Ann. sc. math. Québec, 1988, vol. 12, no 1, pp. 31-53

UNE INTÉGRALE DE TYPE RIEMANN GÉNÉRALISÉE CONTENANT L'INTÉGRALE DE BIRKHOFF[1]

J. Dubois et A. M'Khalfi

Résumé

Dans ce travail on introduit une nouvelle définition pour l'intégration des fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un espace de Banach. Nous y arrivons en combinant deux approches différentes: une approche initiée par J. Kurzweil et R. Henstock basée sur la notion de jauge et une approche due à R.S. Phillips basée sur la notion de série approximativement inconditionnellement sommable. On établit les propriétés élémentaires de cette intégrale, un critère de Cauchy pour l'intégrabilité et on montre que cette intégrale contient l'intégrale de Birkhoff.

Abstract

We introduce a new definition for the integral of (Banach space) vector-valued functions defined on a subinterval of $\mathbb{R}$. Our approach consists of using a method introduced by J. Kurzweil and R. Henstock (which is itself based on the idea of gauge) in conjunction with a technique based on the notion of approximately unconditionally summable series due to R.S. Phillips. The basic properties of this integral are obtained along with a Cauchy type criterion for integrability and we show that our integral generalizes that of Birkhoff.

[1] Recherche subventionnée par le C.R.S.N.G. #A-8133 ainsi que par F.C.A.R. #EQ-1128.

1. Introduction

Le but principal de ce travail est d'introduire une nouvelle façon d'aborder l'intégration des fonctions à valeurs dans un espace de Banach (assez facilement généralisable aux fonctions à valeurs dans un espace localement convexe). Cette question a déjà été abordée depuis longtemps par de très nombreux auteurs, mais nous allons l'approcher d'un angle différent en combinant des idées que l'on retrouve dans une approche initiée par J. Kurzweil et R. Henstock pour l'intégration des fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}^n$ avec une approche due à R.S. Phillips pour l'intégration des fonctions définies sur un ensemble mesuré σ-fini à valeurs dans un espace localement convexe.

Déjà, dans le cadre des fonctions réelles définies sur un intervalle de la droite réelle il y a de très bonnes raisons pour chercher à combiner le support intuitif et la simplicité formelle de l'intégrale de Riemann (qui ne peut être définie que pour les fonctions bornées qui possèdent une certaine régularité sur un intervalle borné) avec la puissance de l'intégrale de Lebesgue. Assez récemment il a été découvert par J. Kurzweil [12], en 1957, et indépendamment par R. Henstock [6], en 1961, qu'une modification techniquement mineure mais conceptuellement très importante dans le procédé limite et dans le choix des partitions acceptables qui servent dans la définition des sommes de Riemann conduit à une intégrale ayant la portée et la puissance de l'intégrale de Lebesgue. Toute l'idée consiste à remarquer qu'une définition mieux adaptée que celle de Riemann doit forcer les partitions acceptables à être plus "fines" au voisinage des points où la fonction peut présenter des "pathologies" afin que les sommes de Riemann correspondantes épousent mieux la quantité qu'elles sont censées mesurer. C'est ce que permet la notion de jauge "variable" que nous rappellerons à la Section 2. Dans ce cadre l'intégrale de Riemann est obtenue en se restreignant au cas des jauges "constantes".

En 1957, Kurzweil n'utilisa cette intégrale que pour des besoins spécifiques dans l'étude des équations différentielles et il montra son équivalence avec l'intégrale de Perron. C'est la raison pour laquelle, imitant en cela Mawhin [15,16], nous appellerons cette intégrale la P-intégrale. Henstock qui fut le premier à développer en détail la P-intégrale l'appela l'intégrale de Riemann complète (d'autres auteurs l'appellent l'intégrale de Riemann généralisée). Il a de plus étendu la P-intégrale au cas des fonctions à plusieurs variables et a montré le résultat fondamental suivant: f est intégrable au sens de Lebesgue si et seulement si f et $\|f\|$ sont P-intégrables. Notons également que des notions abstraites plus générales de l'approche de Kurzweil-Henstock ont été données par Henstock lui-même [7,8,9,10], McShane [18,19], Kurzweil et al. [11],... Finalement signalons que le lecteur pourra consulter avec profit les livres de Mawhin [16], McLeod [17] et Kurzweil [14] pour retrouver les définitions précises, les résultats auxquels nous venons de faire allusion et un traitement systématique de l'intégration dans $\mathbb{R}^n$ utilisant cette approche.

D'un tout autre point de vue sont d'autres approches bien connues à l'intégration des fonctions à valeurs dans "un espace abstrait" qui étendent l'intégrale de Lebesgue. Nous pensons en particulier ici aux intégrales connues sous le nom de Riemann-Graves [5], de Bochner [2], de Dunford [4], de Birkhoff [1], de Pettis [20] (pour les fonctions à valeurs dans un espace de Banach) et de Phillips [21] pour les fonctions à valeurs dans un espace localement convexe. C'est Phillips [21] qui fut le premier à remarquer que dans toutes les définitions d'intégration "à la Lebesgue" se trouve un procédé de limite itérée. Ainsi, dans l'intégrale de Birkhoff, $(S,\mathcal{S},\mu)$ étant un espace mesuré σ-fini, X un espace de Banach, $f\colon S \to X$ une fonction, on associe à chaque partition dénombrable (ou finie) Δ de S en ensembles mesurables $\{E_i\}$ de mesure finie une famille de séries $\sum f(s_i)\mu(E_i)[s_i \in E_i]$ et on demande que chaque telle série soit inconditionnellement convergente (c'est-à-dire que tout réarrangement de la série converge vers le même élément de X, ce qui dans le cas $X = \mathbb{R}$ correspond à la convergence absolue). Ensuite l'ensemble des parties finies π de $\mathbb{N}$ et l'ensemble des Δ sont convertis de façon naturelle en ensembles dirigés et on considère essentiellement $\lim\limits_{\Delta} \lim\limits_{\pi} \sum\limits_{\pi} f(s_i)\mu(E_i)$, les limites étant comprises dans le sens à la Moore-Smith. Il est cependant possible de définir une telle limite itérée sans supposer l'existence de la limite à l'intérieur simplement en remplaçant lim lim par lim limsup et lim liminf. Ceci signifie que les sommes approximantes doivent être dans un certain sens seulement approximativement sommables et c'est ce qui a conduit Phillips à la notion d'inconditionnellement sommable relativement à $\varepsilon > 0$, notion centrale pour nous et que nous rappellerons à la Section 3.

Ayant signalé les idées essentielles dans ces approches à l'intégration: celle de jauge "variable" définie sur le domaine de définition de la fonction et celle de série "approximativement inconditionnellement sommable", nous allons, dans ce travail, montrer de quelle façon on peut développer une théorie de l'intégration qui s'appuie sur ces deux concepts. Pour cela nous allons nous placer dans le cadre le plus naturel au départ: le cas des fonctions définies sur un intervalle (non nécessairement borné) de la droite réelle et à valeurs dans un espace de Banach. Nous sommes conscients qu'il est possible d'étendre sans trop de complications la théorie au cas des fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans un espace localement convexe complet. D'ailleurs les preuves que nous allons présenter sont conçues dans cet esprit.

L'organisation du travail est simple. La Section 2 est consacrée à l'introduction des notions centrales que sont celles de jauge, de division étiquetée plus fine qu'une jauge donnée ainsi que de somme de Riemann formelle associée à une division étiquetée. On est ensuite conduit naturellement, en s'inspirant cette fois de l'idée de Phillips, à introduire la notion de fonction intégrable. C'est ce que nous faisons au début de la Section 3 et ensuite nous établissons les principales propriétés de base de l'intégrale: unicité, linéarité et intégrabilité des fonctions simples. Nous enchaînons ensuite en montrant que cette intégrale contient l'intégrale de Birkhoff telle qu'introduite dans [1] (Section 4), en présentant un critère de Cauchy pour l'intégrabilité (Section 5) et en considérant quelques exemples (Section 6).

Dans un autre travail [3] nous montrerons que l'intégrale possède toutes les bonnes propriétés habituellement désirées: celle de restriction, d'additivité, de continuité absolue et de σ-additivité. Nous établierons également certains théorèmes de convergence relatifs à cette intégrale et présenterons des applications de cette théorie aux séries et aux équations différentielles.

2. Divisions étiquetées et sommes de Riemann formelles

Les concepts à la base de l'approche initiée par Kurzweil et Henstock qui ont été présentés de façon intuitive au début de l'introduction sont abordés de façon rigoureuse dans cette section.

Soit S un intervalle de $\mathbb{R}$.

DÉFINITION 1. Une *division étiquetée* de S est une suite finie ou dénombrable $\mathcal{D} = \{(z_i, J_i);\ i = 1,2,\ldots\}$ où les z_i sont des points de S (appelés les étiquettes de $\mathcal{D}$), les J_i sont des intervalles bornés de $\mathbb{R}$ tels que

(i) $z_i \in J_i$, $i = 1,2,\ldots$

(ii) la suite $\{J_i\}_{i=1}^{\infty}$ forme une partition de S.

Cette notion est fortement inspirée de Henstock [6] pour qui les J_i sont en nombre *fini*, recouvrent S mais ne sont pas nécessairement disjoints (ils ont cependant, pris deux à deux, au plus un point en commun). Quant aux z_i ils appartiennent à la fermeture de J_i. D'une manière analogue, on aurait pu introduire une généralisation de la notion de division étiquetée dans le sens de McShane [18] et obtenir un autre type d'intégrale.

DÉFINITION 2. Une application $\gamma: S \to \tau_{\mathbb{R}}$ (où $\tau_{\mathbb{R}}$ désigne l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$) telle que $s \in \gamma(s)$, $\forall s \in S$, est dite une *jauge* sur S. Si γ_1 et γ_2 sont deux jauges de S on dira que γ_2 est *plus fine* que γ_1 si: $s \in S \Rightarrow \gamma_2(s) \subseteq \gamma_1(s)$; on écrira alors $\gamma_2 \geq \gamma_1$.

Cette terminologie est due à McShane [18]. Quant à la notion suivante, elle a été introduite par Kurzweil [12] et Henstock [6].

DÉFINITION 3. Une division étiquetée $\mathcal{D}$ sera dite *plus fine* qu'une jauge γ sur S (ou encore γ-fine) si: $(z,J) \in \mathcal{D} \Rightarrow J \subseteq \gamma(z)$.

Le théorème suivant est tout à fait essentiel. On le rencontre sous différentes formes dans la littérature. Ainsi McLeod [17] l'appelle le théorème de compatibilité et en donne une démonstration dans le cas où γ est une jauge sur $\overline{\mathbb{R}}$ (le compactifié de $\mathbb{R}$) et S est un intervalle fermé de $\overline{\mathbb{R}}$. Mawhin [16] de son côté y réfère comme étant le lemme de Cousin et l'énonce dans le cadre de ce qu'il appelle les P-partitions. Suite au commentaire qui suit la définition de division étiquetée que nous utilisons, nous avons jugé bon de formuler ce "lemme de Cousin" sous la forme qui nous est utile et nécessaire d'en présenter une démonstration.

THÉORÈME 1. *Soit* S *un intervalle de* $\mathbb{R}$. *Pour toute jauge* γ *sur* S, *il existe une division étiquetée de* S *plus fine que* γ.

DÉMONSTRATION. Supposons tout d'abord que $S = [a,b]$. Pour chaque $z \in S$, $\gamma(z)$ étant un ouvert contenant z, il existe $\delta(z) > 0$ tel que

$$\Delta z =]z-\delta(z),\ z+\delta(z)[\subseteq \gamma(z).$$

Soit alors $\{\Delta z_1, \Delta z_2, \ldots, \Delta z_n\}$ un recouvrement fini minimal de S où $z_1 < z_2 < \ldots < z_n$. Il est alors clair que $\Delta z_i \cap \Delta z_{i+2} = \emptyset$, $1 \le i \le n-2$ et $\Delta z_i \cap \Delta z_{i+1} \neq \emptyset$, $1 \le i \le n-1$. Posons $\alpha_0 = a$, $\alpha_n = b$ et pour $1 \le i \le n-1$ choisissons $\alpha_i \in \Delta z_i \cap \Delta z_{i+1}$ avec $\alpha_i > z_i$. Si on dénote $J_i = [\alpha_{i-1}, \alpha_i[$, $1 \le i \le n-1$, $J_n = [\alpha_{n-1}, \alpha_n]$, il est clair que $\mathcal{D} = \{(z_1,J_1), \ldots, (z_n,J_n)\}$ est une division étiquetée de S qui est plus fine que γ.

Supposons maintenant que $S = [a,b[$ où b peut être $+\infty$ (le cas où $S =]a,b]$ avec a pouvant être $-\infty$ se traite de façon analogue). On peut alors écrire S sous la forme $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, a_{n+1}]$, avec $a = a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots < b$. Il existe alors une division étiquetée $\mathcal{D}_1 = \{(z_1^1, J_1^1), \ldots, (z_{n_1}^1, J_{n_1}^1)\}$ de $[a_1,a_2]$ plus fine que γ sur $[a_1,a_2]$ et une division étiquetée $\mathcal{D}_2 = \{(z_1^2, J_1^2), \ldots, (z_{n_2}^2, J_{n_2}^2)\}$ de $[a_2,a_3]$ plus fine que γ sur $[a_2,a_3]$. Comme $a_2 \in J_{n_1}^1 \cap J_1^2$, $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ ne forme pas nécessairement une division étiquetée de

$[a_1,a_3]$. On peut remédier à cela. Si $z^1_{n_1} = z^2_1 = a_2$, il suffit de supprimer le dernier élément de $\mathcal{D}_1$ et de remplacer le premier élément de $\mathcal{D}_2$ par $(z^2_1,\hat{J}^2_1)$ où $\hat{J}^2_1 = J^1_{n_1} \cup J^2_1$ pour que la famille $\{(z^1_1,J^1_1),\ldots,(z^1_{n_1-1},J^1_{n_1-1}),(z^2_1,\hat{J}^2_1),(z^2_2,J^2_2),\ldots,(z^2_{n_2},J^2_{n_2})\}$ forme une division étiquetée de $[a_1,a_3]$ plus fine que γ. Reste le cas où $z^2_1 > a_2$. Prenons alors c tel que $a_2 < c < z^2_1$ et $[z_{n_1},c] \subset \gamma(z_{n_1})$ et posons $\hat{J}^1_{n_1} = J^1_{n_1} \cup [a_2,c[$, $\hat{J}^2_1 = [c,a_3] \cap J^2_1$. A nouveau il est clair que la famille $\{(z^1_1,J^1_1),\ldots,(z^1_{n_1-1},J^1_{n_1-1}),(z^1_{n_1},\hat{J}^1_{n_1}),(z^2_1,\hat{J}^2_1),(z^2_2,J^2_2),\ldots,(z^2_{n_2},J^2_{n_2})\}$ forme une division étiquetée de $[a_1,a_3]$ plus fine que γ. Ainsi, si on suppose que l'on a construit une division étiquetée de $[a_1,a_n]$, plus fine que γ, et une division étiquetée de $[a_n,a_{n+1}]$ également plus fine que γ; on revient pour modifier le dernier élément de la partition de $[a_1,a_n]$ et le premier élément de la partition de $[a_n,a_{n+1}]$ tout comme nous venons de le faire pour $[a_1,a_2]$ et $[a_2,a_3]$. Le résultat obtenu sera une division étiquetée de $[a_1,a_{n+1}]$ plus fine que γ. En continuant ainsi par récurrence on obtient le résultat désiré.

Supposons maintenant que $S =]a,b[$ où a ou b peuvent être $\pm\infty$. Soit $c \in]a,b[$. D'après ce que nous venons de faire il existe une division étiquetée $\mathcal{D} = \{(z_1,J_1),\ldots,(z_n,J_n),\ldots\}$ plus fine que γ sur $[c,b[$. De même il existe une division étiquetée $\mathcal{D}' = \{(z'_1,J'_1),\ldots,(z'_n,J'_n),\ldots\}$ plus fine que γ sur $]a,c]$. Prenons i_1 tel que $(z_{i_1},J_{i_1}) \in \mathcal{D}$ et $c \in J_{i_1}$ et i_2 tel que $(z'_{i_2},J'_{i_2}) \in \mathcal{D}'$ et $c \in J'_{i_2}$. Alors en procédant exactement comme nous venons tout juste de le faire, c'est-à-dire en distinguant les cas où $z_{i_1} = z'_{i_2} = c$ et $z'_{i_2} > c$, on forme facilement une division étiquetée de $]a,b[$ plus fine que γ. $\square$

DÉFINITION 4. Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Etant données une fonction $f\colon S \to X$ et $\mathcal{D} = \{(z_i,J_i),\ i = 1,2,\ldots\}$ une division étiquetée de S, la série formelle $\sum_i f(z_i)L(J_i)$ est appelée la *somme de Riemann formelle associée à* f *et à* $\mathcal{D}$.

Ici, comme dans la suite de tout ce travail, $L(J)$ dénote la longueur de l'intervalle J. D'ailleurs, de façon plus générale, si E est une partie mesurable de $\mathbb{R}$, $L(E)$ *désignera la mesure de Lebesgue de* E et nous noterons par $M(S)$

(simplement par $\mathcal{M}$ lorsqu'aucune confusion ne sera possible) la classe des ensembles mesurables de S.

REMARQUE. Lorsque $\mathcal{D}$ est une suite finie, la somme de Riemann définit un élément de X. Nous allons introduire dans la prochaine section (voir la Définition 6) une classe de fonctions sur S et à valeurs dans un espace de Banach X, que nous appelerons les fonctions intégrables, qui nous permettra, lorsque $\mathcal{D}$ est dénombrable, de pouvoir traiter ces sommes de Riemann formelles et, à l'aide de ces sommes, d'associer à f un élément de X, appelé l'intégrale de f sur S.

Il est très important de noter que c'est précisément dans ce point fondamental que notre approche se distingue de celle qui est adoptée par tous les auteurs qui abordent l'intégration suivant l'approche de Kurzweil-Henstock. Ils n'utilisent que des sommes de Riemann. Pour cette raison, lorsque S n'est pas borné, ils doivent emprunter l'une des deux approches suivantes qui s'avèrent équivalentes. Par exemple, si $S = [0,\infty[$, une première approche consiste à dire que f est intégrable sur S si f est intégrable sur $[0,a]$ pour tout $a > 0$ et si de plus $\lim_{a\to\infty} \int_{[0,a]} f$ existe. Une deuxième approche consiste à considérer S comme un sous-ensemble de $\overline{\mathbb{R}}$ et alors pour toute jauge sur $\overline{\mathbb{R}}$ il existe une division étiquetée $\{(z_i,J_i)\}$ de S qui est finie et γ-fine. Bien entendu il existe alors un des J_i qui n'est pas borné et dans ce cas on pose $L(J_i) = 0$ dans la somme de Riemann qui correspond à $\mathcal{D}$.

Dans notre approche nous n'aurons pas besoin de traiter de façon particulière le cas des intervalles non bornés ou ouverts ni, non plus, il nous sera nécessaire d'introduire une fonction d'intervalle qui assigne la valeur 0 aux intervalles non bornés. Nous allons conserver intacte la mesure de Lebesgue. Il sera alors clair que lorsque S est un intervalle compact toute fonction intégrable dans notre sens sera intégrable dans le sens de Kurzweil-Henstock et nous croyons que même dans le cas où $X = \mathbb{R}$, il n'y a pas équivalence entre ces deux classes.

3. Définition de l'intégrale et propriétés de base

Nous commençons par fixer des *notations* qui seront utilisées dans toute la suite de ce travail.

• X dénotera un espace de Banach réel ou complexe avec norme $\|.\|$,

• S, S', S_1, S_2 dénoteront des intervalles de $\mathbb{R}$,

• $\mathcal{D}, \mathcal{D}', \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ représenteront des divisions étiquetées de S et nous noterons toujours $\mathcal{D} = \{(z_i, J_i)\}$, $\mathcal{D}' = \{(z_i', J_i')\}$, $\mathcal{D}_1 = \{(z_i^1, J_i^1)\}$, etc.

• $\gamma, \gamma', \gamma_1, \gamma_2$ représenteront des jauges de S,

• D étant un ensemble dénombrable (ou fini), $\mathcal{F}(D)$ dénotera l'ensemble des parties finies de D, ordonné par inclusion et $\pi, \pi', \pi_1, \pi_2, \pi(D), \pi_1(D), \ldots$ représenteront des éléments de $\mathcal{F}(D)$. Le plus souvent D sera une division étiquetée $\mathcal{D}$ et ainsi lorsque nous écrirons $\pi \geq \pi(\mathcal{D})$, il sera implicite que $\pi \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$, $\pi(\mathcal{D}) \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ et que nous avons $\pi \supseteq \pi(\mathcal{D})$.

De même si D et D' sont deux ensembles dénombrables, on notera par $\pi(D,D')$, $\pi_1(D,D')$, ... des éléments de $\mathcal{F}(D) \times \mathcal{F}(D')$. Ainsi lorsque $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$ seront deux divisions étiquetées et que nous écrirons $(\pi_1, \pi_2) \geq \pi(\mathcal{D}', \mathcal{D}'')$, il sera implicite que $\pi(\mathcal{D}', \mathcal{D}'') = (\pi', \pi'')$ où $\pi' \in \mathcal{F}(\mathcal{D}')$, $\pi'' \in \mathcal{F}(\mathcal{D}'')$, $\pi_1 \in \mathcal{F}(\mathcal{D}')$, $\pi_2 \in \mathcal{F}(\mathcal{D}'')$ et que $\pi_1 \supseteq \pi'$, $\pi_2 \supseteq \pi''$.

• Etant donnée une fonction $f: S \to X$, la somme de Riemann formelle associée à f et à $\mathcal{D} = \{(z_i, J_i)\}$ sera notée

$$\sum_i f(z_i) L(J_i) = \sum_{\mathcal{D}} f(z) L(J) = \sum_{\mathcal{D}} f(\mathcal{D}).$$

D'autre part, si $\pi \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ il est clair que $\sum_\pi f(\mathcal{D})$ dénotera l'élément de X défini par $\sum_{k=1}^{n} f(z_{i_k}) L(J_{i_k})$ où les z_{i_k} et les J_{i_k} sont tels que $\pi = \{(z_{i_1}, J_{i_1}), \ldots, (z_{i_n}, J_{i_n})\}$.

• Enfin, si A est un sous-ensemble d'un espace topologique nous noterons comme à l'accoutumée par $\overline{A}$ la fermeture de A, par $\overset{\circ}{A}$ son intérieur, par ∂A sa frontière et par $\complement A$ le complémentaire de A.

DÉFINITION 5. Soit $\{x_i\}_{i\in D}$ une famille (finie ou dénombrable) d'éléments de X et $x_o \in X$. On dit que la série $\sum_{i\in D} x_i$ est *inconditionnellement sommable vers* x_o *relativement à* $\varepsilon > 0$, si: $\exists \pi_o \in F(D)$ tel que $\forall \pi \geq \pi_o$ on a $\|\sum_{i\in\pi} x_i - x_o\| < \varepsilon$.

En combinant les concepts de base dans l'approche de Kurzweil-Henstock avec cette dernière notion qui est inspirée de Phillips [21] nous en arrivons à la définition centrale de tout ce travail.

DÉFINITION 6. On dit qu'une fonction $f: S \to X$ est *intégrable sur* S s'il existe un $x_o \in X$ tel que $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\gamma$ une jauge sur S vérifiant la propriété suivante: pour toute division étiquetée $\mathcal{D}$ de S plus fine que γ, la série $\sum_{\mathcal{D}} f(z_i)L(J_i)$ est inconditionnellement sommable vers x_o relativement à ε. L'élément x_o de X est alors appelé l'*intégrale* de f sur S et est noté par $\int_S f$ (à la Proposition 2 nous établirons que l'intégrale est unique).

Par exemple, dans le cas où S est de mesure finie, on vérifie sans peine que si $x_o \in X$ et $f(s) = x_o$, $\forall s \in S$, alors f est intégrable sur S et son intégrale est $L(S)x_o$. Un autre exemple de fonction intégrable beaucoup moins trivial et très important est donné dans la proposition suivante.

Etant donné $E \subseteq \mathbb{R}$ et $x_o \in X$ la fonction $f: \mathbb{R} \to X$ définie par $f(s) = x_o$ si $s \in E$ et $f(s) = 0$ si $s \notin E$ sera, comme à l'accoutumée, notée $f = x_o\chi_E$.

PROPOSITION 1. *Soit* $E \subseteq \mathbb{R}$, *un sous-ensemble mesurable de mesure finie et soit* $x_o \in X$. *Alors la fonction* $f = x_o\chi_E$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}$ *et son intégrale est* $L(E)x_o$.

DÉMONSTRATION. Supposons tout d'abord que E est fermé et soit $\varepsilon > 0$. E étant mesurable $\exists\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite d'intervalles ouverts 2 à 2 disjoints dont la réunion recouvre E et telle que $\sum_n L(I_n \cap \complement E) < \varepsilon$. D'autre part, $\forall x \notin E$, $\exists I_x$ un intervalle ouvert contenant x tel que $I_x \cap E = \emptyset$. Définissons alors une jauge γ

sur $\mathbb{R}$ comme il suit: $\gamma(s) = I_n$ si $s \in E \cap I_n$, $\gamma(s) = I_s$ si $s \notin E$.

Soit $\mathcal{D} = \{(z_i, J_i)\}$ une division étiquetée de $\mathbb{R}$ qui est γ-fine. Pour $n = 1,2,\ldots$ posons $P_n = \{i \in N;\ z_i \in E \cap I_n\}$ (P_n peut être vide, fini ou dénombrable) et $\overline{P}_n = \{i \in N;\ J_i \cap I_n \neq \emptyset\}$. Observons que si $i \in P_n$ alors $J_i \subseteq I_n$ (de sorte que $P_n \subseteq \overline{P}_n$) et si $i \in \overline{P}_n - P_n$ alors $J_i \cap I_n \subseteq I_n \cap CE$. Par conséquent si on pose

$$A = \bigcup_n \bigcup_{i \in P_n} J_i, \qquad B = \bigcup_n \bigcup_{i \in \overline{P}_n - P_n} (J_i \cap I_n),$$

on a: $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \bigcup_n I_n$, $L(B) \leq \sum_n L(I_n \cap CE) < \varepsilon$ et donc: $|L(A) - L(E)| < 2\varepsilon$.

Maintenant choisissons un entier N et pour chaque $k = 1,2,\ldots,N$ choisissons une partie finie P_k^* de P_k telle que si on pose: $C = \bigcup_{k=1}^{N} \bigcup_{i \in P_k^*} J_i$ on ait $L(A) - L(C) < \varepsilon$ et par conséquent $|L(C) - L(E)| < 3\varepsilon$.

De sorte que si on définit $\pi(\mathcal{D}) = \{(z_i, J_i) \in \mathcal{D};\ i \in P_1^* \cup \ldots \cup P_N^*\}$, alors pour $\pi \geq \pi(\mathcal{D})$ on aura en posant $\pi_1 = \{(z_i, J_i) \in \pi - \pi(\mathcal{D});\ z_i \in E\}$:

$$\begin{aligned} \Big\|\sum_{\pi} f(\mathcal{D}) - x_o L(E)\Big\| &\leq \Big\|\sum_{\pi(\mathcal{D})} f(\mathcal{D}) - x_o L(E)\Big\| + \Big\|\sum_{\pi_1} f(\mathcal{D})\Big\| \\ &= \|x_o\|\,|L(C) - L(E)| + \|x_o\| \sum_{\pi_1} L(J_i) \leq 3\varepsilon\|x_o\| \\ &\quad + \|x_o\| \sum_{k \geq N+1} L(I_k) \leq 4\varepsilon\|x_o\|, \end{aligned}$$

ce qui montre que f est intégrable.

Soit maintenant $E \in \mathcal{M}$. Prenons $F \subseteq E$, F fermé tel que $L(E-F) < \varepsilon$. Posons $g = x_o\chi_F$, $h = f-g = x_o\chi_{E-F}$. Notons ici que même si $E-F$ n'est pas fermé, le fait que $L(E-F) < \varepsilon$ nous permet de s'assurer qu'une jauge γ définie convenablement pour $s \in E-F$ (utilisant la même idée que dans la première partie) et par $\gamma(s) = \mathbb{R}$ si $s \notin E-F$ sera telle que pour tout $\mathcal{D}$ γ_1-fine, $\forall \pi \in \mathcal{F}(D)$ on aura $\|\sum_{\pi} h(\mathcal{D})\| \leq \|x_o\|\varepsilon$.

Mais on sait que g est intégrable. Prenons γ_2 une jauge sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall \mathcal{D}$ γ_2-fine, $\sum_{\mathcal{D}} g(\mathcal{D})$ est inconditionnellement sommable vers $x_0 L(F)$ relativement à $4\varepsilon\|x_0\|$. Il est alors trivial de montrer que si on pose $\gamma(s) = \gamma_1(s) \cap \gamma_2(s)$ pour $s \in \mathbb{R}$, alors γ est une jauge sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall \mathcal{D}$ γ-fine, $\sum_{\mathcal{D}} f(\mathcal{D})$ est inconditionnellement sommable vers $x_0 L(E)$ relativement à $6\varepsilon\|x_0\|$. □

La Définition 6 est correcte en vertu de la proposition suivante:

PROPOSITION 2. *Si* f *est intégrable sur* S, *son intégrale est unique.*

DÉMONSTRATION. Supposons que x_1 et x_2 sont deux intégrales de f sur S. Soit $\varepsilon > 0$. Alors:

$\exists \gamma_1$ telle que $\forall \mathcal{D}_1$ γ_1-fine on a:

$\exists \pi_1(\mathcal{D}_1)$ vérifiant $\|\sum_{\pi} f(z_i^1)L(J_i^1) - x_1\| < \varepsilon/2$, $\forall \pi \geq \pi_1(\mathcal{D}_1)$

$\exists \gamma_2$ telle que $\forall \mathcal{D}_2$ γ_2-fine on a:

$\exists \pi_2(\mathcal{D}_2)$ vérifiant $\|\sum_{\pi} f(z_i^2)L(J_i^2) - x_2\| < \varepsilon/2$, $\forall \pi \geq \pi_2(\mathcal{D}_2)$.

Définissons la jauge γ sur S par $\gamma(z) = \gamma_1(z) \cap \gamma_2(z)$ et prenons $\mathcal{D}$ quelconque mais γ-fine. Il est alors clair que $\mathcal{D}$ est simultanément γ_1 et γ_2-fine. Donc en posant $\pi = \pi_1(\mathcal{D}) \cup \pi_2(\mathcal{D})$ on aura:

$$\|x_1 - x_2\| \leq \|x_1 - \sum_{\pi} f(z_i)L(J_i)\| + \|\sum_{\pi} f(z_i)L(J_i) - x_2\| \leq \varepsilon.$$

D'où $x_1 = x_2$. □

Des modifications évidentes dans cette dernière démonstration nous permettent d'obtenir deux propriétés essentielles de l'intégrale.

PROPOSITION 3. *Si* f *et* $\|f\|$ *sont intégrables sur* S, *on a* $\|\int_S f\| \leq \int_S \|f\|$.

PROPOSITION 4. *Si* f *et* g *sont intégrables sur* S, *alors* $f+g$ *et* λf *(*$\lambda \in \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*) sont aussi intégrables sur* S *et on a:* $\int_S (f+g) = \int_S f + \int_S g$, $\int_S (\lambda f) = \lambda \int_S f$.

4. Relation avec l'intégrale de Birkhoff

Nous montrons maintenant que notre intégrale contient l'intégrale de Birkhoff telle qu'introduite dans [1] (et par le fait même l'intégrale de Graves [5], de Bochner [2] et de Dunford [4]). Nous dirons que $\Delta = \{\sigma_i\}_{i=1}^{\infty}$ est une *subdivision* de S si Δ est une partition de S en sous-ensembles mesurables de mesure finie. Si f est intégrable au sens de Birkhoff sur S nous dirons simplement que f est B-intégrable et son intégrale de Birkhoff sera notée $(B)\int_S f$.

LEMME 1. *Supposons que* $f\colon S \to X$ *est intégrable au sens de Birkhoff sur* S. *Alors* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ *subdivision* $\Delta = \{\sigma_i\}_{i=1}^{\infty}$ *de* S *et* $\exists \pi_0 \in F(\mathbb{N})$ *tel que* $\pi \geq \pi_0 \Rightarrow \|\sum_{\pi} f(s_i)L(\sigma_i) - (B)\int_S f\| < \varepsilon$, $\forall (s_i) \in \Pi\sigma_i$.

DÉMONSTRATION. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition même, f étant B-intégrable, $\exists \Delta = \{\sigma_i\}$ une subdivision de S telle que:

(i) $\forall (s_i) \in \Pi\sigma_i$ on a $\sum f(s_i)L(\sigma_i)$ est inconditionnellement sommable,

(ii) l'ensemble $J_\Delta(f) = \overline{co}\{\sum f(s_i)L(\sigma_i);\ (s_i) \in \Pi\sigma_i\}$ (où $\overline{co}$ désigne l'enveloppe convexe fermée) est de diamètre $< \varepsilon/2$ et contient $(B)\int_S f$. En particulier on a donc $\|\sum f(s_i)L(\sigma_i) - (B)\int_S f\| < \varepsilon/2$, $\forall (s_i) \in \Pi\sigma_i$.

D'autre part $\exists \pi_0 \in F(\mathbb{N})$ tel que $\|\sum_{\pi} f(s_i)L(\sigma_i)\| < \varepsilon/2$, $\forall (s_i) \in \Pi\sigma_i$ et $\forall \pi \in F(\mathbb{N})$ tel que $\pi \cap \pi_0 = \emptyset$. (En effet, sinon $\exists \pi_1$ tel que $\pi_1 \cap \{1\} = \emptyset$, $\exists (s_{1i}) \in \Pi\sigma_i$ tel que $\|\sum_{\pi_1} f(s_{1i})L(\sigma_i)\| \geq \varepsilon/2$. De même $\exists \pi_2$ tel que $\pi_2 \cap (\pi_1 \cup \{1\}) = \emptyset$, $\exists (s_{2i}) \in \Pi\sigma_i$ tel que $\|\sum_{\pi_2} f(s_{2i})L(\sigma_i)\| \geq \varepsilon/2$, et ainsi de suite... Il est alors clair que la série $\sum_{k=1}^{\infty} (\sum_{\pi_k} f(s_{ki})L(\sigma_i))$ n'est pas convergente, ce qui contredit (i)). De là il est trivial de déduire le lemme. □

Nous aurons besoin d'un autre lemme élémentaire qui est en fait une petite modification du théorème 5 de [1]. Notons par $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}$, l'ensemble des parties non-vides et bornées de X. Pour $B \in \mathcal{B}$ nous noterons $co(B)$ (resp. $\overline{co}(B)$) l'enveloppe convexe (resp. l'enveloppe convexe fermée) de B et par $\|B\| = \sup\{\|x\|;\ x \in B\}$. On remarquera que pour tout $x \in X$, on a

$$\|B+x\| = \|co(B+x)\| = \|co(B) + x\|.$$

LEMME 2. *Soit* $N \in \mathbb{N}$, $K \in \mathbb{R}^+$, $\{c_k\}_{k=1}^N \subseteq \mathbb{R}$, $\{B_k\}_{k=1}^N \subseteq \mathcal{B}$, $\{b_{ok}\}_{k=1}^N \subseteq X$. *Supposons que* $0 \le c_k \le K$ *et* $b_{ok} \in B_k$ *pour* $1 \le k \le N$. *Alors*

$$\|\sum_{k=1}^N c_k B_k\| \le K(\|\sum_{k=1}^N B_k\| + \sum_{k=1}^N \|b_{ok}\|).$$

DÉMONSTRATION. Pour $1 \le k \le N$ soit $b_k \in B_k$, b_k quelconque. Alors:

$$\begin{aligned}\|\sum c_k b_k\| &= \|K \sum [(c_k/K)b_k + (1 - c_k/K)b_{ok}] - \sum (K-c_k)b_{ok}\| \\ &\le K\|\sum co(B_k)\| + K \sum \|b_{ok}\| = K\|co(\sum B_k)\| + K \sum \|b_{ok}\| \\ &= K(\| \sum B_k\| + \sum \|b_{ok}\|). \square\end{aligned}$$

THÉORÈME 2. *Si* $f: S \to X$ *est intégrable au sens de Birkhoff sur* S, *alors* f *est intégrable sur* S *et les deux intégrales coïncident.*

DÉMONSTRATION. Soit $\varepsilon > 0$. Utilisant le Lemme 1 et le fait que l'intégrale de Birkhoff est σ-additive, on peut choisir $\Delta = \{\sigma_i\}$ une subdivision de S et $\pi_o \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ tels que:

$$(1) \quad \|\sum_\pi f(\sigma_i)L(\sigma_i) - (B)\int_S f\| < \varepsilon/2 \quad \text{et} \quad \|\sum_\pi (B)\int_{\sigma_i} f - (B)\int_S f\| < \varepsilon/2,$$

$\forall \pi \ge \pi_o$.

Nous supposons tout d'abord que $L(\sigma_i) > 0$ pour tout i. Posons $N = \max\{i;\ i \in \pi_o\}$, $x_i = (B)\int_{\sigma_i} f$ pour $1 \le i \le N$ et $P_o = \{i \in \mathbb{N};\ 1 \le i \le N\}$. De (1) on tire immédiatement

$$(2) \quad \|\sum_{k\in P_o} (f(\sigma_k)L(\sigma_k) - x_k)\| < \varepsilon \quad \text{et}$$

$$(3) \quad \|\sum_P f(\sigma_i)L(\sigma_i)\| < \varepsilon \quad \text{pour tout } P \in \mathcal{F}(\mathbb{N}) \text{ tel que } P \cap P_o = \emptyset.$$

Maintenant définissons $\varphi: S \to X$ de la façon suivante:

$$\varphi(s) = \begin{cases} x_k/L(\sigma_k) & \text{si } s \in \sigma_k \text{ et } k \in P_o \\ 0 & \text{autrement.}\end{cases}$$

Alors φ est une fonction simple telle que

$$(4)\quad \|(B)\int_S f - (B)\int_S \varphi\| < \varepsilon \quad \text{(voir [1] théorème 18).}$$

De plus, φ étant simple, φ est également intégrable et son intégrale est $(B)\int_S \varphi$ (voir Propositions 1 et 4).

Prenons alors γ une jauge sur S telle que

(5) $\forall \mathcal{D}$ division étiquetée de S qui est γ-fine, $\exists \pi(\mathcal{D})$ tel que

$$\|\sum_\pi \varphi(\mathcal{D}) - (B)\int_S \varphi\| < \varepsilon, \quad \forall \pi \geq \pi(\mathcal{D});$$

(6) et on peut supposer que pour $s \in \sigma_k$ on a $\gamma(s) \subseteq I_{nk}$ où $s \in I_{nk} \cap \sigma_k$, $\{I_{nk}\}_{n=1}^{\infty}$ étant une suite d'intervalles ouverts 2 à 2 disjoints dont la réunion recouvre σ_k et qui est telle que $\sum_n L(I_{nk}) \leq 2L(\sigma_k)$.

Nous allons établir le théorème en montrant que $\forall \mathcal{D} = \{(z_i, J_i)\}$ γ-fine on a $\|\sum_\pi f(\mathcal{D}) - (B)\int_S f\| < 10\varepsilon$, pour $\pi \geq \pi(\mathcal{D})$. Or si $\pi \geq \pi(\mathcal{D})$ on a en posant pour chaque $k \in P_o$,

$$P_k = \{i \in \mathbb{N};\ (z_i, J_i) \in \pi \ \text{ et } \ z_i \in \sigma_k\}$$

et

$$P^* = \{i \in \mathbb{N};\ (z_i, J_i) \in \pi \ \text{ et } \ z_i \in \sigma_j \ \text{ pour un } \ j > N\}.$$

$$
\begin{aligned}
(7)\quad \|\sum_\pi f(\mathcal{D}) - (B)\int_S f\| &\leq \|\sum_\pi (f-\varphi)(\mathcal{D})\| + 2\varepsilon \quad \text{(par (4) et (5))}\\
&\leq \|\sum_{k\in P_o} (\sum_{i\in P_k} f(z_i)L(\sigma_k) - x_k)L(J_i)/L(\sigma_k))\|\\
&\quad + \|\sum_{P^*} f(z_i)L(J_i)\| + 2\varepsilon\\
&= \alpha + \beta + 2\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Or, pour chaque $k \in P_o$, on a $x_k \in \overline{co}(f(\sigma_k)L(\sigma_k))$ et on choisit alors $y_k \in co(f(\sigma_k)L(\sigma_k))$ tel que $\|x_k - y_k\| < \varepsilon/2^k$. De plus, si on pose $d_k = \sum_{i\in P_k} L(J_i)$ on a par (6) $d_k/L(\sigma_k) \leq 2$ et donc:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \|\sum_{k\in P_o} d_k/L(\sigma_k)[\sum_{i\in P_k} (L(J_i)/d_k)f(z_i)L(\sigma_k) - x_k]\|\\
&\leq \|\sum_{k\in P_o} d_k/L(\sigma_k)[co(f(\sigma_k)L(\sigma_k)) - x_k]\|
\end{aligned}
$$

$$\leq 2(\|\sum_{k\in P_o} [co(f(\sigma_k)L(\sigma_k)) - x_k]\| + \sum_{k\in P_o} \|y_k - x_k\|) \quad \text{(Lemme 2)}$$

$$\leq 2(\|\sum_{k\in P_o} f(\sigma_k)L(\sigma_k) - x_k\| + \varepsilon) \leq 4\varepsilon \quad \text{(par (2))}.$$

D'autre part si on définit $P_o^* \in F(\mathbb{N})$ par la condition:

$$\{z_i;\ i \in P^*\} \subseteq \cup\{\sigma_j;\ j \in P_o^*\},$$

il est clair que $P_o^* \cap P_o = \emptyset$ et que

$$\beta = \|\sum_{P^*} f(z_i)L(J_i)\| \leq \|\sum_{P_o^*} f(\sigma_j)L(\sigma_j)\ d_j/L(\sigma_j)\| \quad \text{où} \quad d_j/L(\sigma_j) \leq 2$$

$$\leq 4 \sup\|\sum_{k=1}^{r} f(\sigma_{j_k})L(\sigma_{j_k})\| \quad \text{(voir le théorème 8 de [1])}$$

$$\leq 4\varepsilon \quad \text{d'après (3)}.$$

Enfin, en revenant à (7), on a $\|\sum_{\pi} f(\mathcal{D}) - (B)\int_S f\| \leq 10\varepsilon$.

Maintenant si Δ contient des ensembles de mesure nulle on pose σ_o comme étant la réunion de tous ces ensembles de mesure nulle et on procède exactement comme ci-haut en tenant en plus compte que dans (6) on exigera de plus que pour $k = 0$ on ait $\sum_n L(I_{no}) \leq \varepsilon$ et que dans l'inégalité (7) un terme supplémentaire s'ajoute, à savoir $\|\sum_{\tilde{P}} f(z_i)L(J_i)\|$, où $\tilde{P} = \{i;\ (z_i,J_i) \in \pi \text{ et } z_i \in \sigma_o\}$. Mais f étant B-intégrable on peut supposer que f est bornée sur σ_o et donc ce terme supplémentaire ne cause aucun problème. □

5. Un critère d'intégrabilité

Il est très utile de posséder une autre définition de l'intégrale. A cette fin, nous introduisons les notions suivantes:

DÉFINITION 7. Soient $\{x_i\}_{i\in D}$ et $\{y_i\}_{i\in D'}$ deux familles d'éléments de X. On dit que les séries $\sum_{i\in D} x_i$ et $\sum_{i\in D'} y_i$ sont *inconditionnellement proches relativement à* $\varepsilon > 0$, si $\exists\pi(D,D') \in F(D) \times F(D')$ vérifiant:

$$(\pi_1,\pi_2) \geq \pi(D,D') \Rightarrow \| \sum_{i\in\pi_1} x_i - \sum_{i\in\pi_2} y_i \| < \varepsilon.$$

DÉFINITION 8. On dira que $f: S \to X$ est de *classe I* si: $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\gamma$ une jauge sur S telle que $\forall\ \mathcal{D},\mathcal{D}'$ des divisions étiquetées de S qui sont γ-fines on a que $\sum\limits_{\mathcal{D}} f(\mathcal{D})$ et $\sum\limits_{\mathcal{D}'} f(\mathcal{D}')$ sont inconditionnellement proches relativement à ε.

THÉORÈME 3 (Critère d'intégrabilité de Cauchy). *Soit* $f: S \to X$. *Alors* f *est intégrable sur* S *si et seulement si* f *est de classe I.*

DÉMONSTRATION. La nécessité est facile à établir. Supposons donc que f est de classe I. Pour $k = 1,2,3,\ldots$, soit γ_k une jauge sur S telle que $\forall\mathcal{D}',\ \mathcal{D}''$ γ_k-fines, $\exists\pi_k(\mathcal{D}',\mathcal{D}'')$ vérifiant:

$$(*) \qquad (\pi',\pi'') \geq \pi_k(\mathcal{D}',\mathcal{D}'') \Rightarrow \|\sum_{\pi'} f(\mathcal{D}') - \sum_{\pi''} f(\mathcal{D}'')\| < \frac{1}{2^k}.$$

Pour $k = 1,2,3,\ldots$, on peut toujours supposer que $\gamma_{k+1} \geq \gamma_k$, et on fixe $\mathcal{D}_k$ plus fine que γ_k. Alors $\mathcal{D}_{k+1}$ et $\mathcal{D}_k$ sont γ_k-fines et donc il existe $\pi_k(\mathcal{D}_k,\mathcal{D}_{k+1})$ vérifiant $(*)$. De plus, on peut supposer que $p_1(\pi_k(\mathcal{D}_k,\mathcal{D}_{k+1})) \supseteq p_2(\pi_{k-1}(\mathcal{D}_{k-1},\mathcal{D}_k))$ où p_1 et p_2 désignent respectivement les projections sur la première et la deuxième coordonnées.

Notons $\pi_{(k)} = p_1(\pi_k(\mathcal{D}_k,\mathcal{D}_{k+1}))$ et vérifions que la suite $\{\sum\limits_{\pi_{(k)}} f(\mathcal{D}_k)\}$ d'éléments de X est une suite de Cauchy. En effet si $n,m \in \mathbb{N}$, $n < m$, on a:

$$\begin{aligned} \|\sum_{\pi_{(n)}} f(\mathcal{D}_n) - \sum_{\pi_{(m)}} f(\mathcal{D}_m)\| &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \|\sum_{\pi_{(k)}} f(\mathcal{D}_k) - \sum_{\pi_{(k+1)}} f(\mathcal{D}_{k+1})\| \\ &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Posons $x_o = \lim\limits_k \sum\limits_{\pi_{(k)}} f(\mathcal{D}_k)$. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\gamma = \gamma_N$ où N est un entier choisi tel que

$$\frac{1}{2^{N-1}} < \varepsilon/2 \quad \text{et} \quad \|\sum_{\pi_{(k)}} f(\mathcal{D}_k) - x_o\| < \varepsilon/2 \quad \text{si} \quad k \geq N.$$

Alors pour tout $\mathcal{D}$ γ-fine on a que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_N$ sont γ_N-fines et il existe $\pi_N(\mathcal{D},\mathcal{D}_N)$ vérifiant (*). Alors si on pose $\pi^* = \pi_{(N)} \cup p_2(\pi_N(\mathcal{D},\mathcal{D}_N))$ on observe que pour $\pi \geq p_1(\pi_N(\mathcal{D},\mathcal{D}_N))$ on a $(\pi,\pi^*) \geq \pi_N(\mathcal{D},\mathcal{D}_N)$ et $(\pi^*,\pi_{(N+1)}) \geq \pi_N(\mathcal{D}_N,\mathcal{D}_{N+1})$. D'où pour $\pi \geq p_1(\pi_N(\mathcal{D},\mathcal{D}_N))$ on a:

$$\|\sum_{\pi} f(\mathcal{D}) - x_o\| \leq \|\sum_{\pi} f(\mathcal{D}) - \sum_{\pi^*} f(\mathcal{D}_N)\| + \|\sum_{\pi^*} f(\mathcal{D}_N) - \sum_{\pi_{(N+1)}} f(\mathcal{D}_{N+1})\|$$

$$+ \|\sum_{\pi_{(N+1)}} f(\mathcal{D}_{N+1}) - x_o\| < \frac{1}{2^N} + \frac{1}{2^N} + \varepsilon/2 < \varepsilon,$$

ce qui montre que f est intégrable sur S. □

6. Exemples

Ces propriétés de base tout à fait fondamentales étant établies examinons quelques exemples. Le but de ces exemples est de familiariser davantage le lecteur avec l'intégrale et d'en illustrer certaines autres particularités.

EXEMPLE 1. Soit $S = [0,1]$ et prenons X l'espace de Banach des fonctions sur S réelles bornées muni de la norme supremum usuelle. Définissons $f: [0,1] \to X$ par $f(s) = \chi_{[s,1]}$, la fonction indicatrice de $[s,1]$. Nous allons montrer que f est intégrable et que son intégrale est la fonction identité g sur $[0,1]$ définie par $g(s) = s$.

En effet, si $\pi = \{(z_i,J_i)_{i=1}^n\}$ est une partie finie d'une division étiquetée $\mathcal{D}$ de $[0,1]$ (où on suppose sans perte de généralité que $z_1 < z_2 < \ldots < z_n$) on a pour chaque $t \in [0,1]$:

$$|(\sum_{\pi} f(\mathcal{D}))(t) - t| = |\sum_{i=1}^{k} L(J_i) - t| \leq L(J_k) + L(A)$$

où k est choisi tel que $t \in [z_k,z_{k+1}[$ et où on a posé $z_o = 0$, $z_{n+1} = 1$ et $A = [0,1] - \bigcup_{i=1}^{n} J_i$. On peut donc écrire:

$$\|\sum_{\pi} f(\mathcal{D}) - g\| \leq \max_{1\leq k\leq n} L(J_k) + L(A).$$

Pour $\varepsilon > 0$ donné si on choisit la jauge $\gamma(s) =]s - \varepsilon/4, s + \varepsilon/4[$, on aura donc pour chaque $\mathcal{D}$ γ-fine:

$\|\sum_{\pi} f(\mathcal{D}) - g\| < \varepsilon$ pour tout $\pi \geq \pi(\mathcal{D})$ où $\pi(\mathcal{D})$ est une partie finie de $\mathcal{D}$ choisie telle que $L(\bigcup_{i\in\pi(\mathcal{D})} J_i) \geq 1 - \varepsilon/2$.

On notera que la même argumentation nous permet de vérifier que si $0 \leq a \leq b \leq 1$, alors f est également intégrable sur $[a,b]$ et on a $\int_{[a,b]} f = h$ où h est la fonction définie comme suit:

$$h(s) = 0 \quad \text{si} \quad 0 \leq s \leq a,$$

$$h(s) = s-a \quad \text{si} \quad a \leq s \leq b,$$

$$h(s) = b-a \quad \text{si} \quad b \leq s \leq 1.$$

Cet exemple fournit une illustration intéressante de propriétés que nous allons établir dans un autre travail [3], en particulier les propriétés de continuité absolue et de σ-additivité.

De plus, dans cet exemple, nous avons $\|f\|(s) = 1$, $s \in [0,1]$ et donc $\|f\|$ est également intégrable. Tel n'est pas le cas en général comme le montre l'exemple suivant.

EXEMPLE 2. Soit $S =]0,1[$ et X un espace de Hilbert séparable. Soit $\{e_n,\ n = 1,2,\ldots\}$ un système orthonormal complet de X et définissons $f: S \to X$ de la manière suivante:

$$f(s) = 2^n n^{-1} e_n \quad \text{si} \quad s \in]2^{-n}, 2^{-n+1}[$$

$$f(s) = 0 \quad \text{si} \quad s \text{ est de la forme } 2^{-n}.$$

Nous allons montrer que f est intégrable sur S, son intégrale étant $\sum_n n^{-1} e_n$, mais que $\|f\|$ n'est pas intégrable.

Soit $\varepsilon > 0$. Posons $I_n =]2^{-n}, 2^{-n+1}[$ et définissons γ une jauge sur $]0,1[$ comme suit:

$$\gamma(s) = I_n \quad \text{si} \quad s \in I_n$$
$$\gamma(s) =]2^{-n} - \varepsilon 2^{-(n+2)}, 2^{-n} + \varepsilon 2^{-(n+2)}[\quad \text{si} \quad s = 2^{-n}.$$

Observons alors que si $\mathcal{D} = \{(z_i, J_i)\}$ est γ-fine on a que chaque s de la forme 2^{-n} est nécessairement une étiquette de $\mathcal{D}$ et que si $2^{-n} = z_k$ alors $L(J_k) < \varepsilon/2^{n+1}$.

Soit donc $P_o, P_1, P_2, \ldots$ la partition de $\mathbb{N}$ définie de la façon suivante:

$P_o = \{k \in \mathbb{N};\ (z_k, J_k) \in \mathcal{D}$ et $z_k = 2^{-n}$ pour un certain $n\}$ et pour $j = 1,2,3,\ldots$ soit P_j la partie (finie ou dénombrable) de $\mathbb{N}$ définie par: $k \in P_j \iff J_k \subseteq I_j$. De plus pour chaque $j = 1,2,\ldots$, prenons π_j une partie finie de $\mathbb{N}$ telle que $0 \le 2^{-j} - \sum_{i \in \pi \cap P_j} L(J_i) \le \varepsilon 2^{-(j+1)}$ pour tout $\pi \ge \pi_j$.

Observons maintenant que si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont γ-fines et si P'_o, P'_j et π'_j dénotent les parties de $\mathbb{N}$ définies de façon analogue à P_o, P_j et π_j respectivement à l'aide de $\mathcal{D}'$ on aura pour π et π' des parties finies de $\mathbb{N}$ telles que $\pi \ge \pi_j$ et $\pi' \ge \pi'_j$:

$$\Big\| \sum_{i \in \pi \cap P_j} f(z_i) L(J_i) - \sum_{i \in \pi' \cap P'_j} f(z'_i) L(J'_i) \Big\|^2 = \Big\| 2^j j^{-1} e_j \Big(\sum L(J_i) - \sum L(J'_i)\Big)\Big\|^2 \le \varepsilon^2/j.$$

Exploitant le fait que $\{e_n\}$ est orthonormale il est maintenant trivial d'identifier un $\pi(\mathcal{D},\mathcal{D}') \in \mathcal{F}(\mathcal{D}) \times \mathcal{F}(\mathcal{D}')$ vérifiant:

$$\Big\| \sum_{\pi} f(\mathcal{D}) - \sum_{\pi'} f(\mathcal{D}') \Big\|^2 < \varepsilon^2(\pi^2/6) + 2\varepsilon, \qquad \forall (\pi,\pi') \ge \pi(\mathcal{D},\mathcal{D}')$$

ce qui montre que f est intégrable. On peut alors vérifier directement que $\int_S f = \sum n^{-1} e_n$, mais il est plus commode d'utiliser la σ-additivité de l'intégrale (qui sera établie dans [3]) pour obtenir ce résultat.

D'autre part $\|f(s)\| = 2^n n^{-1}$ si $s \in I_n$ et donc il est clair (à nouveau à l'aide de la σ-additivité) que $\|f\|$ n'est pas intégrable.

EXEMPLE 3. Cet exemple illustre le cas d'une fonction f telle que $\|f\|$ est intégrable mais f ne l'est pas.

Comme dans l'Exemple 1, prenons pour X l'espace des fonctions réelles bornées muni de la norme sup. Soit maintenant $f: [0,1] \to X$ définie par $f(s) = f_s$ où f_s est la fonction sur $[0,1]$ donnée comme suit: $f_s(t) = 1$ si $t \neq s$, $f_s(t) = -1$ si $t = s$.

On a alors $\|f(s)\| = 1$, $\forall s \in [0,1]$ et donc $\|f\|$ est intégrable.

D'autre part, si $\mathcal{D} = \{(z_i, J_i)\}_{i=1}^n$ et $\mathcal{D}' = \{(z_j', J_j')\}_{j=1}^m$ sont deux divisions étiquetées finies de $[0,1]$ on a en posant $\pi = \{i;\ \exists j$ tel que $z_i = z_j'\}$, $\pi' = \{j;\ \exists i$ tel que $z_j' = z_i\}$, $\pi_1 = \{1,\dots,n\} - \pi$, $\pi_1' = \{1,\dots,m\} - \pi'$:

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} f(z_i)L(J_i) - \sum_{j=1}^{m} f(z_j')L(J_j') \Big\|$$

$$= \max\{ \max_{i\in\pi, j\in\pi'} \{2|L(J_i) - L(J_j')|\}, \max_{i\in\pi_1} \{|1 - 2L(J_i)|\}, \max_{j\in\pi_1'} \{|1 - 2L(J_j')|\}\}$$

et de là il est trivial de montrer que pour toute jauge γ sur $[0,1]$ il est possible de trouver deux divisions $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ (même finies) qui sont γ-fines et telles que $\|\sum f(\mathcal{D}) - \sum f(\mathcal{D}')\| \geq \frac{1}{2}$, ce qui nous indique que f n'est pas intégrable.

Signalons en terminant que nous croyons que cette intégrale contient strictement l'intégrale de Birkhoff. Cependant, pour le moment, nous n'avons pas réussi à construire un tel exemple.

Références

[1] BIRKHOFF, G., Integration of functions with values in a Banach space, *Trans. Amer. Math. Soc.* 38(1935), 357-378.

[2] BOCHNER, S., Integration von Funktionen, deren Werte die Elemente eines Vektorraumes sind, *Fund. Math.* 20(1933), 262-270.

[3] DUBOIS, J., M'KHALFI, A., Propriétés et théorèmes de convergence pour une intégrale de type Riemann généralisée, A paraître.

[4] DUNFORD, N., Integration in general analysis, *Trans. Amer. Math. Soc.* 37(1935), 441-453.

[5] GRAVES, L.M., Riemann integration and Taylor's theorem in general analysis, *Trans. Amer. Math. Soc.* 29(1927), 163-177.

[6] HENSTOCK, R., Definitions of Riemann type of the variational integral, *Proc. London Math. Soc.* (3) 11(1961), 402-418.

[7] HENSTOCK, R., *Theory of Integration*, Butterworths, London, 1963.

[8] HENSTOCK, R., A Riemann-type integral of Lebesgue power, *Canad. J. Math.* 20 (1968), 79-87.

[9] HENSTOCK, R., *Linear Analysis*, Butterworths, London, 1968.

[10] HENSTOCK, R., Generalized integrals of vector-valued fonctions, *Proc. London Math. Soc.* (3) 19(1969), 509-536.

[11] JARNIK, J., KURZWEIL, J., SCHWABIK, S., On Mawhin's approach to multiple non-absolutely convergent integral, *Casopis pro pestovani matematiky*, roc. 108 (1983), 356-380.

[12] KURZWEIL, J., Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter, *Czechoslovak Math. J.* 7(82)(1957), 418-446.

[13] KURZWEIL, J., The Perron-Ward integral and related concepts, Appendice A, in: *Measure and Integral* (K. Jacobs), Academic Press, New-York, 1978.

[14] KURZWEIL, J., *Nichtabsolut konvergente Integrale*, Teubner, Leipzig, 1982.

[15] MAWHIN, J., Generalized multiple Perron integrals and the Green-Coursat theorem for differentiable vector fields, *Czechoslovak Math. J.* 31(106)(1981), 614-632.

[16] MAWHIN, J., *Introduction à l'analyse*, 4^{c} édition, Cabay, Louvain-la-Neuve, 1984.

[17] McLEOD, R.M., *The Generalized Riemann Integral*, Math. Association of America, Washington, 1980.

[18] McSHANE, E.J., A Riemann-type integral that includes Lebesgue-Stieljies, Bochner and stochastic integral, *Mem. Amer. Math. Soc.* 88(1969), 1-54.

[19] McSHANE, E.J., *Unified Integration*, Academic Press, 1983.

[20] PETTIS, B.J., On integration in vector spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* 44 (1938), 277-304.

[21] PHILLIPS, R.S., Integration in a convex linear topological space, *Trans. Amer. Math. Soc.* 47(1940), 114-145.

Département de mathématiques
et d'informatique
Faculté des sciences
Université de Sherbrooke
Sherbrooke, Québec, Canada J1K 2R1

Manuscrit reçu le 4 mars 1987.
Revisé le 25 mai 1987.