homogène, on utilise des résultats de [**1**] et de [**3**].

Voici quelques propriétés des opérateurs A et F:

LEMME 4.1. *A est un isomorphisme de X dans X^*, plus précisément:*

$$\langle A(\Lambda), \Lambda\rangle \geq \delta\|\Lambda\|_X^2, \ \forall \Lambda \in X.$$

DÉMONSTRATION: Dans la partie réservée aux résultats préliminaires, nous avons défini les normes sur $Z(\Omega)$, V et V^*, notées respectivement $\| \ \|_1$, $\| \ \|$ et $\| \ \|_*$.

Soit $\Lambda = (u, \theta)$ un élément quelconque de X

$$\langle A(\Lambda), \Lambda\rangle = \mu\|u\|^2 + \gamma(\theta, u_1) + \nu\|\theta\|^2 + 2(u_2, \theta)$$
$$\langle A(\Lambda), \Lambda\rangle \geq \mu\|u\|^2 + \nu\|\theta\|_1^2 - \gamma|\theta|\,|u_i| - 2|\theta|\,|u_2|.$$

Utilisons le Lemme 2.2 avec $l = 1$, ainsi que l'inégalité $|v| \leq 1/\sqrt{2}\|v\|_1$, $\forall v \in Z(\Omega)$, obtenue dans la démonstration de ce Lemme:

$$\langle A(\Lambda), \Lambda\rangle \geq \mu\|u\|^2 + \nu\|\theta\|_1^2 - (\gamma/2 + 1)k\|\theta\|_1\|u\|$$
$$\langle A(\Lambda), \Lambda\rangle \geq [\mu - k\epsilon(\gamma + 2)/4]\|u\|^2 + [\nu - k(\gamma + 2)/(4\epsilon)]\|\theta\|_1^2.$$

Compte tenu de la définition de la constante δ:

$$\langle A(\Lambda), \Lambda\rangle \geq \delta\|\Lambda\|_X^2, \ \forall \Lambda \in X.$$

L'opérateur A vérifie donc l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$. □

LEMME 4.2. *Il existe $f \in X^*$ tel que $\langle F(\Lambda), \Lambda\rangle = \langle f, \Lambda\rangle$, $\forall \Lambda \in X$.*

DÉMONSTRATION: Soit $\Lambda = (u, \theta) \in X$, alors:

$$\langle F(\Lambda), \Lambda\rangle = \langle F_1(u, \theta), u\rangle + \langle F_2(u, \theta), \theta\rangle$$

que nous écrivons:

$$\langle F(\Lambda), \Lambda\rangle = \langle -\gamma(r, 0), u\rangle + \langle 0, \theta\rangle.$$

Il suffit de choisir $f = (-\gamma(r, 0), 0)$, pour avoir $\langle F(\Lambda), \Lambda\rangle = \langle f, \Lambda\rangle$, $\forall \Lambda \in X$. L'opérateur F vérifie ainsi la première partie de l'hypothèse $(\mathcal{H}_2)$. □

LEMME 4.3. *De chaque suite $\{u_n, \theta_n\}$ de X, bornée, on peut extraire une sous-suite $\{u_{n_p}, \theta_{n_p}\}$ telle que si $p \to +\infty$: $u_{n_p} \to u$ dans V faible, $\theta_{n_p} \to \theta$ dans $Z(\Omega)$ faible et $\lim_{p\to+\infty}\langle F(u_{n_p}, \theta_{n_p}), (v, \varphi)\rangle = \langle F(u, \theta), (v, \varphi)\rangle$, quel que soit $(v, \varphi) \in X$.*

DÉMONSTRATION: Soit $\{u_n, \theta_n\}$ une suite de X, bornée. Puisque $Z(\Omega)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $H^1(\Omega)$, il est réflexif. D'autre part, l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^4(\Omega)$ est compacte et donc de la suite $\{u_n, \theta_n\}$, on peut extraire une sous-suite $\{u_{n_p}, \theta_{n_p}\}$ telle que si $p \to +\infty$, $u_{n_p} \to u$ dans V faible et dans $(L^4(\Omega))^2$ fort et $\theta_{n_p} \to \theta$ dans $Z(\Omega)$ faible et dans $L^4(\Omega)$ fort.

D'autre part, pour chaque $(v, \varphi) \in X$, on a:

$$\langle F(u_{n_p}, \theta_{n_p}), (v, \varphi)\rangle = -b(u_{n_p}, u_{n_p}, v) - \gamma(r, v_1) - d(u_{n_p}, \theta_{n_p}, \varphi)$$

(a) $|b(u_{n_p}, u_{n_p}, v) - b(u, u, v)| = |b(u_{n_p}, v, u_{n_p}) - b(u, v, u)|$

$$|b(u_{n_p}, u_{n_p}, v) - b(u, u, v)| = |b(u_{n_p} - u, v, u_{n_p}) - b(u, v, u_{n_p} - u)|$$
$$|b(u_{n_p}, u_{n_p}, v) - b(u, u, v)| \leq \|u_{n_p} - u\|_{(L^4(\Omega))^2}\|v\|\,\|u_{n_p}\|_{(L^4(\Omega))^2} + \|u\|_{(L^4(\Omega))^2}\|v\|\,\|u_{n_p} - u\|_{(L^4(\Omega))^2}$$
$$|b(u_{n_p}, u_{n_p}, v) - b(u, u, v)| \leq C\|v\|\,\|u_{n_p} - u\|_{(L^4(\Omega))^2}$$

où C est une constante positive.

Il en résulte que $\lim_{p\to+\infty} b(u_{n_p}, u_{n_p}, v) = b(u,u,v)$.

(b) de manière analogue:

$$\begin{aligned}|d(u_{n_p}, \theta_{n_p}, \varphi) - d(u,\theta,\varphi)| &\le \|u_{n_p} - u\|_{(L^4(\Omega))^2}\|\varphi\|_1\|\theta_{n_p}\|_{L^4(\Omega)} \\ &+ \|u\|_{(L^4(\Omega))^2}\|\varphi\|_1\|\theta_{n_p} - \theta\|_{L^4(\Omega)} \\ |d(u_{n_p}, \theta_{n_p}, \varphi) - d(u,\theta,\varphi)| &\le C'\|\varphi\|_1\left[\|u_{n_p} - u\|_{(L^4(\Omega))^2} + \|\theta_{n_p} - \theta\|_{L^4(\Omega)}\right]\end{aligned}$$

où C' est une constante positive. On a ainsi:

$$\lim_{p\to+\infty} d(u_{n_p}, \theta_{n_p}, \varphi) = d(u,\theta,\varphi)$$

(c) on déduit de ce qui précède que:

$$\lim_{p\to+\infty}\langle F(u_{n_p}, \theta_{n_p}), (v,\varphi)\rangle = \langle F(u,\theta),(v,\varphi)\rangle,\ \forall (v,\varphi)\in X.$$

La deuxième partie de l'hypothèse $(\mathcal{H}_2)$ est donc vérifiée avec $Y = X$. □

Les Lemmes précédents 4.1, 4.2 et 4.3 nous permettent de prouver le résultat suivant d'existence et de régularité:

THÉORÈME 4.1. *Les équations (4.1)–(4.5), ont au moins une solution*

$$(u,p,\theta) \in (H^2(\Omega))^2 \times H^1(\Omega) \times (Z(\Omega)\cap H^2(\Omega)).$$

DÉMONSTRATION: Si $(u,p,\theta) \in V \times L^2(\Omega)/\mathbb{R} \times Z(\Omega)$ est solution de (4.2), (4.6), (4.7), alors $A(u,\theta) = F(u,\theta)$.

Inversement, les lemmes 4.1, 4.2 et 4.3 nous permettent d'appliquer le théorème 3.1: il existe alors au moins un élément $(u,\theta)\in V\times Z(\Omega)$ tel que $A(u,\theta) = F(u,\theta)$. De plus un théorème de De Rham ([**12**]) prouve l'existence d'un élément unique $p \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ tel que (u,p,θ) vérifie (4.2), (4.6), (4.7).

Les conditions aux limites $\partial\theta/\partial x_1 = 0$ sur Γ_0 sont une conséquence d'une propriété de régularité de u que nous allons démontrer.

Reprenons (4.6):

$$-\mu\Delta u + \sum_{i=1}^{2} u_i D_i u + \nabla p = h \text{ dans } \Omega$$

où nous avons posé $h = -\gamma(\theta + r, 0) \in (L^2(\Omega))^2$. Pour chaque $i = 1,2, u_i \in H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^8(\Omega)$, par conséquent $u_i D_i u_j \in L^{8/5}(\Omega)$, ainsi $-\mu\Delta u + \nabla p = h - \sum_{i=1}^2 u_i D_i u \in (L^{8/5}(\Omega))^2$.

D'après les théorèmes de plongement de Sobolev: $H^{1/3}(\Omega) \hookrightarrow L^3(\Omega) \hookrightarrow L^{8/3}(\Omega)$ et par dualité $L^{8/5}(\Omega) \hookrightarrow H^{-1/3}(\Omega)$, car $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H^{1/3}(\Omega)$. Il s'en suit que $-\mu\Delta u + \nabla p \in (H^{-1/3}(\Omega))^2$. D'autre part $[H_0^1(\Omega), L^2(\Omega)]_{2/3} = H^{1/3}(\Omega)$, et par dualité:

$$[L^2(\Omega), H^{-1}(\Omega)]_{1/3} = H^{-1/3}(\Omega).$$

De plus:

$$[H^2(\Omega), H^1(\Omega)]_{1/3} = H^{5/3}(\Omega).$$

Considérons le problème:

$$(**)\begin{cases} -\mu\Delta v + \nabla p = F & \text{dans } \Omega \ (F \text{ est donnée}) \\ \operatorname{div}(v) = 0 & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Les résultats suivants sont bien connus ([**6**],[**9**],[**13**]): si $F \in (H^{-1}(\Omega))^2$, $(**)$ a une solution unique $(v,p) \in V \times L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ et de plus $\|v\| \le C_1\|F\|_*$ (C_1 est une constante positive). Si $F \in (L^2(\Omega))^2$, $(**)$ a une solution unique $(v,p) \in (H^2(\Omega))^2 \times H^1(\Omega)$, p est défini à une constante près et de plus $\|v\|_{(H^2(\Omega))^2} \le C_2|F|$, ($C_2$ est une constante positive).

Par conséquent, l'application $F \to v$, qui à chaque F associe l'élément v tel que (v,p) soit solution du problème $(**)$, est une application linéaire continue de $(H^{-1}(\Omega))^2$ dans $(H^1(\Omega))^2$ et de $L^2(\Omega))^2$ dans $(H^2(\Omega))^2$. Il en résulte donc ([**10**]) que c'est une application linéaire continue de $(H^{-1/3}(\Omega))^2$ dans $(H^{5/3}(\Omega))^2$. Or $H^{5/3}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, donc $-\mu\Delta u + \nabla p = h - \sum_{i=1}^2 u_i D_i u \in (L^2(\Omega))^2$ et ceci prouve que $u \in (H^2(\Omega))^2$ et $p \in H^1(\Omega)$ ([**6**]). Puisque $u \in (H^2(\Omega))^2$, $\Delta\theta$ est un élément de $L^2(\Omega)$. On en déduit alors que $\theta \in H^2(\Omega)$ (cf [**8**], Théorème 4.5) et, grâce à la formule de Green, que $\partial\theta/\partial x_1 = 0$ sur Γ_0, au sens de $H^{1/2}(\Gamma_0)$. □

Nous terminons par un résultat d'unicité qui sera une conséquence du:

LEMME 4.4. *Si (u_1,θ_1) et (u_2,θ_2) sont deux éléments quelconques de X, on a:*

$$\begin{aligned}\|F(u_1,\theta_1) - F(u_2,\theta_2)\|_* \le 2\sqrt{2}\,\sqrt{kh}\max(\|(u_1,\theta_1)\|_X, \|(u_2,\theta_2)\|_X) \\ \times \|(u_1,\theta_1) - (u_2,\theta_2)\|_X\end{aligned}$$

où $k = \min(1,L)$ et $h = 2^{3/2}\cdot H^{1/2}$.

DÉMONSTRATION: Soit $(u_i,\theta_i) \in X$, $i = 1,2$. Pour chaque $(v,\varphi) \in X$, on a:

$$\begin{aligned}\langle F(u_1,\theta_1) - F(u_2,\theta_2), (v,\varphi)\rangle = &- b(u_1,u_1,v) + b(u_2,u_2,v) \\ &- d(u_1,\theta_1,\varphi) + d(u_2,\theta_2,\varphi).\end{aligned}$$

(1)

$$\begin{aligned}&|b(u_2,u_2,v) - b(u_1,u_1,v)| = |b(u_2-u_1,v,u_2) + b(u_1,v,u_2-u_1)| \\ &|b(u_2,u_2,v) - b(u_1,u_1,v)| \le \|u_2-u_1\|_{(L^4(\Omega))^2}\|v\|\,\left[\|u_1\|_{(L^4(\Omega))^2} + \|u_2\|_{(L^4(\Omega))^2}\right]\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}|d(u_2,\theta_2,\varphi) - d(u_1,\theta_1,\varphi)| &= |d(u_2-u_1,\theta_2,\varphi) + d(u_1,\theta_2-\theta_1,\varphi)| \\ |d(u_2,\theta_2,\varphi) - d(u_1,\theta_1,\varphi)| &\le \|u_2-u_1\|_{(L^4(\Omega))^2}\|\theta_2\|_1\,\|\varphi\|_{L^4(\Omega)} \\ &\quad + \|u_1\|_{(L^4(\Omega))^2}\|\theta_1-\theta_2\|_1\|\varphi\|_{L^4(\Omega)}.\end{aligned}$$

On a donc:

$$\begin{aligned}|\langle F(u_1,\theta_1) - F(u_2,\theta_2), (v,\varphi)\rangle| \le &\|u_2-u_1\|_{(L^4(\Omega)^2}\|v\|\,\left[\|u_1\|_{(L^4(\Omega))^2} + \|u_2\|_{(L^4(\Omega))^2}\right] \\ &+ \|u_2-u_1\|_{L^4(\Omega))^2}\|\theta_2\|_1\,\|\varphi\|_{L^4(\Omega)} \\ &+ \|\theta_2-\theta_1\|_1\,\|u_1\|_{(L^4(\Omega))^2}\|\varphi\|_{L^4(\Omega)}\end{aligned}$$

Utilisons l'inégalité d'interpolation ([4]) ainsi que le Lemme 2.2 (on a posé $k = \min(1, L)$:

$$\|v\|_{L^4(\Omega)} \leq 2^{1/4}|v|^{1/2}|\nabla v|^{1/2} \leq \sqrt{k}\|v\|, \ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Il en résulte que

$$|\langle F(u_1, \theta_1) - F(u_2, \theta_2), (v, \theta)\rangle| \leq \|u_2 - u_1\| \left[k\|v\|(\|u_1\| + \|u_2\|) + \sqrt{k}\|\theta_2\|_1\|\varphi\|_{L^4(\Omega)}\right] + \|\theta_2 - \theta_1\|_1\sqrt{k}\,\|u_1\|\,\|\varphi\|_{L^4(\Omega)}$$

D'autre part: $\|\varphi\|_{L^4(\Omega)} \leq 2H^{1/4}|\varphi|^{1/2}|\nabla\varphi|^{1/2}$ (Proposition 2.1). $|\varphi| \leq 1/\sqrt{2}|\nabla\varphi|$ (voir démonstration du Lemme 2.2). Il s'en suit que $\|\varphi\|_{L^4(\Omega)} \leq 2^{3/4}H^{1/4}|\nabla\varphi|$. Si nous posons $h = 2^{3/2}H^{1/2}$, alors $\|\varphi\|_{L^4(\Omega)} \leq \sqrt{h}|\nabla\varphi|$.

Notons que $k \leq \sqrt{kh}$, donc:

$$|\langle F(u_1, \theta_1) - F(u_2, \theta_2), (v, \varphi)\rangle| \leq \sqrt{kh}\left[[(\|u_1\| + \|u_2\|)\,\|v\| + \|\theta_2\|_1\|\varphi\|_1]\,\|u_2 - u_1\| + \|u_1\|\,\|\varphi\|_1\|\theta_2 - \theta_1\|_1\right]$$

Nous utilisons les inégalités suivantes:

$$\max(\|v\|, \|\varphi\|_1) \leq \|(v, \varphi)\|_X \text{ et } \|v\| + \|\varphi\|_1 \leq \sqrt{2}\,\|(v, \varphi)\|_X.$$

Nous avons alors

$$|\langle F(u_1, \theta_1) - F(u_2, \theta_2), (v, \varphi)\rangle| \leq \sqrt{kh}\left[[\|u_1\| + \|u_2\| + \|\theta_2\|_1]\|u_2 - u_1\| + \|u_1\|\,\|\theta_2 - \theta_1\|_1\right]\|(v, \varphi)\|_X, \ \forall(v, \varphi) \in X.$$

Par conséquent

$$\|F(u_1, \theta_1) - F(u_2, \theta_2)\|_* \leq \sqrt{kh}\max\left[\|(u_1, \theta_1)\|_X, \|(u_2, \theta_2)\|_X\right] \times \left[(1 + \sqrt{2})\|u_2 - u_1\| + \|\theta_2 - \theta_1\|_1\right]$$

$$\|F(u_1, \theta_1) - F(u_2, \theta_2)\|_* \leq 2\sqrt{2}\,\sqrt{kh}\max\left[\|(u_1, \theta_1)\|_X, \|(u_2, \theta_2)\|_X\right] \times \|(u_1, \theta_1) - (u_2, \theta_2)\|_X$$

et le lemme est démontré. □

L'opérateur F vérifie donc l'hypothèse $(\mathcal{H}_3)$ avec $\rho = 0$ et $\lambda = 2\sqrt{2}\,\sqrt{kh}$ où $k = \min(1, L)$ et $h = 2^{3/2}H^{1/2}$.

On en déduit alors le

THÉORÈME 4.2. *Si la constante δ vérifie l'inégalité suivante:*

$$\delta^2 > 2^{7/4}\gamma H^{1/4}(L/3)^{1/2}k^{3/2}$$

les équations (4.1), (4.2), (4.3), (4.4) et (4.5) ont une et une seule condition $(u, p, \theta) \in (H^2(\Omega))^2 \times H^1(\Omega) \times (Z(\Omega) \cap H^2(\Omega))$ (p est défini à une constante près).

DÉMONSTRATION: Soit f l'élément de X^* défini au Lemme 4.2. Pour chaque $(v, \varphi) \in X$, nous avons $\langle f, (v, \varphi)\rangle = \langle -\gamma(r, 0), v\rangle$, par conséquent

$$|\langle f, (v, \varphi)\rangle| \leq \gamma|(r, v_1)| \leq \gamma|r|\,|v_1| \quad (v = (v_1, v_2)).$$

D'autre part $|r|^2 = \int_\Omega (2x_2 - 1)^2\,dx = L/3$.

Utilisons le lemme 2.2:

$$|\langle f, (v, \varphi)\rangle| \leq \gamma/\sqrt{3}(\sqrt{L}/\sqrt{2})k\,\|v\|$$

d'où $\|f\|_* \leq \gamma/\sqrt{3}k(L/2)^{1/2}$. On a ainsi: $\lambda\|f\|_* \leq 2\gamma(1 + \sqrt{2}/L)^{1/4}(L/3)^{1/2}k^{3/2}$ et donc $\delta^2 > \lambda\|f\|_*$. L'unicité résulte du théorème 3.2. □

REMARQUE 4.1. Si $\delta^2 \geq 4\lambda\alpha$, avec $\alpha = \|F(0)\|_*$ et ici $\|F(0)\|_* \leq \gamma(L/3)^{1/2}$, on peut résoudre le problème (4.1)–(4.5) avec le théorème 3.3.

En effet, $(\mathcal{H}_2)$ implique $(\mathcal{H}_4)$, $R(F) = R(A)$ donc $(\mathcal{H}_5)$ n'est autre que $(\mathcal{H}_3)$. Par suite, si $\delta^2 \geq 4\lambda\alpha$, dans la boule $B(0,R)$ de X, où $R = 1/(2\lambda\left[\delta - (\delta^2 - 4\lambda\alpha)^{1/2}\right]$, il existe Λ unique tel que $A(\Lambda) = F(\Lambda)$.

Compte tenu du Lemme 4.2, toute solution de l'équation $Av = Fv$ vérifie $\|v\|_X \leq \delta^{-1}\alpha$; or $\delta^{-1}\alpha < R$ donc il existe un unique élément Λ de X tel que $A(\Lambda) = F(\Lambda)$.

REMARQUE 4.2. Soit le problème suivant:
Trouver $u = (u_1, u_2), p, \theta, c$ vérifiant (4.1), (4.2), (4.3), l'équation

$$-\rho\Delta c + \sum_{i=1}^{2} u_i D_i c = 0 \text{ dans } \Omega \quad (\rho \text{ constante positive}) \tag{4.9}$$

et les conditions aux limites

$$\begin{gathered} u_1 = 0 \text{ et } u_2 = -\beta\partial c/\partial x_2 \text{ sur } \Gamma \\ \theta = -1 \text{ et } c = -1 \text{ sur } \Gamma_1 \\ \theta = 1 \text{ et } c = 1 \text{ sur } \Gamma_2 \\ \partial\theta/\partial x_1 = \partial c/\partial x_1 = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \end{gathered}$$

β est une fonction donnée, définie sur Γ, égale à une constante positive β_1 sur Γ_1 et à une constante positive β_2 sur Γ_2.

C'est l'un des problèmes envisagés dans l'introduction, il s'agit d'un transport de masse et de chaleur dans une cavité rectangulaire.

Le théorème 3.3 permet de prouver que ce problème admet au moins une solution $(u, p, \theta, c) \in V \times L^2(\Omega)/\mathbb{R} \times W(\Omega) \times \widehat{W}(\Omega)$, avec:

$$\begin{aligned} &W(\Omega) = Z(\Omega) \cap H^2(\Omega) \\ &\widehat{W}(\Omega) = \left\{ \varphi \in W(\Omega), \beta_1 \int_0^L \partial\varphi/\partial x_2(\xi, 0)\, d\xi = \beta_2 \int_0^L \partial\varphi/\partial x_2(\xi, 1)\, d\xi \right\}. \end{aligned}$$

La démonstration de ce résultat sera prochainement publiée.

BIBLIOGRAPHIE

1. L. Cattabriga, *Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes*, Rend. Sem. Math. Univ. Padova **31** (1961).
2. C. Cuvelier, "Perturbation, approximation et contrôle optimal d'un système gouverné par les équations de Navier–Stokes couplées à celles de la chaleur," Thèse de l'Université de Delft, 1976.
3. C. Foias et R. Temam, *Remarques sur les équations de Navier–Stokes stationnaires et les phénomènes successifs de bifurcation*, Annali delle Scuola Norm. Sup di Pisa (1978).
4. M. Gaultier, "Les équations de Navier–Stokes et leur analyse numérique," Cours de D.E.A. de Mathématiques Appliquées à l'Université de Bordeaux I, 1985.
5. M. Gaultier et M. Lezaun, "Théorèmes du point fixe et application aux équations de Navier–Stokes," Publications du Laboratoire Associé au C.N.R.S., fasc. 8701, mai 1987.
6. P. Grisvard, "Problèmes aux limites dans les polygones," Publications de l'Université de Nice, 1984.
7. F. Jehier, "Formulation et étude mathématique d'un problème convexion–diffusion avec réaction chimique et une étude numérique," Thèse de l'Université de Bordeaux I, 1978.

8. M. Lezaun, "Tesis de la Universidad del Pais Vasco," 1986.
9. J.L. Lions, "Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites non linéaires," Dunod et Gauthier Villard, 1960.
10. J.L. Lions et E. Magenes, "Problèmes aux limites non homogènes et applications," Dunod, 1968.
11. J. Necas, "Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques," Masson, 1967.
12. G. de Rham, "Variétés différentiables," Hermann, Paris, 1960.
13. R. Temam, "Navier–Stokes Equations," North Holland, 1977.
14. J.C. Zenouda, "Résolution numérique des équations de Navier–Stokes couplées à celles de la chaleur," Rapport C.E.A., 1970.

U.E.R. de Mathématiques et Informatique
de l'Université de Bordeaux I
Laboratoire associé au C.N.R.S. no. 226
351, cours de la Libération
33405 Talence-Cedex (France)

Departamento de Matematica Aplicada
Facultad de Ciencias
Universidad del Pais Vasco
Apartado 644, (España)