

ARRANGEMENTS D'HYPERPLANS I: LES GROUPES DE RÉFLEXIONS

Michel Jambu

... I believe that this example of the harmony and beauty of mathematics illustrates a basic phenomenon: when we classify "simple" mathematical objects from various points of view, all classifications tend to coincide, and the simple objects show a high degree of "symmetry". As we go on and consider more and more complex objects, the symmetry gets lost, or at least it is hidden to us, and the relations between the theories are not so easy to discover.

Egbert BRIESKORN
(The Unfolding of Exceptional Singularities)
Nova Acta Leopoldina (1981)

Résumé

Le théorème de Chevalley et Shephard-Todd caractérise les groupes finis engendrés par des pseudo-réflexions et permet de dégager des invariants numériques des groupes appelés les exposants.

Dans ce travail, une signification géométrique de ces invariants est donnée selon K. Saito et H. Terao, à l'aide des champs de vecteurs logarithmiques.

Le cas particulier des arrangements du Coxeter est traité et il est montré que le complément des hyperplans de réflexions, après complexification, est un $K(\pi, 1)$ -espace dont le groupe fondamental est un groupe de tresses.

Cette étude permet d'envisager la situation d'un arrangement quelconque d'hyperplans.

Abstract

Chevalley and Shephard-Todd's theorem characterizes the finite groups generated by pseudo-reflections and gives some numerical invariants of the groups, called the exponents.

According K. Saito and H. Terao, we give a geometric meaning of these invariants using logarithmic vector fields.

The particular situation of the Coxeter arrangements is studied and it is shown that the complement of the reflection hyperplanes after complexification is a $K(\pi, 1)$ -space whose fundamental group is a group of braids.

Then it will be possible to consider the more general situation of any arrangement of hyperplanes.

0. Introduction

Un arrangement d'hyperplans est une famille finie de sous-espaces de codimension 1 d'un espace vectoriel. L'exposé de P. Cartier [5] au Séminaire Bourbaki, intitulé "Les arrangements d'hyperplans: un chapitre de géométrie combinatoire" présente une synthèse de la théorie en 1980. Le but de ce travail est de compléter et de mettre à jour les différents résultats de cette théorie en essayant d'établir les liens entre divers aspects: groupes de réflexions, modules de champs de vecteurs logarithmiques, cohomologie du complément d'un arrangement (complexe), homotopie de ce complément, combinatoire.

Dans la partie I, nous ne considérons que les arrangements définis par des groupes finis de réflexions. L'avantage en est de dégager le concept d'exposant d'une manière algébrique: l'action d'un groupe G sur un k -espace vectoriel V s'étend naturellement en une action sur l'algèbre symétrique $R = R(V^*)$. Alors qu'en général R^G , la partie invariante, est une algèbre de Cohen-Macaulay, G est un groupe fini de réflexions si et seulement si $R^G = k(\theta_1, \dots, \theta_n)$ où les θ_i sont des polynômes homogènes de degrés $d_i + 1$, les d_i étant les exposants du groupe G .

Tout ceci est développé dans la Section 1, la seconde section étudiant plus précisément les groupes de Coxeter. La Section 3 s'éloigne apparemment du sujet: on y présente les groupes de tresses qui apparaissent naturellement comme groupes fondamentaux des compléments d'arrangements de Coxeter (i.e. arrangements définis par des groupes de Coxeter). Nous avons choisi de les introduire à ce moment car, d'une part le groupe de monodromie d'un germe simple est un groupe de Coxeter et l'homomorphisme de monodromie est l'homomorphisme du groupe de tresses dans le groupe de Coxeter du type correspondant. D'autre part, le lien avec la théorie des singularités sera repris dans la partie II où nous montrerons que l'ensemble de bifurcation du déploiement universel d'une singularité isolée est une hypersurface libre.

La Section 4 nous amène à la notion d'arrangements libres. Pour cela nous introduisons une autre notion d'exposant pour la situation complexe (qui coïncide avec la précédente dans le cas réel) et qui s'avère plus satisfaisante d'un point de vue géométrique. Nous interprétons $(R \otimes V^*)^G$ comme le R^G -module libre des 1-formes différentielles invariantes à coefficients polynomiaux et $(R \otimes V)^G$ comme le R^G -module libre des champs de vecteurs polynomiaux tangents aux hyperplans de réflexion: le premier module fournit les exposants définis à la Section 1, le second les nouveaux exposants. D'où la définition d'arrangement libre due à H. Terao, obtenue en considérant les arrangements pour lesquels le R -module des champs de vecteurs tangents aux hyperplans de l'arrangement est libre. Ce sera l'objet de la partie II où nous développerons les aspects topologiques de la théorie.

1. Théorie des invariants

Dans cette section, on considère un espace vectoriel V de dimension n sur le corps k (dans la suite, on prendra $k = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) et une représentation linéaire d'un groupe fini G sur V : $G \rightarrow GL(V)$.

Alors G agit aussi sur le dual V^* par la représentation contragrédiente et donc sur l'algèbre symétrique $S(V^*) = T(V^*)/I$ où $T(V^*) = \bigoplus_{j \geq 0} (V^*)^{\otimes j}$ est l'algèbre tensorielle et I est l'idéal (homogène) engendré par les éléments

$x \otimes y - y \otimes x$ de $V^{\otimes 2}$. En particulier le choix d'une base (e_1, \dots, e_n) de V (donc d'une base duale $\{x_1, \dots, x_n\}$ de V^*) détermine un isomorphisme entre $S(V^*)$ et $R = k[x_1, \dots, x_n]$. Ainsi nous avons une action de G sur R définie comme suit: si $x \in V$, $f \in R$ et $\sigma = \rho(g) \in GL(V)$, alors $(gf)(x) = f(\sigma^{-1}x)$.

Un des problèmes de la théorie des invariants est de caractériser la sous-algèbre des invariants $R^G = \{f \in R \text{ tels que } gf = f, g \in G\}$.

EXEMPLE: Soit $G = S_n$ le groupe symétrique sur n éléments et $S_n \rightarrow GL(V)$ la représentation où $\rho(g)$ permute les coordonnées; alors il est bien connu que R^G est la sous-algèbre des polynômes symétriques à n variables.

Avant de commencer l'étude de l'algèbre R^G , faisons quelques rappels d'algèbre commutative.

Soit $A \hookrightarrow B$ une injection canonique de k -algèbres. B est de type fini sur A si B est une A -algèbre de type fini, i.e. l'injection canonique $A \hookrightarrow B$ admet une extension surjective $A[t_1, \dots, t_n] \rightarrow B$.

La dimension de Krull d'une k -algèbre A , notée $K\text{-dim } A$ est le nombre maximum d'éléments de A algébriquement indépendants. Par exemple $K\text{-dim } k[x_1, \dots, x_n] = n$.

Revenons à l'étude des invariants R^G et le premier résultat est le suivant:

THÉORÈME. $K\text{-sim } R^G = n$, où $n = \dim V$.

THÉORÈME (Hilbert, 1980, [15]). R^G est une k -algèbre de type fini.

La démonstration donnée par Hilbert établit l'existence d'un homomorphisme surjectif de $k[t_1, \dots, t_n]$ sur R^G et a l'avantage de pouvoir se généraliser aux groupes compacts en remplaçant l'opérateur de Reynolds par l'intégrale de Haar.

E. Noether (1916) [17] donne une démonstration différente de ce dernier résultat en mettant en évidence les polynômes t_1, \dots, t_p de la "base".

(Remarquons que cet avantage a le défaut de ne pouvoir s'adapter au cas des groupes compacts):

THÉORÈME (E. Noether). R^G est engendrée comme k -algèbre par au plus $\binom{|G|+n}{n}$ éléments, où $n = \dim V$.

(Voir [9] et [14] pour les démonstrations de ces théorèmes.)

Il est possible de caractériser plus précisément la structure de l'algèbre R^G . Pour cela rappelons le lemme de normalisation de Noether: Soit A une k -algèbre de type fini (k corps). Alors il existe un nombre fini d'éléments de A : y_1, \dots, y_m , algébriquement indépendants sur k tels que A soit entier sur $k[y_1, \dots, y_m]$ (i.e. chaque élément de A est racine d'un polynôme à coefficients dans $k[y_1, \dots, y_m]$). On en déduit que $K\text{-dim } A = m$. De plus $\{y_1, \dots, y_m\}$ est appelé *système de paramètres* de A .

Une k -algèbre de type fini A est appelée *algèbre de Cohen-Macaulay* s'il existe un système de paramètres $\{y_1, \dots, y_m\}$ tel que A soit un $k[y_1, \dots, y_m]$ -module libre (i.e. $A = \bigoplus_{i=1}^p \alpha_i k[y_1, \dots, y_m]$, $\alpha_i \in A$).

THÉORÈME (Hochster et Eagon, 1971, [16]). R^G est une algèbre de Cohen-Macaulay.

Outre l'article original, on peut trouver des démonstrations de ce résultat dans [9] et [24].

Il est alors naturel de se poser la question suivante: Est-il possible de caractériser les groupes (finis) G tels que $R^G = k[\theta_1, \dots, \theta_n]$, (i.e. R^G est l'algèbre de Cohen-Macaulay la plus simple)? Remarquons qu'entre la situation la plus générale (algèbre de Cohen-Macaulay) et la plus simple (algèbre polynomiale) il existe des cas intermédiaires: algèbre de Gorenstein, intersection complète, hypersurface (voir par exemple [24]). Revenons à notre question. La réponse avait déjà été donnée, d'une part par Chevalley (1955) et Serre (1957), d'autre part par Shephard et Todd (1954):

THÉORÈME. $R^G = k[\theta_1, \dots, \theta_n]$ si et seulement si G est un groupe fini engendré par des pseudo-réflexions (appelé par la suite groupe fini de réflexions).

Rappelons que $g \in G$ est une pseudo-réflexion si $g \neq 1$ et $\sigma = \rho(g)$ laisse fixe un hyperplan de V (p.e. pour $k = \mathbb{C}$ ou \mathbb{R} , si σ n'a qu'une seule valeur propre différente de 1). En fait Chevalley montre que si G est un groupe fini de réflexions alors $R^G = k[\theta_1, \dots, \theta_n]$ où $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ est un système homogène de paramètres. Shephard et Todd établissent une réciproque ainsi que $|G| = \prod_{i=1}^n \deg \theta_i$ et $\sum_{i=1}^n (\deg \theta_i - 1)$ est le nombre de pseudo-réflexions de G .

PROPOSITION. Soit G un groupe fini de réflexions et $R^G = k[\theta_1, \dots, \theta_n]$ où $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ sont homogènes. Les entiers $d_i = \deg \theta_i - 1$, $i = 1, \dots, n$, sont indépendants de la représentation de R^G comme une algèbre de polynômes.

D'où la définition:

DÉFINITION. $\{d_1, \dots, d_n\}$ sont appelés les exposants du groupe fini de réflexions G .

2. Groupes de Coxeter

La classification des groupes (réels) finis de réflexions a été faite par Coxeter.

DÉFINITION. Un groupe W noté multiplicativement est un groupe de Coxeter s'il existe un sous-ensemble S de générateurs de W tel que:

- 1) pour tout $s \in S$, $s^2 = e$, e élément neutre de W ;
- 2) pour tous s, s' dans S , soit $m(s, s')$ l'ordre de ss' et I l'ensemble des couples (s, s') tels que $m(s, s')$ soit fini. Alors l'ensemble générateur et les relations $(ss')^{m(s, s')} = e$, $(s, s') \in I$ forment une présentation du groupe W .

Le couple (W, S) est appelé système de Coxeter de rang $|S|$ si $|S| < +\infty$.

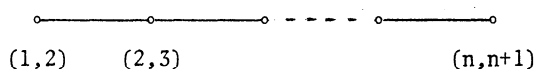
A tout système de Coxeter (W, S) on associe un graphe de Coxeter $\Gamma(W)$, dont les sommets sont les éléments de S et où s et s' sont reliés par une

arête de poids $m(s,s')$ si $m(s,s') \geq 3$.

N.B. Si $m(s,s') = 3$, on ne note pas le poids sur l'arête.

Réciproquement, chaque graphe de Coxeter définit un groupe de Coxeter.

EXEMPLE. Le groupe symétrique S_{n+1} est un groupe de Coxeter, de système (S_{n+1}, S) où $S = \{(i,i+1), 1 \leq i \leq n\}$. On a $m((i,i+1), (j,j+1)) = 2$ si $j = i \pm 1$ et $= 3$ si $j = i \pm 1$. Le graphe correspondant est le suivant:



On dit que W est *irréductible* si W ne peut pas se décomposer en un produit de deux groupes de Coxeter.

PROPOSITION [3]. Un groupe de Coxeter W est irréductible si et seulement si $\Gamma(W)$ est un graphe connexe.

Dans la suite, nous ne considérons que des groupes de Coxeter finis. L'objectif est, bien sûr, de montrer que les groupes de Coxeter sont des groupes de réflexions.

DÉFINITION. Soit (W,S) un système de rang ℓ . On définit la forme bilinéaire B_W sur l'espace vectoriel réel E de base $\{e_s\}_{s \in S}$, par:

$$B_W(e_s, e_{s'}) = -\cos \frac{\pi}{m(s,s')} .$$

Notons que $B_W(e_s, e_s) = -\cos \pi = 1$. Ainsi on définit la représentation: $\rho: W \rightarrow GL(E)$ par

$$(*) \quad \rho(s)(x) = x - 2B_W(e_s, x)e_s, \quad s \in S, \quad x \in E.$$

En particulier $\rho(s)(e_s) = e_s - 2B_W(e_s, e_s)e_s = -e_s$. De plus, pour $s \in S$, $\rho(s)$ est une réflexion qui préserve B_W , i.e. $B_W(\rho(s)(x), \rho(s)(y)) = B_W(x, y)$. Donc $\rho(W) \subset O(B_W)$ où $O(B_W)$ est le sous-groupe de $GL(E)$ des applications qui préservent B_W .

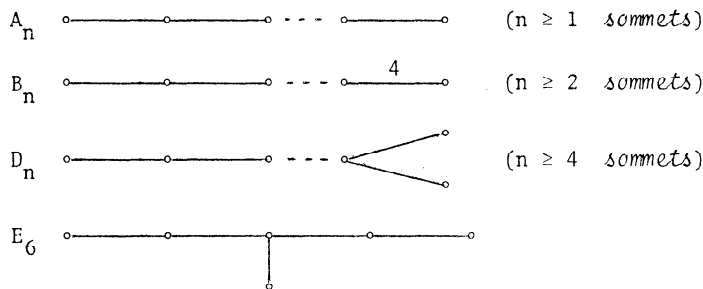
EXEMPLE 1. Soit (S_{n+1}, S) le système de Coxeter défini précédemment. Notons pour simplifier $s_i = (i, i+1)$. D'une part, \mathbb{R}^{n+1} est un S_{n+1} -module (par permutation des coordonnées), d'autre part, et suivant la démarche ci-dessus, soit E l'espace vectoriel réel de base $\{e_{s_i}\}_{i=1, \dots, n}$, muni de la forme bilinéaire $B_{S_{n+1}}$. Il est facile de constater que E est isomorphe au sous-espace $\{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ tels que } \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0 \text{ en posant } e_{s_i} = a_i - a_{i+1} \text{ où } a_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \text{ } i\text{-ième vecteur unitaire de } \mathbb{R}^{n+1} \text{. Les demi-droites } \mathbb{R}^+ \cdot e_{s_i} \text{ et } \mathbb{R}^+ \cdot e_{s_{i+1}} \text{ font un angle de } \pi - \pi/3 = 2\pi/3 \text{ car } -\cos \pi/m = \cos(\pi - \pi/m) \text{. } (S_{n+1})|_E \text{ est le groupe des symétries du polyèdre régulier dont les sommets sont les permutations de } (-1, -1, \dots, -1, n) \in \mathbb{R}^{n+1} \text{.}$

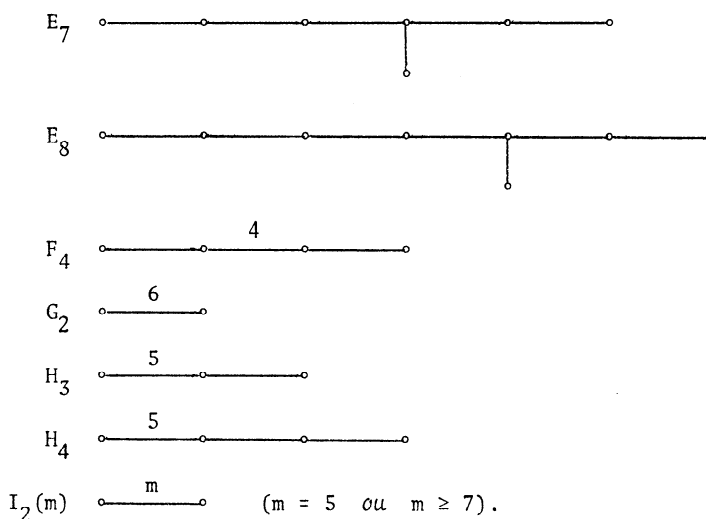
EXEMPLE 2. $\circ \xrightarrow{m} \circ$. A ce graphe, on associe le système de Coxeter (W, S) où $S = \{s, s'\}$, $s^2 = s'^2 = e$, $(ss')^m = e$. W est le groupe diédral d'ordre $2m$ que nous pouvons réaliser comme le groupe engendré par les symétries du plan par rapport à m droites passant par 0 et faisant entre elles un angle égal à un multiple entier de π/m .

THÉORÈME (Witt). Soit W un groupe de Coxeter. Alors W est fini si et seulement si B_W est définie positive.

Ce théorème signifie que les groupes finis de Coxeter sont réalisés comme groupe de réflexions dans des espaces euclidiens.

THÉORÈME. Soit (W, S) un système de Coxeter où W est fini et irréductible. Son graphe de Coxeter est isomorphe à un des graphes suivants:





A_n et $I_2(m)$ ont été décrits comme des graphes associés à des groupes de réflexions dans les exemples ci-dessus. Voyons les autres :

- B_n : C'est le groupe des symétries du n -cube de sommets $(\pm 1, \dots, \pm 1)$.
- D_n : C'est un sous-groupe d'indice 2 du précédent.
- H_3 : C'est le groupe de symétries de l'icosaèdre.
- E_6, E_7, E_8 : Ce sont les groupes de symétries des polytopes de Gosset de $\mathbb{R}^6, \mathbb{R}^7, \mathbb{R}^8$.
- F_4 et H_4 : Ce sont aussi des groupes de symétries de polytopes réguliers de \mathbb{R}^4 .

En considérant les groupes de Coxeter (finis) comme des groupes de réflexions, on peut leur associer leurs exposants comme définis dans la section précédente.

Exposants des groupes de Coxeter :

- | | |
|--------------------------------------|---------------------------------------|
| A_n : 1, 2, 3, ..., n. | E_7 : 1, 5, 7, 9, 11, 13, 17. |
| B_n : 1, 3, 5, ..., 2n-1. | E_8 : 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. |
| D_{2n} : 1, 3, 5, ..., 4n-3, 2n-1. | F_4 : 1, 5, 7, 11. |
| D_{2n+1} : 1, 3, 5, ..., 4n-1, 2n. | G_2 : 1, 5. |
| E_6 : 1, 4, 5, 7, 8, 11. | etc. |

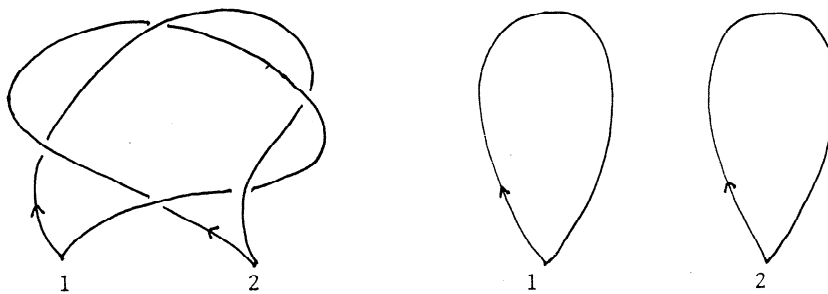
3. Groupes de tresses

Abordons dans ce chapitre l'aspect topologique. Un groupe de réflexions détermine une famille d'hyperplans vectoriels. Par exemple, soit le groupe noté A_n associé au système de Coxeter (S_{n+1}, S) . Ce groupe définit une structure de S_{n+1} -module sur \mathbb{R}^{n+1} donc aussi sur \mathbb{C}^{n+1} par complexification. Les hyperplans de réflexions sont orthogonaux aux vecteurs $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0)$, donc sont les hyperplans diagonaux $z_i = z_j$, $i \neq j$. Le complément de la réunion de ces hyperplans a une structure particulièrement simple: c'est un $K(\pi, 1)$ -espace (i.e. un espace d'Eilenberg-MacLane) dont le premier groupe d'homotopie se décrit comme un groupe de tresses (voir Arnol'd [1]).

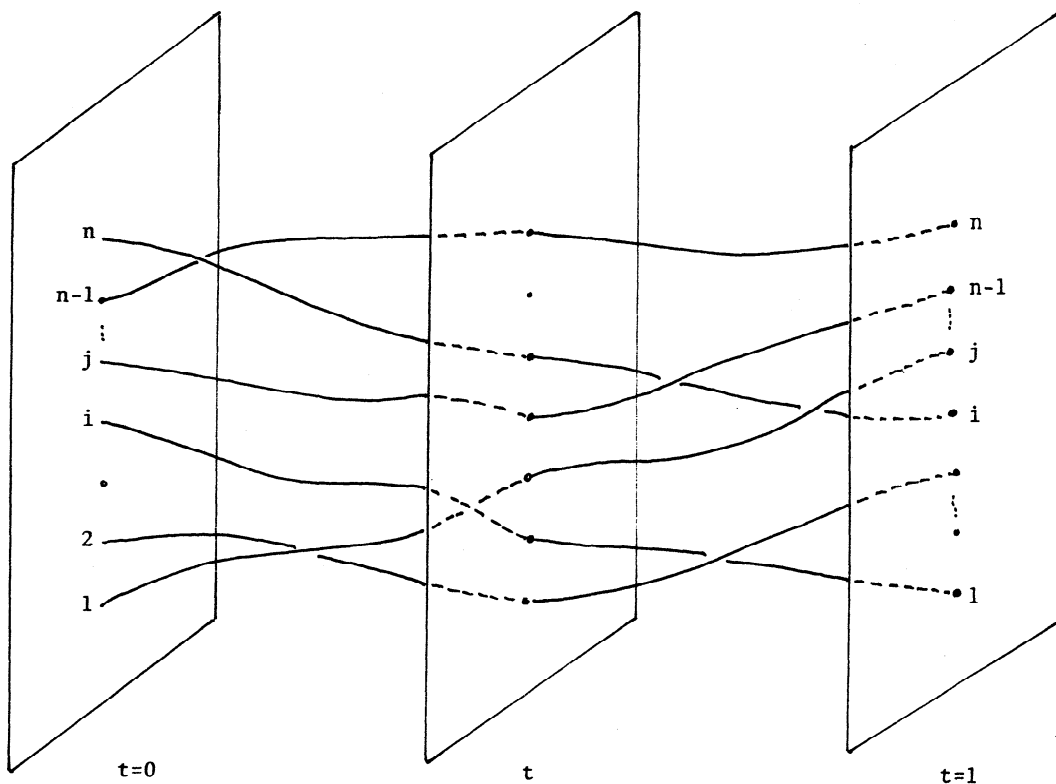
Décrivons d'abord ce groupe.

DÉFINITION. Une *pré-tresse* à n brins est une famille de n fonctions continues (les brins) f_1, \dots, f_n de $[0, 1]$ dans \mathbb{C} telles que pour tout $t \in [0, 1]$ les $f_i(t)$ sont 2 à 2 distincts, $f_i(0) = i$ pour tout $i = 1, \dots, n$ et $\{f_i(1), \dots, f_n(1)\} = \{1, 2, \dots, n\}$.

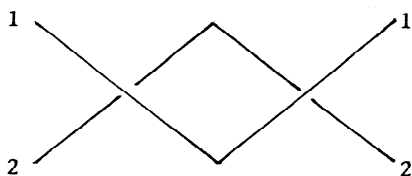
Exemples de pré-tresses à 2 brins:



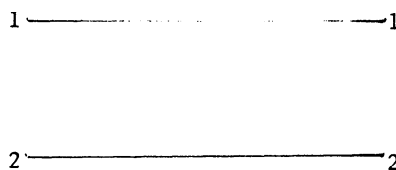
On peut aussi représenter les pré-tresses de la façon suivante:



et considérer les classes d'homotopie. Ainsi par exemple:



et

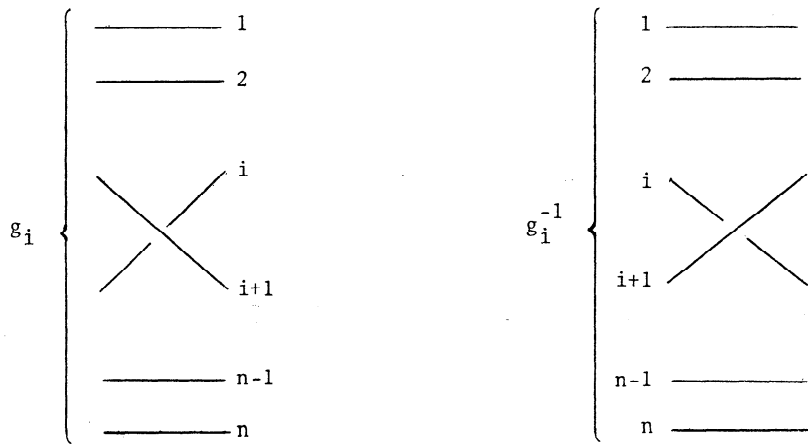


représentent deux pré-tresses homotopes.

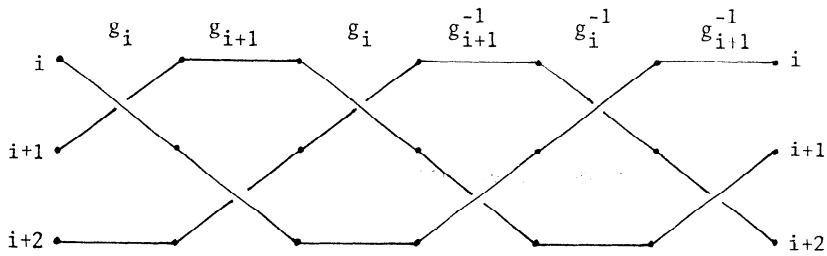
DÉFINITION. Une tresse à n brins est une classe d'homotopie de pré-tresses à n brins.

Il est possible de "composer" les tresses en les mettant "bout à bout" et l'on obtient ainsi un groupe. Le groupe de tresses à n brins noté $B(n)$ admet la présentation suivante:

- un ensemble de générateurs g_1, \dots, g_{n-1} où g_i croise le i -ième et $(i+1)$ -ième brins.

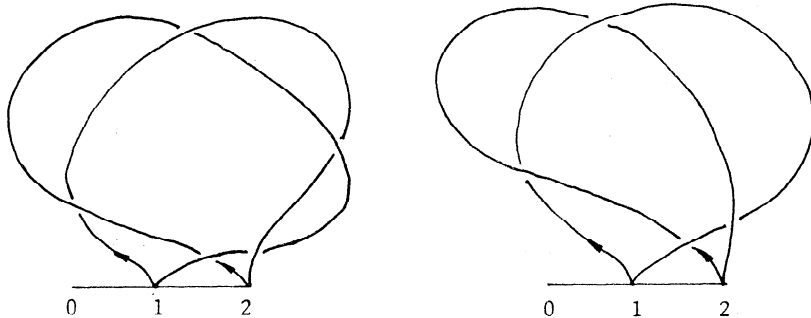


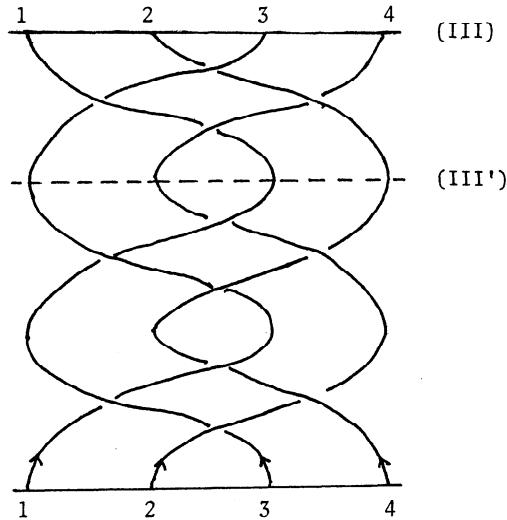
- les relations: $g_i \cdot g_j = g_j \cdot g_i$ si $|i-j| > 1$,
 $g_i \cdot g_{i+1} \cdot g_i = g_{i+1} \cdot g_i \cdot g_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, n-2$.



De plus, on définit l'homomorphisme surjectif $p: B(n) \rightarrow S_n$ qui associe à chaque tresse la permutation $\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ où $\sigma(i)$ est l'extrémité du i -ième brin.

DÉFINITION. Le noyau $\text{Ker}(p)$ est le sous-groupe des tresses colorées.





Dans les exemples ci-dessus, l'image de p est la permutation:

$$\begin{matrix}
 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \\
 \text{(I)} & \text{(II)} & \text{(III)} & \text{(III')}
 \end{matrix}$$

On peut alors interpréter une tresse colorée à n brins comme une classe d'homotopie de lacets de $\mathbb{C}^n - X_{\text{diag}}$ pointé en $(1, 2, \dots, n)$ où X_{diag} est la réunion de tous les hyperplans diagonaux. Ainsi $\text{Ker}(p) \simeq \pi_1(\mathbb{C}^n - X_{\text{diag}}; (1, \dots, n))$ et $B(n) \simeq \pi_1(\mathbb{C}^n/S_n - \bar{X}_{\text{diag}}; (\overline{1, \dots, n}))$ où S_n opère sur \mathbb{C}^n par permutation des coordonnées, ce qui aurait pu être la définition des tresses.

D'où la généralisation naturelle: Soit G un groupe (réel) fini de réflexions (supposé irréductible) opérant dans un espace vectoriel réel \mathbb{R}^n donc dans le complexifié \mathbb{C}^n . Soit $\{H_i\}_{i=1, \dots, p}$ les hyperplans de réflexions dans \mathbb{C}^n . On définit ainsi deux hypersurfaces $\Delta_G = \bigcup_{i=1}^p H_i$ dans \mathbb{C}^n et $D_G = p(\Delta_G)$ où $p: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n/G$ est la projection canonique, ainsi qu'un revêtement $\mathbb{C}^n - \Delta_G \rightarrow \mathbb{C}^n/G - D_G$ dont le groupe de transformations est G .

DÉFINITION. Le groupe d'homotopie d'ordre 1 de $\mathbb{C}^n/G - D_G$ (resp. $\mathbb{C}^n - \Delta_G$) est appelé *groupe de tresses généralisé* (resp. *groupe de tresses*)

colorées généralisé.

THÉORÈME. Si G est un groupe de Coxeter (irréductible), alors $\mathbb{C}^n - \Delta_G$ (resp. $\mathbb{C}^n/G - D_G$) est un $K(\pi,1)$ -espace, π étant le groupe de tresses colorées généralisé (resp. groupe de tresses généralisé) associé au groupe G .

Fox et Neuwirth [10] démontrent ce théorème pour $G = A_n$; Arnol'd [4] complète ce résultat pour certains groupes de Coxeter en utilisant le fait que $\mathbb{C}^n - \Delta_G$ est une fibre localement triviale sur un espace de base qui est un $K(\pi,1)$ -espace, la fibre étant une courbe affine complexe. La suite d'homotopie de cette fibration donne le résultat. Deligne [7] montre un résultat plus général englobant comme cas particulier la situation précédente.

Nous montrons, en appendice, comment les groupes de tresses généralisés et les groupes de Coxeter apparaissent dans l'étude des singularités isolées d'hyper-surfaces.

4. Les exposants d'un groupe de réflexions

Dans la Section 1, nous avons vu que les groupes finis de réflexions sont caractérisés par leur algèbre des invariants qui est polynomiale, i.e.

$R^G = k[\theta_1, \dots, \theta_n]$ où $\theta_1, \dots, \theta_n$ sont des polynômes homogènes de degré d_1+1, \dots, d_n+1 . Les entiers d_i , qui sont indépendants du choix des θ_j , sont les exposants du groupe G . Dans cette section, nous allons donner une autre interprétation de cette notion d'exposants, ce qui nous amènera à la définition de nouveaux invariants numériques ayant une signification géométrique.

Pour commencer, voici une autre caractérisation des groupes finis de réflexions:

THÉORÈME [6],[21]. G est un groupe fini de réflexions si et seulement si R est un R^G -module de type fini.

Seule la condition nécessaire nous est utile. Pour montrer que R est de type fini, il suffit de remarquer que le polynôme $P(X) = \prod_{g \in G} (X - gx)$ s'annule pour $X = x$ et d'utiliser le résultat suivant: si B est une A -algèbre de type fini, alors B est un A -module de type fini si et seulement si B est entière sur A .

Pour montrer que R est un R^G -module libre, définissons l'algèbre des coinvariants $R_G = R/I_G$ où I_G est l'idéal de R engendré par $\bigoplus_{i>0} R^G \cap S^i(V^*)$. Alors il est possible de montrer que toute \mathbb{C} -base $\{\bar{z}_j\}$ de l'espace vectoriel R_G définit une base $\{z_j\}$ du R^G -module R . (Pour une démonstration complète, voir [14].)

THÉORÈME [6]. L'action de G sur R_G est isomorphe à la représentation régulière de G .

DÉMONSTRATION. Soit un G -module gradué $M = \bigoplus_{j \geq 0} M_j$ (G étant un groupe fini); alors de la série $P_M(g^{-1}, t) = \sum_{j \geq 0} \mu_j(g) t^j$, $g \in G$, où μ_j est le caractère de G correspondant au module M_j on en déduit la série de Poincaré $P_M(t) = \sum_{j \geq 0} (\dim M_j) t^j$, en prenant $g = 1$. Dans le cas qui nous intéresse où G est un groupe fini de réflexions, R est un G -module gradué et, en diagonalisant $\rho(g)$, on obtient la formule de Molien: $P_R(g^{-1}, t) = \prod_{i \leq n} (1 - \omega_i(g)t)^{-1}$, où $\omega_i(g)$ sont les valeurs propres de $\rho(g)$.

Nous savons que si $\{\bar{z}_i\}$ est une \mathbb{C} -base de R_G , alors $\{z_i\}$ est une base du R^G -module libre R . De plus $\sum s_i z_i \mapsto \sum s_i \otimes (z_i + I_G)$, $s_i \in R^G$, définit un isomorphisme de G -modules gradués $R \simeq R^G \otimes R_G$. Soit τ_q le caractère de $(R_G)_q$. Comme l'action de G sur R^G est triviale, on obtient:

$$\begin{aligned} \sum_{q \geq 0} \tau_q(g) t^q &= P_{R_G}(g^{-1}, t) = P_R(g^{-1}, t) / P_{R^G}(t) \\ &= \prod_{i \leq n} (1 - t^{d_i}) / \prod_{i \leq n} (1 - \omega_i(g)t) \end{aligned}$$

car

$$P_{R^G}(t) = \sum_{\substack{m_i \geq 0 \\ i \leq n}} t^{m_i d_i} = 1 / \prod_{i \leq n} (1 - t^{d_i}).$$

En faisant tendre t vers 1, on obtient $\sum_q \tau_q(g) = 0$ si $g \neq 1$ et $\sum_q \tau_q(1) = |G|$ d'où le résultat.

N.B.: Par un G -module, nous signifions un $\mathbb{C}[G]$ -module.

THÉOREME [22]. Soit M un G -module simple, G étant un groupe fini de réflexions. Alors $(R \otimes M^*)^G$ est un R^G -module libre.

DÉMONSTRATION. Soient M et N deux G -modules. Alors $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(M, N)$ est un G -module pour $(g\phi)(x) = g(\phi(g^{-1}(x)))$, $x \in M$, $g \in G$ et $\phi \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(M, N)$. De plus $[\text{Hom}_{\mathbb{C}}(M, N)]^G := \text{Hom}_G(M, N)$ est l'ensemble des morphismes de G -modules. L'isomorphisme d'espaces vectoriels $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(M, N) \simeq N \otimes M^*$ est un isomorphisme de G -modules et induit un isomorphisme $\text{Hom}_G(M, N) \simeq [(N \otimes M^*)]^G$. Ainsi la dimension de $[(R_G)_k \otimes M^*]^G$ est égale à la multiplicité de M dans $(R_G)_k$, celle de M dans R_G étant $n = \dim_{\mathbb{C}}(M)$. Soient $q_1(M), \dots, q_n(M)$ les degrés des composantes homogènes, comptés avec leurs multiplicités. On a $n = \sum_i q_i(M)$. De $R \simeq R^G \otimes R_G$, nous déduisons $R \otimes M^* \simeq R^G \otimes R_G \otimes M^*$ et, puisque l'action de G sur R^G est triviale, $(R \otimes M^*)^G \simeq R^G \otimes (R_G \otimes M^*)^G$. Soient $\{u_1, \dots, u_n\}$ une \mathbb{C} -base de $(R_G \otimes M^*)^G$, où $\deg u_i = q_i(M)$. Alors $(R \otimes M^*)^G \simeq \bigoplus_{i \leq n} R^G u_i$, d'où le résultat.

Soit $\{y_1, \dots, y_n\}$ une \mathbb{C} -base de M^* . Alors $u_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \otimes y_j$ où $a_{ij} \in (R_G)_{q_i(M)}$ pour $i = 1, \dots, n$. Orlik et Solomon [18] montrent que $\det(a_{ij})$ est non nul et ne dépend que de M (à une constante multiplicative près). Plus précisément en utilisant un résultat de Gutkin [11], nous obtenons:

pour $M = V$,

$$\det(a_{ij}) = \prod_{H \in \underline{A}} \phi_H^{e_H - 1}$$

pour $M = V^*$,

$$\det(a_{ij}) = \prod_{H \in \underline{A}} \phi_H$$

où ϕ_H est une forme linéaire définie sur V dont le noyau est l'hyperplan H , e_H étant l'ordre de la réflexion correspondante et \underline{A} la famille des hyperplans de réflexions (que nous appellerons *arrangement* des hyperplans de réflexions). Comme $\det(a_{ij})$ est homogène de degré $\sum q_i(M)$, $\sum q_i(V^*)$ est le nombre d'hyperplans de

\underline{A} et $\sum q_i(V)$ est le nombre de réflexions de G . Remarquons que si G est réel alors $V^* \simeq V$ comme G -modules et $q_i(V^*) = q_i(V)$. On pourrait aussi remarquer que $e_H = 2$.

Ces invariants numériques, $q_i(V)$ et $q_i(V^*)$, ont un caractère algébrique pour le premier et géométrique pour le second. Nous allons voir qu'en fait, les $q_i(V)$ ne sont autres que les exposants du groupe G définis dans la Section 1. Soit $M = V$. Alors $R \otimes V^*$ peut être interprété comme l'ensemble des 1-formes différentielles à coefficients polynomiaux sur V .

En notant $E = \bigoplus_{p=0}^n E_p$, l'algèbre de Grassman de V , i.e. pour $p > 0$, E_p est le k -espace des formes p -linéaires alternées sur V et $E_0 = k$, alors $R \otimes E$ est l'algèbre de Cartan des formes différentielles sur V et est un G -module.

THÉOREME 23. Soit G un groupe fini de réflexions et $R^G = k[\theta_1, \dots, \theta_n]$. Alors chaque p -forme différentielle invariante s'écrit de façon unique sous la forme

$$\sum_{i_1 < \dots < i_p} \alpha_{i_1 \dots i_p} d\theta_{i_1} \wedge \dots \wedge d\theta_{i_p}$$

où $\alpha_{i_1 \dots i_p} \in R^G$.

En particulier, les $d\theta_i$, $i = 1, \dots, n$, forment une base du R^G -module $(R \otimes V^*)^G$. Ainsi $q_i(V) = \deg \theta_i - 1 = d_i$ et on retrouve le résultat [9]: le jacobien des invariants de base est égal à $\prod \theta_i$, à une constante multiplicative près. Supposons maintenant $M = V^*$. Alors $R \otimes V$ peut être interprété comme l'ensemble des champs de vecteurs polynomiaux sur V : Le R^G -module des champs de vecteurs polynomiaux invariants sur V est donc libre et possède une base X_1, \dots, X_n où X_i est homogène de degré $q_i(V^*) := n_i$, en notant $X_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial}{\partial z_j}$, $\{z_1, \dots, z_n\}$ étant une base duale de la base $\{y_1, \dots, y_n\}$ de V .

Afin de mieux saisir la portée géométrique des invariants n_i , que nous appellerons exposants de l'arrangement d'hyperplans \underline{A} (nous en verrons la raison plus tard), il nous est nécessaire d'interpréter les champs X_i uniquement en

termes de l'arrangement \underline{A} et non à l'aide du groupe G . Tout d'abord un lemme:

LEMME. Soient $\theta_1, \dots, \theta_n$ des invariants homogènes de G tels que $R^G = k[\theta_1, \dots, \theta_n]$. Une base de V étant fixée, soit J le déterminant jacobien des θ_i , $i = 1, \dots, n$. Alors $f \in R$ vérifie $g \cdot f = (\det g)f$ pour tout $g \in G$ si et seulement si $f \in R^G \cdot J$.

DÉMONSTRATION. En remarquant que

$$d: R \otimes E \rightarrow R \otimes E$$

$$f \otimes x_{i_1} \dots x_{i_p} \mapsto \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \otimes x_j x_{i_1} \dots x_{i_p}$$

où $\{x_1, \dots, x_n\}$ est une base de V^* , est une application k -linéaire qui commute avec l'action de G . En identifiant R avec $R \otimes k$ par $f \mapsto f \otimes 1$, on a $dx_i = d(x_i \otimes 1) = 1 \otimes x_i$; donc les éléments de $R \otimes E_p$ s'écrivent

$$\sum_{i_1 < \dots < i_p} f_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \dots dx_{i_p}.$$

On obtient $g(dx_1 \dots dx_n) = \det(g^{-1}) dx_1 \dots dx_n$ et alors

$$\begin{aligned} J dx_1 \dots dx_n &= d\theta_1 \dots d\theta_n = d(g\theta_1) \dots d(g\theta_n) \\ &= g(d\theta_1) \dots g(d\theta_n) = g(d\theta_1 \dots d\theta_n) \\ &= g(J dx_1 \dots dx_n) = g \cdot J \cdot \det(g^{-1}) dx_1 \dots dx_n \end{aligned}$$

d'où $g \cdot J = (\det g)J$.

Réciproquement, le sous-groupe de G fixant chaque point d'un hyperplan de réflexion H_i est cyclique et est engendré par une réflexion g_i d'ordre r_i . Rappelons de plus que $J = c \prod_i \phi_{H_i}^{r_i-1}$, $c \in \mathbb{C}^*$. Choisissons une base de V telle que $g_i(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, \varepsilon x_n)$, $\varepsilon = \det g_i$. Alors (en supprimant l'indice i), $g \cdot f = (\det g)f$ entraîne

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, \varepsilon^{-1} x_n) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n).$$

Différentions q fois par rapport à x_n et faisons $x_n = 0$. Alors

$$\varepsilon^{-q} \frac{\partial^q f}{\partial x_n^q} (x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = \frac{\partial^q f}{\partial x_n^q} (x_1, \dots, x_{n-1}, 0).$$

Pour $q = 0, 1, \dots, r-1$, $\varepsilon^{-q} \notin \varepsilon$ donc $\frac{\partial^q f}{\partial x_n^q} (x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = 0$ et alors ϕ_H^{r-1} divise f . De ceci découle $f \in R \cdot J$. Soit $f \in p^r \cdot J$. Alors

$$g \cdot p = (g \cdot f) / (g \cdot J) = ((\det g) f) / ((\det g) J) = p$$

donc $p \in R^G$ et $f \in R^G \cdot J$.

Soit $Q = \Pi \phi_H$. Nous sommes en mesure maintenant de montrer que les champs de vecteurs $X_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial}{\partial z_j}$ définis précédemment vérifient $X_i(Q) \in R^G \cdot Q$, c'est-à-dire, sont en tout point d'un hyperplan de réflexion, tangents à cet hyperplan.

PROPOSITION [26]. $X_i(Q) \in R^G \cdot Q$, $i = 1, \dots, n$.

DÉMONSTRATION. Considérons les n champs $X_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial}{\partial z_j}$. Alors

$$\begin{aligned} [g \cdot (X_1 \cdot Q), \dots, g \cdot (X_n \cdot Q)] &= [g \cdot a_{ij}] \cdot \left[\frac{\partial (g \cdot Q)}{\partial (g \cdot z_1)}, \dots, \frac{\partial (g \cdot Q)}{\partial (g \cdot z_n)} \right] \\ &= [g \cdot a_{ij}] \cdot (\det g) \cdot \left[\frac{\partial Q}{\partial (g \cdot z_1)}, \dots, \frac{\partial Q}{\partial (g \cdot z_n)} \right] \\ &\quad \text{(d'après le lemme)} \\ &= [g \cdot a_{ij}] \cdot (\det g) \cdot \left[\frac{\partial Q}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial Q}{\partial z_n} \right] \cdot \left[\frac{\partial z_i}{\partial (g \cdot z_j)} \right] \\ &= [g \cdot a_{ij}] \cdot (\det g) g \left[\frac{\partial Q}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial Q}{\partial z_n} \right]. \end{aligned}$$

D'un autre côté $\sum_{j=1}^n (g \cdot a_{ij}) \otimes (g \cdot e_j) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \otimes e_j$. Alors $[a_{ij}] = [g \cdot a_{ij}] \cdot g$. Ainsi $[g \cdot (X_1 \cdot Q), \dots, g \cdot (X_n \cdot Q)] = (\det g) \cdot [X_1 Q, \dots, X_n Q]$.

Notons $S = R^G$ et $\text{Der}_V(\log Q) := \{X \in \text{Der}_V \text{ tels que } X(Q) \in S \cdot Q\}$, le S -module des champs de vecteurs polynomiaux logarithmiques le long de Q . Les champs X_i forment une base de ce module qui est libre. En effet:

THÉOREME [19]. $\text{Der}_V(\log Q)$ est un S -module libre si et seulement s'il existe n champs homogènes X_1, \dots, X_n de $\text{Der}_V(\log Q)$ tels que:

- a) X_1, \dots, X_n sont S -linéairement indépendants,
- b) $\sum_{i=1}^n (\deg X_i + 1) = \deg Q.$

D'où la définition due à H. Terao [2]:

DÉFINITION. Soit \underline{A} une famille finie d'hyperplans vectoriels de V , définie par $Q = 0$, et soit $S :=$ la sous-algèbre de $R = S(V^*)$ des polynômes invariants par réflexion par rapport à chaque hyperplan de \underline{A} . Si le S -module $D(\underline{A}) :=$ l'ensemble des germes à l'origine des champs de vecteurs polynomiaux X tels que $X \cdot Q \in S \cdot Q$, est libre, alors \underline{A} est appelé *arrangement libre*.

En particulier, l'arrangement déterminé par un groupe de réflexions est libre.

DÉFINITION (Terao [26]). Si \underline{A} est un arrangement libre et X_1, \dots, X_n est une base de $D(\underline{A})$, où les X_i sont des champs homogènes de degré d_i , alors d_1, \dots, d_n sont appelés les *exposants* de \underline{A} .

REMARQUES. 1) Les entiers d_i ne dépendent que de \underline{A} .

2) Si \underline{A} est défini par un groupe de réflexions G , alors les d_i sont les entiers $q_i(V^*)$.

3) Le champ d'Euler: $X = \sum_{i=1}^n z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ appartient à $D(\underline{A})$, donc 1 est un exposant de \underline{A} .

Conclusion

Dans cette première partie, nous avons étudié des arrangements d'hyperplans ayant un "haut degré de symétrie" car définis par des groupes de réflexions. Deux types d'invariants numériques (qui coïncident dans le cas réel) ont été associés à la situation: l'un algébrique défini à partir du groupe, l'autre de nature géométrique. Ce dernier va nous permettre d'envisager l'étude des arrangements d'hyperplans qui ne sont plus définis par des groupes, étude qui sera entreprise par le biais des champs de vecteurs logarithmiques. Reprenant les travaux de Terao,

nous chercherons à caractériser les arrangements libres. C'est une généralisation naturelle des arrangements définis par des groupes de réflexions. Cependant, pour reprendre les propos de E. Brieskorn

"... the symmetry gets lost, or at least it is hidden to us, and the relations between the theories are not so easy to discover..."

et la signification géométrique de la liberté reste encore cachée. C'est la situation que nous développerons dans la partie II de ce travail.

Nous avons aussi constaté que les arrangements définis par des groupes de réflexions, après complexification, ont un complément ayant le type d'homotopie d'un $K(\pi,1)$ -espace, où π est un groupe de tresses. Ainsi K. Saito [19] se demande si le complément d'un arrangement d'hyperplans complexes est toujours un $K(\pi,1)$ -espace quand l'arrangement est libre. Terao a montré que la réciproque est fautive, mais la question reste, à ce jour, un problème ouvert. Dans la partie II, nous nous consacrerons donc aux aspects géométriques et topologiques du complément d'un arrangement et nous verrons comment cette étude nous amènera naturellement à la combinatoire, ce qui pourrait être l'objet d'une partie III.

Appendice

Les groupes de tresses généralisés et les groupes de Coxeter apparaissent dans l'étude des singularités isolées d'hypersurfaces de la façon suivante: Soit $f: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que $f(0) = 0$ et supposons que f possède en 0 un point critique isolé. Le nombre de Milnor μ de f en 0 est la dimension du \mathbb{C} -espace vectoriel quotient de l'anneau $\mathbb{C}\{z_0, z_1, \dots, z_n\}$ des séries convergentes par l'idéal jacobien J_f . Remarquons que $\mu < +\infty$. Soit (F, μ) la déformation universelle de f définie par $F: \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^\mu \rightarrow \mathbb{C}$, fonction holomorphe telle que $F(z, 0) = f(z)$ et $\left\{ \frac{\partial F}{\partial \lambda_i}(z, 0) \right\}_{i=1, \dots, \mu}$ forment une base de $\mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\}/J_f$. Soit $\Sigma \subseteq \mathbb{C}^\mu$ le lieu-discriminant, i.e. l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}^\mu$ tels que l'application $z \mapsto F(z, \lambda)$ ait un point critique en 0 . Soit $D_\varepsilon = \{ \lambda \in \mathbb{C}^\mu \text{ tels que } \|\lambda\| < \varepsilon, \varepsilon > 0 \}$ et $\Sigma_\varepsilon = \Sigma \cap D_\varepsilon$. Il est possible de montrer que le type topologique du couple $(D_\varepsilon, \Sigma_\varepsilon)$ ne dépend ni de ε ni du choix

de la déformation universelle, si ε est suffisamment petit. De plus, si le germe en 0 de f est simple, i.e. à équivalence près de la forme:

$$A_k: x^{k+1} + Q, \quad k \geq 1$$

$$D_k: x^2 y + y^{k-1} + Q, \quad k \geq 4$$

$$E_6: x^3 + y^4 + Q$$

$$E_7: x^3 + xy^3 + Q$$

$$E_8: x^3 + y^5 + Q$$

où Q est une forme quadratique des variables restantes, alors $D_\varepsilon - \Sigma_\varepsilon$ est un $K(\pi, 1)$ -espace où π est le groupe de tresses généralisé associé au groupe de Coxeter de type correspondant A_k, D_k, E_6, E_7, E_8 .

EXEMPLE. Soit

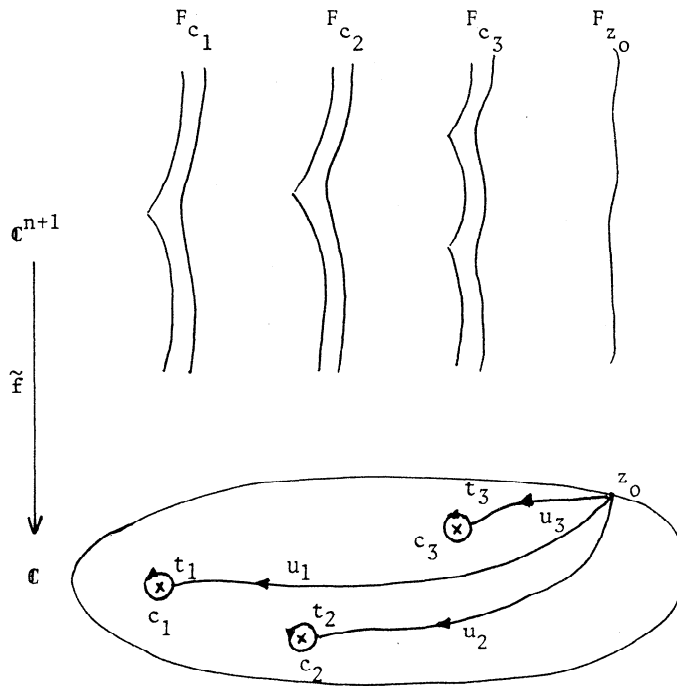
$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto x^{k+1},$$

et (F, k) la déformation universelle définie par $F(x, \lambda) = x^{k+1} + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i x^i$. En désignant par x_1, \dots, x_{k+1} les racines de $F(x, \lambda) = 0$, on obtient $\lambda_{i-1} = (-1)^{k-i} \sigma_i$ où σ_i est la fonction symétrique élémentaire

$$\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq k+1} x_{j_1} \dots x_{j_i}, \quad i = 1, \dots, k+1.$$

$F(z, \lambda) = \frac{\partial F}{\partial z}(z, \lambda) = 0$ signifie que z est racine double au moins de $F(-, \lambda) = 0$, donc il existe $i, j, i \neq j$ tels que $x_i = x_j$. Ce sont les points des hyperplans diagonaux de \mathbb{C}^{k+1} . D'un autre côté $\mathbb{C}[\sigma_1, \dots, \sigma_{k+1}] = \mathbb{R}^{S_{k+1}}$ (algèbre des invariants sous l'action du groupe symétrique S_{k+1}). La réalisation du groupe de Coxeter de type $A_k: (S_{k+1}, S)$ sur l'espace E défini par $\sigma_1 = 0$ donne la signification des coefficients λ_i , en particulier de $\lambda_k = 0$. Ainsi $D_\varepsilon - \Sigma_\varepsilon$ est diffeomorphe à $\mathbb{C}^{k+1}/S_{k+1} - D$ où D est l'image de la réunion des hyperplans diagonaux sous la projection $\mathbb{C}^{k+1} \rightarrow \mathbb{C}^{k+1}/S_{k+1}$, et $D_\varepsilon - \Sigma_\varepsilon$ est un $K(B(k+1), 1)$ -espace.

Dans le cas général, $D_\varepsilon - \Sigma_\varepsilon$ est la base d'une fibration d'espace total $E = \{(z, \lambda) \in \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^\mu \text{ tels que } \|z\| < \alpha, \|\lambda\| < \varepsilon, \lambda \notin \Sigma_\varepsilon \text{ et } F(z, \lambda) = 0\}$ où α est assez petit et ε assez petit relativement à α . La fibre F_z est difféomorphe à $\bar{F} = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \text{ tels que } \|z\| < \alpha \text{ et } f(z) = \beta = 0\}$ où $\beta \in \mathbb{C}$, qui est une variété à bord de dimension réelle $2n$, ayant le type d'homotopie d'un bouquet de μ n -sphères. Par conséquent, $H_n(\bar{F}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^\mu$ et $H_i(\bar{F}, \mathbb{Z}) = 0$ pour $i \neq n$. Pour $\lambda \in D_\varepsilon - \Sigma_\varepsilon$ on obtient un *homomorphisme de monodromie*: $\pi_1(D_\varepsilon - \Sigma_\varepsilon) \rightarrow \text{Aut}(H_n(\bar{F}, \mathbb{Z}))$, dont l'image Γ est appelée *groupe de monodromie* de la singularité f . Afin de préciser ce groupe, considérons une "morsification" de f , i.e. une fonction \tilde{f} voisine de f telle que \bar{F} reste le même à homéomorphisme près, qui admet μ points critiques non dégénérés et μ valeurs critiques distinctes c_1, \dots, c_μ contenues dans un disque B . L'homomorphisme canonique $\pi_1(B - \{c_1, \dots, c_\mu\}) \rightarrow \pi_1(D_\varepsilon - \Sigma_\varepsilon)$ est surjectif [13] donc Γ est déterminé par l'image de $\pi_1(B - \{c_1, \dots, c_\mu\})$ dans $\text{Aut}(H_n(\bar{F}, \mathbb{Z}))$. Comme c_i est non dégénérée, chaque fibre au-dessus d'un point t_i voisin de c_i contient une n -sphère $S_i(t)$ qui s'annule quand t_i vient en c_i . Tirons les $S_i(t)$ en S_i dans la fibre F_{z_0} au-dessus de z_0 . Les $\Delta_i \in H_n(F_{z_0}, \mathbb{Z})$ représentés par les S_i sont appelés *cycles évanescents de Picard-Lefschetz*. Le groupe $\pi_1(B - \{c_1, \dots, c_\mu\}; z_0)$ est libre avec μ générateurs γ_i définis en suivant le chemin u_i de z_0 à t_i , où les chemins u_i n'ont qu'un seul point commun z_0 , puis en tournant autour de c_i dans le sens positif et enfin en revenant à z_0 par u_i . Chaque γ_i définit une transformation de monodromie $T_i \in \text{Aut}(H_n(F_{z_0}, \mathbb{Z}))$ associée à u_i ou à Δ_i . De plus, en considérant les nombres intersections $\langle S_i, S_j \rangle$, on définit une forme intersection sur $H_n(F_{z_0}, \mathbb{Z})$. Si $n \equiv 0 \pmod{4}$, alors la forme intersection est appelée *forme quadratique de la singularité* f . Notons qu'il est possible de se ramener à ce cas en considérant $f(z) + \sum_{i=1}^m y_i^2$. Ainsi, dans ce cas, on a $\langle \Delta_i, \Delta_i \rangle = -2$ et $T_i(a) = a + \langle a, \Delta_i \rangle \Delta_i$, donc T_i est la réflexion par rapport à l'hyperplan orthogonal au vecteur Δ_i .



THÉOREME [8]. Soit $n \equiv 0 \pmod{4}$.

1) Soit f un germe simple. Le groupe de monodromie est le groupe de Coxeter du type correspondant et l'homomorphisme de monodromie est l'homomorphisme du groupe de tresses généralisé dans le groupe de Coxeter.

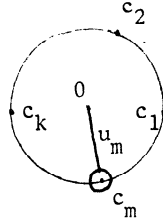
2) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive et de discriminant non nul si et seulement si f est simple.

EXEMPLE. Soit

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto z^{k+1},$$

et considérons $\tilde{f}(z) = z^{k+1} - \lambda z$, $\lambda > 0$. Les points critiques de \tilde{f} sont $k\sqrt{\lambda/k+1} \cdot \xi_m$, $\xi_m = e^{-2\pi im/k}$ et les valeurs critiques sont $c_m = -(k/k+1)^{k\sqrt{\lambda/k+1}} \cdot \xi_m$.



Les chemins $\{u_m\}$ déterminent une base de $H_0(\tilde{f}^{-1}(0), \mathbb{Z})$. Remarquons que le cycle $\Delta_m = z_m - z_0$ convient, où $z_0 = 0$, $z_m = \xi_m \sqrt[k]{\lambda}$, puisque $\tilde{f}^{-1}(0) = \{z_0, \dots, z_k\}$. Par conséquent, $\langle \Delta_m, \Delta_m \rangle = 2$, $\langle \Delta_m, \Delta_{m'} \rangle = -1$ pour $m \neq m'$. D'où pour $f(z) = y_1^2 + y_2^2$, on obtient $\langle \Delta_m, \Delta_m \rangle = -2$, $\langle \Delta_m, \Delta_{m'} \rangle = -1$ pour $m \neq m'$. Par un changement de base, on se ramène aux cycles évanescents suivants: $\Delta_1 = z_k - z_{k-1}$, $\Delta_2 = z_{k-1} - z_{k-2}$, ..., $\Delta_k = z_1 - z_0$ avec $\langle \Delta_i, \Delta_i \rangle = -2$, $\langle \Delta_i, \Delta_{i+1} \rangle = -1$ et $\langle \Delta_i, \Delta_j \rangle = 0$ si $|i-j| \geq 2$.

On reconnaît ainsi le groupe de Coxeter A_k . Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à [8] et [12].

Bibliographie

- [1] ARNOL'D, V.I., The cohomology ring of the colored Braid groups, *Mat. Zametki* 5(1969), 227-231, *Math. Notes* 5(1969), 138-140.
- [2] ARTIN, E., Theory of Braids, *Annals of Math.* 48(1942), 101-126.
- [3] BOURBAKI, N., *Groupes et algèbres de Lie*, Chap. 4, 5, 6, Masson, Paris, 1981.
- [4] BRIESKORN, E., *Sur les groupes de tresses* (d'après V.I. Arnol'd), Séminaire Bourbaki, 24^e année, 1971-1972, Lecture Notes no. 317, Springer 1973.
- [5] CARTIER, P., *Les arrangements d'hyperplans: un chapitre de géométrie combinatoire*, Séminaire Bourbaki, 33^e année, 1980-1981, 1-22, Springer Lecture Notes no. 901, 1981.

- [6] CHEVALLEY, C., Invariants of finite groups generated by reflections, *Amer. J. Math.* 77(1955), 778-782.
- [7] DELIGNE, P., Les immeubles de groupe de tresses généralisés, *Inv. Math.* 17 (1972), 273-302.
- [8] DEMAZURE, M., Classification des germes à point critique isolé et à nombres de modules 0 ou 1 (d'après V.I. Arnol'd), Séminaire Bourbaki, 1973-1974, no 443, 124-142.
- [9] FLATTO, L., Invariants of finite reflection groups, *Enseig. Math.* (1978), 237-292.
- [10] FOX, R.H., NEUWIRTH, L., The Braid groups, *Math. Scand.* (1962), 119-126.
- [11] GUTKIN, E.A., Matrices connected with groups generated by mappings, *Func. Anal. and Appl.* 7(1973), 153-154.
- [12] GUZEIN-ZADE, S.M., The monodromy groups of isolated singularities of hypersurfaces, *Russian Math. Surveys* 32.2(1977), 23-69.
- [13] HAMM, H., LE DUNG TRANG, Un théorème du type de Lefschetz, *C.R.A.S. Paris* 272(1971), 946-949.
- [14] HILLER, H., Geometry of Coxeter groups, *Pitman Adv. Publ. Prog.* 54(1982),
- [15] HILBERT, D., Über die Theorie der Algebraischen Formen, *Math. Ann.* 36(1890), 473-534.
- [16] HOCHSTER, M., EAGON, J.A., Cohen-Macaulay rings, invariants theory and the generic perfection of determinantal loci, *Amer. J. Math.* 93(1973), 1020-1058.
- [17] NOETHER, E., Der Endliche Keitssatz der Invarianten Endlicher Gruppen, *Math. Ann.* 77(1916), 89-93.
- [18] ORLIK, P., SOLOMON, L., Unitary reflection groups and cohomology, *Inv. Math.* 59(1980), 77-94.

- [19] SAITO, K., Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields, *J. Fac. Sc. Tokyo Sect. 1A Math.* 27(1980).
- [20] SERRE, J.P., *Groupes finis d'automorphismes d'anneaux locaux réguliers*, Colloque d'algèbre, Paris, 1967.
- [21] SHEPHARD, G.C., TODD, J.A., Finite unitary reflection groups, *Canad. J. Math.* 6(1954), 274-304.
- [22] SOLOMON, L., Invariants of finite reflection groups, *Nagoya Math. J.* 22(1963), 57-64.
- [23] SOLOMON, L., Invariants of Euclidean reflection groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* 113(1964), 274-286.
- [24] STANLEY, R.P., Invariants of finite groups and their applications to combinatorics, *Bull. Amer. Math. Soc.*, Vol. 1, No. 3 (1979), 475-511.
- [25] TERAOKA, H., Arrangements of hyperplanes and their freeness I, *J. Fac. Sc. Tokyo Sect. 1A* 27(1980), 293-320.
- [26] TERAOKA, H., Free arrangements of hyperplanes and unitary reflection groups, *Proc. of the Japan Acad.* vol. 56, Sec. A, no. 8 (1980), 389-392.

Université de Nantes, France
et
Université de Wuhan, Rép. pop. de Chine

Manuscrit reçu le 3 décembre 1984.
Revision le 6 avril 1987.