Ann. sc. math. Québec, 1988, vol. 12, no 1, pp. 5-30

MÉTHODE DE MANN ET CALCUL DES POINTS FIXES DES APPLICATIONS MULTIVOQUES DANS LES ESPACES DE BANACH

Jocelyn Desbiens

Sommaire

Nous étudions dans cet article une méthode itérative, de type "méthode de Mann", pour solutionner la relation

$$x_* \in H(x_*)$$

où $H: X \to 2^B$ est une application multivoque donnée, B un espace de Banach réel et X un sous-ensemble de B. En imposant des conditions sur X et H (mais par contre aucune sur B), nous parvenons à obtenir la convergence en norme de la suite des itérés $\{x_k\}_{k \in N}$ vers un point fixe de H.

Summary

In this paper, in order to solve the relation

$$x_* \in H(x_*)$$

where $H: X \to 2^B$ is a given set-valued map, B is a real Banach space, and X a subset of B, we study an iterative method of the "Mann's" type. Putting conditions on X and H, but none on B, will allow us to obtain convergence of the iterates sequence $\{x_k\}_{k \in N}$ toward a fixed point of the mapping H.

1. Introduction et bref historique

Plusieurs auteurs ont étudié et appliqué la méthode itérative de Mann [11] (ou une de ses variantes) dans le cadre des espaces de Banach ou, plus particulièrement, des espaces de Hilbert. Nous renvoyons le lecteur à la bibliographie pour de plus amples détails. L'idée de base est essentiellement d'approximer les points fixes d'une application donnée par des déplacements successifs le long de segments de droite judicieusement choisis. Moyennant certaines conditions sur l'application en question, on peut montrer que la suite de points engendrée par cette méthode converge vers un de ses points fixes, ou du moins qu'elle possède une sous-suite ayant cette propriété.

En fait, plusieurs méthodes ont été proposées pour résoudre, dans le cadre des espaces linéaires normés, l'équation

$$T(x_*) = x_*$$

où T est une application définie sur un sous-ensemble d'un espace de Banach donné. Celle qui est l'objet de cet article, notamment la méthode itérative de Mann, a pour origine un article de R. Mann, paru en 1953 [11] dans lequel celui-ci montrait que si une des suites $\{x_k\}_{k\in N}$, $\{\nu_k\}_{k\in N}$ définies par

$$(1) \qquad \begin{aligned} x_{k+1} &:= T(\nu_k) \\ \nu_k &:= \sum_{n=1}^{k} a_{k,n} x_k \end{aligned}$$

où $(a_{k,n})$ forme une matrice de Toeplitz, convergeait vers un point de l'espace, alors l'autre suite avait le même point limite, lequel était un point fixe de l'application T.

L'avantage immédiat de la méthode de Mann sur la méthode classique des itérés de Picard est qu'elle converge là où cette dernière diverge. Prenons comme exemple la rotation du disque unité dans le plan d'un angle de $\frac{\pi}{4}$ radian. Il est facile de voir dans ce cas que la suite des itérés de Picard ne converge pas, tandis que les suites de Mann définies par (1) convergent, quant à elles, vers l'origine, par ailleurs le seul point fixe de cette transformation.

Le premier résultat positif mettant en oeuvre la méthode itérative de Mann fut un théorème dû à Krasnoselskii [9]. Celui-ci, en 1955, démontrait que si C est un sous-ensemble convexe compact d'un espace de Banach uniformément convexe B et si $T: C \to C$ est lipschitzienne (de constante $L \leq 1$), c'est-à-dire que

$$\|T(x) - T(y)\| \leq L\|x-y\|$$

et ce, pour tout couple $(x,y) \in C^2$, alors la suite $\{x_k\}_{k\in N} \subset C$ définie par le schéma récursif suivant

$$x_{k+1} := \tfrac{1}{2}(x_k + T(x_k)) \tag{2}$$

converge vers un point fixe de l'application T. En 1957, Schaefer [15] étend le résultat de Krasnoselskii en démontrant que la suite $\{x_k\}_{k\in N}$ définie par le schéma suivant (plus général que le précédent)

$$x_{k+1} := (1-\lambda)x_k + \lambda T(x_k) \tag{3}$$

converge aussi vers un point fixe de l'application T, et ce, peu importe le choix du paramètre λ dans l'intervalle $]0,1[$. Il affaiblit aussi les conditions sur T pour obtenir la convergence. Le résultat de Schaefer fut ensuite étendu en 1966 par Edelstein [3] aux espaces de Banach strictement convexes. Browder et Petryshin [2] ont de plus démontré, en 1967, que si T est une application lipschitzienne et demi-compacte définie sur un convexe fermé borné d'un espace de Hilbert ou d'un espace strictement convexe, alors la méthode (3) engendre une suite d'itérés convergeant fortement vers un des points fixes de la transformation T.

D'autres méthodes furent proposées. Nous ne mentionnerons pour la forme que celles d'Opial [13], de Kaniel [7], d'Engl [4] et d'Ishikawa [6].

La méthode itérative de Mann se prête donc bien au calcul des points fixes des applications de type contractant, autant pour les transformations multivoques que pour les fonctions. Dans cet article, nous concentrerons nos efforts sur l'approximation des points fixes des applications multivalentes, c'est-à-dire que nous analyserons la relation

$$x_* \in H(x_*) \tag{4}$$

où

$$H\colon U \to 2^B$$

est une application, B un espace de Banach réel et U un sous-ensemble de B. Nous ne mettrons aucune restriction sur l'espace B.

Nous donnons à la section 3 la définition générale de l'algorithme considéré dans cet article (en fait, une version modifiée de la méthode de Mann). Les sections 4 et 5, quant à elles, seront dédiées à l'application de l'algorithme au calcul des points fixes des applications multivoques de type contractant. Quelques nouvelles définitions y seront présentées. Nous donnerons des exemples à la section 6.

2. Notations

Dans cet article, à moins d'avis spécifique du contraire, les notations suivantes seront toujours utilisées:

- B = espace de Banach réel;
- $I = [0,1]$;
- U = sous-ensemble convexe de B;
- K = sous-ensemble convexe compact de B;
- $H,G\colon X \to 2^B$, où $X \subset B$, des applications multivoques;
- $T\colon X \to B$, où $X \subset B$, une fonction;
- $\mathit{0}$ = origine de l'espace B.

Evidemment, un point fixe x_* d'une application H est un vecteur de l'espace B satisfaisant à la relation (4). Dans le cas où l'application est univoque, alors la relation (4) se réduit à l'équation

$$x_* = T(x_*).$$

3. Définition de l'algorithme et conditions nécessaires de convergence

DÉFINITION 3.1. Une *suite de couples* $\{(\alpha_k,\beta_k)\}_{k\in N}$ est une suite de paires ordonnées dont les éléments appartiennent à l'ensemble

$$\Omega = \{(\alpha,\beta) \in I^2 \mid 0 \le \alpha+\beta \le 1\}.$$

DÉFINITION 3.2. Soit U un sous-ensemble convexe (contenant l'origine O) d'un espace de Banach B, $H\colon U \to 2^B$ une application multivoque et $\{(\alpha_k,\beta_k)\}_{k\in N}$ une suite de couples. L'algorithme de base se décrit de la façon suivante:

1. choisir $x_0 \in U$;
2. poser $k := 0$;
3. si $H(x_k) \cap U = \emptyset$ alors poser $y_k := x_k$ sinon, choisir $y_k \in H(x_k) \cap U$;
4. si $y_k = x_k$ alors poser $x_{k+1} := x_k$ sinon, poser $x_{k+1} := \beta_x x_k + \alpha_k y_k$;
5. poser $k := k+1$ et retourner à l'étape (3).

LEMME 3.3. *Supposons que les conditions de la Définition 3.2 soient satisfaites. Alors* $\{x_k\}_{k\in N} \subset U$, *où* $\{x_k\}_{k\in N}$ *est la suite engendrée par l'algorithme de base.*

DÉFINITION 3.4. Nous dirons qu'une suite de couples $\{(\alpha_k,\beta_k)\}_{k\in N}$ est *essentiellement positive* s'il existe un nombre réel $\gamma > 0$ et un entier k tels que $\alpha_k \in [\gamma,1]$ dès que $k \ge k_\gamma$.

Nous dirons qu'une suite de couples $\{(\alpha_k,\beta_k)\}_{k\in N}$ est *rectifiée* si $\lim_{k\to\infty} \alpha_k+\beta_k = 1$.

EXEMPLE. • La suite de couples $\{(\frac{1}{2},0)\}_{k\in N}$ est essentiellement positive mais non rectifiée;

• la suite de couples $\{(\lambda_k,1-\lambda_k)\}_{k\in N}$ définie par

$$\lambda_k = \begin{cases} 0, & \text{si } k \text{ est pair} \\ \frac{1}{k}, & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

est rectifiée mais non essentiellement positive.

THÉORÈME 3.5. *Supposons que les conditions de la Définition 3.2 soient satisfaites. Si*

i) *la suite de couples* $\{(\alpha_k,\beta_k)\}_{k\in N}$ *est essentiellement positive et rectifiée;*

ii) $x_k \to x_* \in B$

alors la suite $\{y_k\}_{k\in N} \subset U$ *converge aussi vers* x_*.

PREUVE. Il y a deux cas à considérer:

$\boxed{(\exists \ell \in N)(\forall k \geq \ell)(y_k = x_k)}$.

De toute évidence, $y_k \to x_*$.

$\boxed{(\forall k \in N)(\exists \ell \geq k)(y_\ell \neq y_\ell)}$.

Alors

$$\begin{aligned} \|y_\ell - x_*\| &\leq \|y_\ell - x_\ell\| + \|x_\ell - x_*\| \\ &= \left\|\frac{x_{\ell+1} - \beta_\ell x_\ell}{\alpha_\ell} - x_\ell\right\| + \|x_\ell - x_*\| \\ &= \frac{1}{\alpha_\ell}\|x_{\ell+1} - (\alpha_\ell+\beta_\ell)x_\ell\| + \|x_\ell - x_*\| \\ &\leq \frac{1}{\gamma}\|x_{\ell+1} - (\alpha_\ell+\beta_\ell)x_\ell\| + \|x_\ell - x_*\| \end{aligned}$$

ce qui est arbitrairement petit dès que ℓ est suffisamment grand. Si, par contre, $y_k = x_k$, alors $\|y_k - x_*\| = \|x_k - x_*\|$, expression qui est elle aussi arbitrairement petite dès que croît l'indice k.

Dans tous les cas on a que $y_k \to x_*$. □

4. Application aux transformations multivoques

Des deux définitions suivantes, la première est due à Berge [1] alors que la seconde provient de Nussbaum [12]. Ici, l'expression $d(.,.)$ signifie la distance usuelle dans B, c'est-à-dire que

$$d(x,A) := \inf\{\|x-a\| \mid a \in A\}$$

$$d(A,B) := \inf\{\|a-b\| \mid a \in A, \ b \in B\} = \inf\{d(a,B) \mid a \in A\}.$$

On pose de plus $d(x,\emptyset) := d(\emptyset,B) := d(A,\emptyset) := \infty$.

DÉFINITION 4.1. • Soit X et K deux sous-ensembles d'un espace de Banach B $(X \neq \emptyset)$ et $H: X \to 2^B$ une application multivoque.

• On dit que H est *semi-continue supérieurement en* x_* si, pour tout ouvert V contenant $H(x_*)$, il existe un voisinage (relatif) $U(x_*)$ de x_* tel que: $x \in U(x_*) \Longrightarrow H(x) \subset V$;

• on dit que H est *quasi-contractante par rapport à* K si, pour tout $x \in X$, on a: $d(H(x) \cap X, K) \leq d(x,K)$ (n.b.: si $K \neq \emptyset$, alors $H(x) \cap X \neq \emptyset$, $\forall x \in X$).

NOTATION. Soit $X, K \subset B$, B un espace de Banach donné, et $H: X \to 2^B$ une application. Pour tout $x \in X$, nous poserons

$$H_K(x) := \{y \in H(x) \cap X \mid (\exists z \in K)(\|y-z\| = d(H(x) \cap X, K))\}.$$

Evidemment, il se peut que $H_K(x)$ soit vide.

Soit $\{(\alpha_k,\beta_k)\}_{k\in N}$ une suite de couples. Pour tout $k \in N$, nous poserons $\rho_k := \alpha_k + \beta_k$.

LEMME 4.2. *Soit* U *un sous-ensemble convexe (contenant l'origine* O*) d'un espace de Banach* B, $\{(\alpha_k,\beta_k)\}_{k\in N}$ *une suite de couples et* $H: U \to 2^B$ *une application telle que*

i) H *est quasi-contractante par rapport à un convexe compact* K *de* B *(contenant l'origine* O*);*

ii) $(\forall x \in U)(H_k(x) \neq \Phi)$.

Soit de plus la suite $\{x_k\}_{k\in N}$ *définie par l'algorithme de base et sujette à la condition supplémentaire suivante:*

iii) $(\forall k \in N)(y_k \in H_K(x_k))$.

L'inégalité suivante est alors toujours vraie, pour tout $k \in N$:

$$d(x_{k+1},K) \leq \begin{cases} d(x_k,K), & y_k = x_k \\ \rho_k d(x_k,K), & y_k \neq x_k. \end{cases}$$

PREUVE. Il y a deux cas à considérer:

$\boxed{y_k = x_k}$.

Dans ce cas, $x_{k+1} = x_k$ et $d(x_{k+1},K) = d(x_k,K) \leq d(x_k,K)$.

$\boxed{y_k \neq x_k}$.

Par hypothèse de compacité sur K, on peut trouver un $x_* \in K$ tel que

$$\|x_k - x_*\| = d(x_k,K).$$

Par le choix même du point y_k dans $H(x_k) \cap U$, on peut trouver un y_* dans K tel que

$$\|y_k - y_*\| = d(H(x_k) \cap U, K).$$

Posons $\omega_k := \beta_k x_* + \alpha_k y_*$. Parce que l'ensemble K est convexe et contient l'origine, alors $\omega_k \in K$. Donc,

$$\begin{aligned} d(x_{k+1},K) &\leq d(x_{k+1},\omega_k) \\ &= \|x_{k+1} - \omega_k\| \\ &= \|\beta_k(x_k - x_*) + \alpha_k(y_k - y_*)\| \\ &\leq \beta_k\|(x_k - x_*)\| + \alpha_k\|(y_k - y_*)\| \\ &= \beta_k d(x_k,K) + \alpha_k d(H(x_k) \cap U, K) \\ &\leq \beta_k d(x_k,K) + \alpha_k d(x_k,K) \\ &= \rho_k d(x_k,K). \;\square \end{aligned}$$

LEMME 4.3. *Soit* U, H, K, $\{(\alpha_k,\beta_k)\}_{k\in N}$, $\{x_k\}_{k\in N}$ *définis comme au Lemme* 4.2. *Supposons de plus que*

i) $(\forall k \in N)(y_k \neq x_k)$;

ii) *la suite* $\{(\alpha_k,\beta_k)\}_{k\in N}$ *est telle que*

$$\prod_{i=0}^{k} \rho_i \to 0.$$

Il existe alors une sous-suite $\{x_{k_j}\}_{j\in N}$ *de la suite de base* $\{x_k\}_{k\in N}$ *et un point* x_* *dans* K *tels que:* $x_{k_j} \to x_*$.

PREUVE. Pour chaque $k \in N$, soit z_k un point de K tel que

$$\|x_k - z_k\| = d(x_k,K).$$

Par la compacité de l'ensemble K, un tel choix est toujours possible. Appliquant le lemme précédent, on obtient que

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - z_{k+1}\| &= d(x_{k+1},K) \\ &\le \rho_k d(x_k,K) \\ &= \rho_k \|x_k - z_k\| \end{aligned}$$

donc que

$$\|x_{k+1} - z_{k+1}\| \le \left(\prod_{i=0}^{k} \rho_i\right)\|x_o - z_o\|.$$

Comme, par hypothèse, $\prod_{i=0}^{k} \rho_i \to 0$ alors $\|x_k - z_k\| \to 0$. Or $\{z_k\}_{k\in N} \subset K$. Par compacité de K, on peut extraire de cette suite une sous-suite convergente, disons $\{z_{k_j}\}_{j\in N}$. Notons par x_* sa limite dans K. Alors

$$\|x_{k_j} - x_*\| \le \|x_{k_j} - z_{k_j}\| + \|z_{k_j} - x_*\|$$

c'est-à-dire que $\|x_{k_j} - x_*\| \to 0$ lorsque $j \to \infty$. Par conséquent, $x_{k_j} \to x_* \in K$.

La question que l'on pourrait poser maintenant est: existe-t-il une suite de couples $\{(\alpha_k,\beta_k)\}_{k\in N}$ ayant les propriétés requises pour satisfaire les conditions du Théorème 3.5 et des Lemmes 4.2 et 4.3? La réponse est oui, et est donnée par l'exemple suivant.

EXEMPLE. Soit $\alpha > 1$ un nombre réel. La suite de couples $\{(\alpha_k,\beta_k)\}_{k\in N}$, dont la définition apparaît ci-dessous, est:

$$\alpha_k := \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{\alpha}, \quad \beta_k := \left(\frac{1}{k+2}\right)^{\alpha}, \qquad \forall k \in N$$

. essentiellement positive;

. rectifiée;

. telle que $\lim_{k\to\infty} \prod_{i=0}^{k} \rho_k = 0$.

Nous suivons la terminologie de Halpern [5] en ce qui a trait à la prochaine définition.

DÉFINITION 4.4. Toute suite de couples $\{(\alpha_k,\beta_k)\}_{k\in N}$ ayant les propriétés mentionnées à l'exemple précédent sera désignée sous le vocable: *suite acceptable de couples.*

THÉORÈME 4.5. *Soit* U *un sous-ensemble convexe fermé (contenant l'origine* 0*) d'un espace de Banach* B, K *un convexe compact (contenant l'origine* 0*) de* B *et* $H: U \to 2^B$ *une application. Si*

i) $H(.) \cap U$ *est semi-continue supérieurement dans* U;

ii) $(\forall x \in U)(H(x) \cap U$ *est compact*$)$;

iii) $(\forall x \in U)(\forall z \in K)(d(H(x) \cap U, z) \le d(x,z))$;

iv) *la suite de couples* $\{(\alpha_k,\beta_k)\}_{k\in N}$ *est acceptable;*

v) *les suites* $\{x_k\}_{k\in N}$, $\{y_k\}_{k\in N}$ *et* $\{z_k\}_{k\in N}$ *sont définies comme aux Lemmes* 4.2 *et* 4.3;

vi) *la suite* $\{x_k\}_{k\in N} \subset U$ *est constante dès que* $y_\ell = x_\ell$, *pour un certain* $\ell \in N$ *(si jamais un tel indice existe);*

il existe alors une sous-suite $\{x_{k_j}\}_{j\in N}$ *de la suite de base* $\{x_k\}_{k\in N}$ *et un point* $x_* \in U$ *tels que* $x_{k_j} \to x_* \in H(x_*)$. *Si, de plus,* $y_k \neq x_k$, $\forall k \in N$, *alors* $x_* \in U \cap K$.

PREUVE. Montrons tout d'abord que H est quasi-contractante par rapport au convexe compact K. Notons par z_x un point de K tel que

$$d(x,z_x) = \inf\{\|x-z\| \mid z \in K\}.$$

Par compacité de K, un tel z_x existe toujours. Alors

$$\begin{aligned} d(H(x) \cap U, K) &= \inf\{\|y-z\| \mid y \in H(x) \cap U; \quad z \in K\} \\ &\leq \inf\{\|y-z_x\| \mid y \in H(x) \cap U\} \\ &= d(H(x) \cap U, z_x) \\ &\leq d(x,z_x) \\ &= \inf\{\|x-z\| \mid z \in K\} \\ &= d(x,K). \end{aligned}$$

Etudions maintenant la suite de base $\{x_k\}_{k\in N} \subset U$. Il y a deux cas à considérer:

$\boxed{(\exists \ell \in N)(y_\ell = x_\ell)}$.

Posons $x_* := x_\ell$. Evidemment, $x_* \in U$. L'hypothèse (vi) entraîne que $x_k \to x_*$. De plus l'hypothèse (ii) amène que $x_* = y_\ell \in H_K(x_\ell) \subset H(x_\ell) \cap U \subset H(x_\ell) = H(x_*)$.

$\boxed{(\forall k \in N)(y_k \neq x_k)}$.

Appliquons le Lemme 4.3. On peut alors trouver une sous-suite $\{x_{k_j}\}_{j\in N}$ de la suite de base $\{x_k\}_{k\in N}$ et un point $x_* \in U \cap K$ (car U est fermé par hypothèse) tels que

$$x_{k_j} \to x_*.$$

Reprenant la preuve du Lemme 4.3, on a de plus que

$$(5) \qquad \begin{aligned} &z_{k_j} \to x_* \\ &\|x_{k_j} - z_{k_j}\| \to 0. \end{aligned}$$

Faisons maintenant l'hypothèse que x_* ne soit pas dans l'ensemble $H(x_*) \cap U$. Par compacité des ensembles $H(x_*) \cap U$ et $\{x_*\}$, on peut trouver deux ouverts disjoints O et V tels que: $x_* \in O$ et $H(x_*) \cap U \subset V$. En prenant O de diamètre suffisamment petit, on peut faire en sorte que

$$\rho := \inf\{\|x-y\| \mid x \in O; \quad y \in V\}$$

soit strictement positif. Par semi-continuité supérieure de l'application $H(.) \cap U$ dans U, on peut trouver un voisinage O' de x_* dans B tel que

$$x \in O' \cap U \Rightarrow H(x) \cap U \subset V.$$

Posons

$$W := O \cap O'.$$

W est un voisinage du point x_* dans B. Comme $x_{k_j} \to x_*$ et $z_{k_j} \to x_*$, alors x_{k_j} et z_{k_j} sont dans W dès que l'indice j est suffisamment grand. On a ainsi pour cet ensemble d'indices que

$$x_{k_j}, z_{k_j} \in W \subset O \quad \text{et} \quad H(x_{k_j}) \cap U \subset V.$$

Or l'hypothèse (ii) amène que $d(H(x_{k_j}) \cap U, z_{k_j}) \leq d(x_{k_j}, z_{k_j})$. Mais, par la relation (5), $d(x_{k_j}, z_{k_j}) \to 0$, c'est-à-dire que $d(H(x_{k_j}) \cap U, z_{k_j}) \to 0$. Finalement,

$$\begin{aligned} 0 &< \rho \\ &= \inf\{\|x-y\| \mid x \in O;\ y \in V\} \\ &\leq \inf\{\|x-y\| \mid x \in W;\ y \in V\} \\ &\leq \inf\{\|z_{k_j}-y\| \mid y \in V\} \\ &\leq \inf\{\|z_{k_j}-y\| \mid y \in H(x_{k_j}) \cap U\} \\ &= d(H(x_{k_j}) \cap U, z_{k_j}). \end{aligned}$$

La suite $\{d(H(x_{k_j}) \cap U, z_{k_j})\}_{j \in N}$ ne peut donc converger vers zéro. Contradiction. Donc $x_* \in H(x_*) \cap U \subset H(x_*)$.

5. Application aux processus de Mann

DÉFINITION 5.1. Soit U un sous-ensemble convexe (contenant l'origine O) d'un espace de Banach B, $H: U \to 2^B$ une application, x_o, p deux points de U et $\alpha \geq 0$ un nombre réel. Notons $M := (\{x_k\}_{k \in N}, \{y_k\}_{k \in N})$ et $M' := (\{x'_k\}_{k \in N}, \{y'_k\}_{k \in N})$, deux suites de Mann associées respectivement aux applications H et $H(.)-p$ (ici, $y'_k - p \in H(x'_k)-p$), ces suites ayant toutes deux le "germe" commun x_o. Nous dirons que $(M,M';H,U,x_o,p;\alpha)$ est la donné d'un *processus* *de Mann* si

$$\|y_k - y_k'\| \le \alpha\|x_k - x_k'\|, \qquad \forall k \in N.$$

EXEMPLE. •Soit $T: U \to B$ une fonction et $p = O$. Alors $(M,M';T,U,x_o,O;\alpha)$ est un processus de Mann, $\forall M,M'$; $\forall x_o \in U$; $\forall \alpha \ge 0$. En effet, il est facile de voir que $y_k = y_k'$, $\forall k \in N$.

•Soit $T: U \to U$ une application lipschitzienne de constante L. Alors $(M,M';T,U,x_o,p;L)$ est un processus de Mann, $\forall M,M'$; $\forall x_o,p \in U$.

LEMME 5.2. *Soit* X *un ensemble non vide d'un espace de Banach* B, p *un point de* B *et* $H: X \to 2^B$ *une application. Posons* $X' := X-p$ *et supposons que*

i) H *soit quasi-contractante par rapport à l'ensemble* $K := \{p\}$.

Définissons $G: X' \to 2^B$ *par la formule:*

$$G(x'-p) := H(x')-p$$

et ce, $\forall x' \in X$. *Alors*

a) $(\forall x' \in X)((H(x')-p) \cap X' = H(x') \cap X-p)$;

b) G *est quasi-contractante par rapport au convexe compact* $K' := \{O\}$.

PREUVE. Nous ne ferons la preuve que pour la partie (b).

$$\begin{aligned} d(G(x'-p) \cap X', K') &= \inf\{\|y-O\| \mid y \in G(x'-p) \cap X'\} \\ &= \inf\{\|y\| \mid y \in (H(x')-p) \cap X')\} \\ &= \inf\{\|y\| \mid y \in H(x') \cap X-p\} \\ &= \inf\{\|y'-p\| \mid y' \in H(x') \cap X\} \\ &= d(H(x') \cap X, K) \\ &\le d(x',K) \\ &= \|x'-p\| \\ &= d(x'-p,K'). \;\square \end{aligned}$$

LEMME 5.3. *Soit* $\{\lambda_k\}_{k\in N}$, $\{\alpha_k\}_{k\in N}$ *deux suites de l'ensemble* I *et* $\alpha \in I$ *un nombre réel. Supposons que ces deux suites possèdent les propriétés suivantes:*

i) $\lambda_o = 0$;

ii) $(\forall k \in N)(\lambda_{k+1} \leq 1 - \alpha_k + \alpha\lambda_k\alpha_k)$.

Posons $\theta_k := \alpha\lambda_k\alpha_k$, $\forall k \in N$. *Alors,* $\forall k \in N$, *l'inégalité suivante est vraie:*

$$\theta_k \leq \sum_{j=1}^{k} \left\{(1-\alpha_{k-j}) \prod_{i=k-j+1}^{k} \alpha_i\right\}\alpha^j.$$

PREUVE. La preuve sera faite par récurrence sur k. Pour $k = 0$, il n'y a rien à montrer car $\theta_o = \alpha\lambda_o\alpha_o = 0$. Supposons maintenant que l'inégalité soit vraie pour $k \geq 0$. Montrons qu'elle est alors aussi vraie pour $k+1$. On a que

$$\begin{aligned}
\theta_{k+1} &= \alpha\lambda_{k+1}\alpha_{k+1} \\
&\leq \alpha(1-\alpha_k+\theta_k)\alpha_{k+1} \\
&= (1-\alpha_k)\alpha_{k+1}\alpha + \alpha\theta_k\alpha_{k+1} \\
&\leq (1-\alpha_k)\alpha_{k+1}\alpha + \alpha\left\{\sum_{j=1}^{k}\left\{(1-\alpha_{k-j}) \prod_{i=k-j+1}^{j} \alpha_i\right\}\alpha^j\right\}\alpha_{k+1} \\
&= (1-\alpha_k)\alpha_{k+1}\alpha + \sum_{j=1}^{k}\left\{(1-\alpha_{k-j}) \prod_{i=k-j+1}^{k} \alpha_i\alpha_{k+1}\right\}\alpha^{j+1} \\
&= (1-\alpha_k)\alpha_{k+1}\alpha + \sum_{j=2}^{k+1}\left\{(1-\alpha_{k+1-j}) \prod_{i=k+1-j+1}^{k+1} \alpha_i\right\}\alpha^j \\
&= \sum_{j=1}^{k+1}\left\{(1-\alpha_{k+1-j}) \prod_{i=k+1-j+1}^{k+1} \alpha_i\right\}\alpha^j. \quad \square
\end{aligned}$$

THÉORÈME 5.4. *Soit* U *un sous-ensemble convexe fermé (contenant l'origine* O*) d'un espace de Banach* B, p *un point de* U, $H: U \to 2^B$ *une application et* $\alpha \in I$. *Si*

i) $(\forall x \in U)(H(x) \cap U$ *est compact*);

ii) H *est quasi-contractante par rapport à l'ensemble* $K := \{p\}$;

alors p *est un point fixe de* H, *c'est-à-dire que*

$$p \in H(p).$$

Si, de plus,

iii) p *est de norme minimale dans l'ensemble des points fixes de* H,

c'est-à-dire que: $x_* \in H(x_*) \Rightarrow \|x_*\| \geq \|p\|$;

iv) *la suite de couples* $\{(\alpha_k,\beta_k)\}_{k\in N}$ *est acceptable avec* $\alpha_k \to 1$ *(un exemple d'une telle suite est donné à l'exemple suivant le Lemme 4.3);*

v) *les suites* $\{x_k\}_{k\in N}$ *et* $\{y_k\}_{k\in N}$ *sont définies comme au Lemme 4.2;*

vi) *la suite* $\{x_k\}_{k\in N}$ *est constante dès que* $y_\ell = x_\ell$, *pour un certain* $\ell \in N$ *(si jamais un tel indice existe);*

vii) $(M,M';H,U,x_0,p;\alpha)$ *est un processus de Mann;*

alors, tout dépendant de la valeur du paramètre α, *les conclusions suivantes sont vraies:*

$\boxed{\alpha < 1}$.

La suite $\{x_k\}_{k\in N}$ *donnée par l'algorithme de base converge vers un point fixe* x_* *de l'application* H.

$\boxed{\alpha = 1}$.

Au moins une des conditions suivantes est vraie:

. *la suite* $\{x_k\}_{k\in N}$ *donnée par l'algorithme de base converge vers un point fixe* x_* *de l'application* H;

. *il existe un point fixe* x_* *de l'application* H *ayant la propriété que, pour chaque* $\varepsilon > 0$, *on peut trouver un nombre* $k_\varepsilon \in N$ *tel que* $x_k \in B(x_*;\|x_*\|+\varepsilon) \cap U$, *dès que* $k \geq k_\varepsilon$. *Ici* $B(x;\rho) := \{y \in B \mid d(x,y) < \rho\}$.

PREUVE. Montrons premièrement que l'ensemble des points fixes de H est non vide. Une des hypothèses veut que p soit dans U. Mais $d(H(p) \cap U, K) = d(H(p) \cap U,\{p\}) \leq d(p,\{p\}) = 0$, c'est-à-dire que, l'ensemble $H(p) \cap U$ étant compact, donc fermé, $p \in H(p) \cap U \subset H(p)$.

Montrons maintenant que les conditions recherchées sont satisfaites. A cet effet, considérons la suite de base $\{x_k\}_{k\in N} \subset U$ ayant x_0 comme "germe". Deux cas peuvent se présenter:

$\boxed{(\exists \ell \in N)(y_\ell = x_\ell)}$.

Posons $x_* := x_\ell$. Evidemment, $x_* \in U$. L'hypothèse (vi) entraîne que $x_k \to x_*$. De plus, l'hypothèse (i) amène que $x_* = y_\ell \in H(x_\ell) \cap U \subset H(x_\ell) = H(x_*)$. La première condition du cas $\boxed{\alpha = 1}$ est donc vérifiée. Elle est aussi vraie dans le cas $\boxed{\alpha < 1}$.

$\boxed{(\forall k \in N)(y_k \neq x_k)}$.

Posons $U' := U-p$ et définissons $G\colon U' \to 2^B$ par la formule

$$G(x'-p) := H(x')-p$$

et ce, $\forall x' \in U$. Le Lemme 5.2.b affirme que G est quasi-contractante par rapport au convexe compact $K' := \{O\}$. Il est facile de voir que les conditions du Lemme 4.2 sont maintenant satisfaites. Examinons alors le comportement de la suite de base $\{x_k'-p\}_{k\in N} \subset U'$ engendrée à partir de l'application G et du "germe" x_o-p. Par commodité, posons $\tilde{x}_k := x_k'-p$ et $\tilde{y}_k := y_k-p$, $\forall k \in N$. Deux cas peuvent survenir ici aussi:

$\boxed{(\exists \ell \in N)(\tilde{x}_\ell = \tilde{y}_\ell)}$.

Posons $\tilde{x}_* := \tilde{x}_\ell$. Alors $\tilde{x}_* = \tilde{x}_\ell = \tilde{y}_\ell \in G(x_\ell) \cap U' = G(\tilde{x}_*) \cap U' = H(x_*') \cap U' \Rightarrow \tilde{x}_* \in H(x_*')-p \Rightarrow \tilde{x}_* + p \in H(x_*') \Rightarrow x_*' \in H(x_*')$. La suite des $\{x_k'\}_{k\in N} \subset U$ a donc comme "germe" le point x_o pour devenir constante de valeur x_*' à partir de l'indice ℓ.

$\boxed{(\forall k \in N)(\tilde{y}_k \neq \tilde{x}_k)}$.

Appliquons le Lemme 4.2 aux suites $\{\tilde{x}_k\}_{k\in N}$ et $\{\tilde{y}_k\}_{k\in N}$. On a que $\|\tilde{x}_{k+1}\| = d(\tilde{x}_{k+1},\{O\}) = d(\tilde{x}_{k+1},K') \le \rho_k d(\tilde{x}_k,K') = \rho_k d(\tilde{x}_k,\{O\}) = \rho_k\|\tilde{x}_k\|$. Donc, pour tout $k \in N$, on a que

$$\|\tilde{x}_{k+1}\| \le \Big(\prod_{i=0}^{k} \rho_i\Big)\|\tilde{x}_o\|.$$

La suite de couples $\{(\alpha_k,\beta_k)\}_{k\in N}$ étant acceptable, par l'hypothèse (iv), alors $\|\tilde{x}_k\| \to 0$. Donc, $\tilde{x}_k \to O$. Par conséquent, la suite des $\{x_k'\}_{k\in N} \subset U$ a donc comme "germe" le point x_o et converge vers le point $x_*' = \tilde{x}_* + p = O + p = p \in H(p)$, par la première partie de la preuve.

Dans les deux cas, la suite $\{x_k'\}_{k\in N} \subset U$ part du "germe" x_o et converge vers un point fixe x_*' de l'application H. Etudions cette suite plus en détail. A cet effet, considérons à nouveau les deux cas mentionnés ci-haut.

$\boxed{(\exists \ell \in N)(y_\ell = x_\ell)}$.

Supposons que $k \geq \ell$. Alors $\tilde{x}_{k+1} = \tilde{x}_k = \tilde{y}_k = \tilde{x}_*$. Donc, $\tilde{x}_* = \tilde{x}_{k+1} = x_{k+1}' - p = x_*' - p \Rightarrow x_{k+1}' = x_*' = \beta_k x_*' + \alpha_k x_*' + (1-\rho_k)x_*' = \beta_k x_*' + \alpha_k y_k' + (1-\rho_k)x_*'$. Ici les suites $\{x_k'\}_{k\in N}$ et $\{y_k'\}_{k\in N}$ sont constantes de valeur égale à x_*' dès que $k \geq \ell$. Dans ce cas, le point y_k' correspond au point y_k du Lemme 4.2.iii (et le point x_k' au point x_k de l'algorithme de base).

$\boxed{(\forall k \in N)(\tilde{y}_k \neq \tilde{x}_k)}$.

Alors, $\tilde{x}_{k+1} = \beta_k\tilde{x}_k + \alpha_k\tilde{y}_k \Rightarrow x_{k+1}' - p = \beta_k(x_k'-p) + \alpha_k(y_k'-p) \Rightarrow x_{k+1}' = \beta_k x_k' + \alpha_k y_k' + (1-\rho_k)p$. Rappelons que $\rho_k := \alpha_k + \beta_k$, $\forall k \in N$.

Dans les deux cas $\tilde{y}_k \in G(\tilde{x}_k) \cap U' = H(x_k') \cap U' = H(x_k') \cap U-p$ (par le Lemme 5.2.a) $\Leftrightarrow \tilde{y}_k + p \in H(x_k') \cap U \Leftrightarrow y_k' \in H(x_k') \cap U$. Donc, y_k', jouant le rôle du point y_k, satisfait à la condition (iii) du Lemme 4.2. Sous forme abrégée, on peut écrire que

$$x_{k+1}' := \beta_k x_k' + \alpha_k y_k' + (1-\rho_k)\Delta_k$$

où

$$\Delta_k := \begin{cases} x_*', & \text{si le premier cas est vrai et } k \geq \ell \\ p\ , & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

Considérons maintenant la suite de base $\{x_k\}_{k\in N}$ engendrée à partir de l'application H. Rappelons que $y_k \neq x_k$, $\forall k \in N$. On a donc que

$$x_{k+1} := \beta_k x_k + \alpha_k y_k .$$

Dès lors,

$$\begin{aligned}
\|x'_{k+1} - x_{k+1}\| &= \|\beta_k(x'_k-x_k) + \alpha_k(y'_k-y_k) + (1-\rho_k)\Delta_k\| \\
&\le \beta_k\|x'_k-x_k\| + \alpha_k\|y'_k-y_k\| + (1-\rho_k)\|\Delta_k\| \\
&\le \beta_k\|x'_k-x_k\| + \alpha_k\alpha\|x'_k-x_k\| + (1-\rho_k)\|\Delta_k\| \\
&= (\beta_k+\alpha\alpha_k)\|x'_k-x_k\| + (1-\rho_k)\|\Delta_k\| \qquad (6)\\
&\le (\beta_k+\alpha_k)\|x'_k-x_k\| + (1-\rho_k)\|\Delta_k\| \\
&= \rho_k\|x'_k-x_k\| + (1-\rho_k)\|\Delta_k\| \qquad (7)
\end{aligned}$$

car $(M,M';H,U,x_o,p;\alpha)$ est un processus de Mann de constante $\alpha \le 1$ (hypothèse (vii)). Montrons maintenant que

$\boxed{(\forall k \in N)(\|x'_k-x_k\| \le \|\Delta_k\|)}$.

La preuve sera faite par récurrence sur k. Pour $k = 0$, l'inégalité est vérifiée car $x'_o = x_o$. Supposons-la vraie pour k. Montrons pour $k+1$ en se servant de l'inégalité (7).

$$\begin{aligned}
\|x'_{k+1} - x_{k+1}\| &\le \rho_k\|x'_k-x_k\| + (1-\rho_k)\|\Delta_k\| \\
&\le \rho_k\|\Delta_k\| + (1-\rho_k)\|\Delta_k\| \\
&= \|\Delta_k\| \\
&\le \|\Delta_{k+1}\|
\end{aligned}$$

car la suite $\{\|\Delta_k\|\}_{k\in N}$ est non décroissante grâce à l'hypothèse (iii). Considérons les deux cas suivants:

$\boxed{\alpha = 1}$.

Alors $\lim\limits_{k\to\infty} x'_k = \lim\limits_{k\to\infty} \Delta_k = \Delta := p$ ou x'_*, tout dépendant de quel cas est vrai. Donc, $\|x_k-\Delta\| \le \|x_k-x'_k\| + \|x'_k-\Delta\| \le \|\Delta_k\| + \|x'_k-\Delta\| \le \|\Delta\| + \varepsilon$, dès que k est suffisamment grand. La seconde condition du cas $\boxed{\alpha = 1}$ est bien vérifiée.

$\boxed{\alpha < 1}$.

Pour chaque $k \in N$, posons

$$\|x'_k-x_k\| = \lambda_k\|\Delta_k\| .$$

On pose $\lambda_k := 0$ dans le cas où $\Delta_k = O$. Evidemment, $\lambda_o = 0$ et $\lambda_k \le 1$,

$\forall k \in N$ (voir preuve ci-haut). Reprenons maintenant l'inégalité (6). Alors

$$\begin{aligned}
\lambda_{k+1}\|\Delta_{k+1}\| &= \|x'_{k+1} - x_{k+1}\| \\
&\leq (\beta_k+\alpha\alpha_k)\|x'_k-x_k\| + (1-\rho_k)\|\Delta_k\| \\
&= (\beta_k+\alpha\alpha_k)\lambda_k\|\Delta_k\| + (1-\rho_k)\|\Delta_k\| \\
&= (\lambda_k(\beta_k+\alpha\alpha_k) + 1 - \rho_k)\|\Delta_k\| \\
&\leq (\lambda_k(\beta_k+\alpha\alpha_k) + 1 - \rho_k)\|\Delta_{k+1}\| \\
&= (1 - (1-\alpha\lambda_k)\alpha_k)\|\Delta_{k+1}\| - (1-\lambda_k)\beta_k\|\Delta_{k+1}\| \\
&\leq (1 - (1-\alpha\lambda_k)\alpha_k)\|\Delta_{k+1}\| \\
&= (1 + (\alpha\lambda_k-1)\alpha_k)\|\Delta_{k+1}\|.
\end{aligned}$$

Deux cas sont maintenant à considérer:

$\boxed{(\forall k \in N)(\Delta_k = O)}$.

Alors $x'_k = x_k$, $\forall k \in N \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} x'_k = \Delta := p$ ou x'_*, qui est un point fixe de l'application H, par ce qui a été vu plus haut. La condition $\boxed{\alpha < 1}$ est donc bien vérifiée.

$\boxed{(\exists \ell \in N)(\Delta_\ell \neq O)}$.

Sans perte de généralité, on peut considérer ℓ comme étant le plus petit indice ayant cette propriété. Alors, par monotonicité de la suite de scalaires $\{\|\Delta_k\|\}_{k\in N}$, on a que $\lambda_k = 0$ pour $0 \leq k \leq \ell-1$ et que $\|\Delta_k\| > 0$ pour $k \geq \ell$. Posons

$$\bar{\lambda}_k := \lambda_{k+\ell-1}$$
$$\bar{\alpha}_k := \alpha_{k+\ell-1}$$

et ce, $\forall k \in N$. Alors $\bar{\lambda}_o = \lambda_{\ell-1} = 0$ et $\bar{\lambda}_{k+1}\|\Delta_{k+\ell}\| = \lambda_{k+\ell}\|\Delta_{k+\ell}\| \leq (1 - (1 - \alpha\lambda_{k+\ell-1})\alpha_{k+\ell-1})\|\Delta_{k+\ell}\| = (1 - (1-\alpha\bar{\lambda}_k)\bar{\alpha}_k)\|\Delta_{k+\ell}\| \Rightarrow \bar{\lambda}_{k+1} \leq 1 - (1-\alpha\bar{\lambda}_k)\bar{\alpha}_k = 1 - \bar{\alpha}_k + \alpha\bar{\lambda}_k\bar{\alpha}_k$, car $\|\Delta_{k+\ell}\| > 0$, $\forall k \in N$. Posons

$$\theta_k := \alpha\bar{\lambda}_k\bar{\alpha}_k$$

et ce, $\forall k \in N$. Le Lemme 5.3 affirme alors que, $\forall k \in N$, on a

$$0 \le \theta_k \le \sum_{j=1}^{k} \left[(1-\bar\alpha_{k-j}) \prod_{i=k-j+1}^{k} \bar\alpha_i\right]\alpha^j$$
$$= \sum_{j=1}^{k} \pi_{k,j}\alpha^j$$

où

$$\pi_{k,j} := (1-\bar\alpha_{k-j}) \prod_{i=k-j+1}^{k} \bar\alpha_i$$

pour $1 \le j \le k$. Manifestement, $0 \le \pi_{k,j} \le 1$, $\forall j$, $\forall k$. Montrons maintenant que $\theta_k \to 0$. Choisissons $\varepsilon > 0$. Puisque $\bar\alpha_k \to 1$ (hypothèse (iv)), il est certainement possible de trouver un nombre $\ell_\varepsilon \in N$ tel que si $k-j > \ell_\varepsilon$ alors $\pi_{k,j} \le 1-\bar\alpha_{k-j} < \varepsilon$. Soit donc $k \in N$ avec $k > \ell_\varepsilon$. On peut écrire que

$$\theta_k \le \sum_{j=1}^{k} \pi_{k,j}\alpha^j$$
$$= \sum_{j=1}^{k-\ell_\varepsilon-1} \pi_{k,j}\alpha^j + \sum_{j=k-\ell_\varepsilon}^{k} \pi_{k,j}\alpha^j. \tag{8}$$

Or $j \le k - \ell_\varepsilon - 1 \Longleftrightarrow k - j \ge \ell_\varepsilon + 1 > \ell_\varepsilon$. Donc, reprenant l'inégalité (8), on obtient

$$\theta_k \le \sum_{j=1}^{k-\ell_\varepsilon-1} \varepsilon\alpha^j + \sum_{j=k-\ell_\varepsilon}^{k} \pi_{k,j}\alpha^j$$
$$\le \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} \alpha^j + \sum_{j=k-\ell_\varepsilon}^{k} \pi_{k,j}\alpha^j$$
$$= \frac{\varepsilon\alpha}{1-\alpha} + \sum_{j=k-\ell_\varepsilon}^{k} \pi_{k,j}\alpha^j$$
$$\le \frac{\varepsilon\alpha}{1-\alpha} + \sum_{j=k-\ell_\varepsilon}^{k} \alpha^j$$
$$\le \frac{\varepsilon\alpha}{1-\alpha} + \alpha^{k-\ell_\varepsilon-1} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha^j$$
$$= \frac{(\varepsilon + \alpha^{k-\ell_\varepsilon-1})\alpha}{1-\alpha}.$$

Par hypothèse, on a que $\alpha < 1$. Il est donc possible de trouver un nombre $k_\varepsilon \in N$ tel que $\alpha^{k-\ell_\varepsilon-1} < \varepsilon$ dès que $k - \ell_\varepsilon - 1 > k_\varepsilon$. Soit donc k un tel indice, c'est-à-dire que $k - \ell_\varepsilon - 1 \geq k_\varepsilon \Rightarrow k \geq k_\varepsilon + \ell_\varepsilon + 1 > \ell_\varepsilon \Rightarrow$

$$\theta_k \leq \frac{(\varepsilon + \alpha^{k-\ell_\varepsilon-1})\alpha}{1-\alpha}$$

$$\leq \frac{(\varepsilon+\varepsilon)\alpha}{1-\alpha}$$

$$= \frac{2\alpha\varepsilon}{1-\alpha}\ .$$

Ainsi θ_k est aussi petit que l'on veut dès que k est suffisamment grand. Par conséquent, $\theta_k \to 0$. Comme $\overline{\lambda}_{k+1} \leq 1 - \overline{\alpha}_k + \theta_k$ et que $\overline{\alpha}_k \to 1$, alors $\overline{\lambda}_k \to 0 \Rightarrow \lambda_k \to 0 \Rightarrow \|x_k'-x_k\| \to 0$ (la suite des scalaires $\{\|\Delta_k\|\}_{k\in N}$ est en effet constante après un certain indice ℓ). Nous avons déjà vu que $x_k' \to \Delta := x'$, ou p, un point fixe de l'application H. En conclusion, $x_k \to \Delta$, un point fixe de H. La condition $\boxed{\alpha < 1}$ est donc vérifiée. □

6. <u>Quelques exemples</u>

a) Posons $U = B := R^2$, $p = (0,1)$ et définissons $H: R^2 \to 2^{R^2}$ par la formule

$$H(x) := [p, \tfrac{p+x}{2}]$$

et ce, pour tout $x \in R^2$. Ici, le symbole $[P,Q]$ signifie le segment de droite fermé joignant les points P et Q. Alors $(M,M';H,B,x_o,p;0)$ est un processus de Mann, $\forall x_o \in B$, car $y_k' = y_k = p$, $\forall k \in N$. Il est en effet facile de voir que $H_K(x) = \{p\}$, $H_{K'}' = \{O\}$, où $K := \{p\}$ et $K' := \{O\}$. De plus, H est quasi-contractante par rapport à K. En effet, soit $x \in U$. Alors,

$$\begin{aligned} d(H(x) \cap U, K) &= d([p, \tfrac{p+x}{2}],\{p\}) \\ &= \inf\{\|y-p\| \mid y \in [p, \tfrac{p+x}{2}]\} \\ &= 0 \\ &\leq \|x-p\| \\ &= d(x,\{p\}) \\ &= d(x,K). \end{aligned}$$

Il est facile de voir aussi que p est l'unique point fixe de l'application H. C'est donc un point de norme minimale. Choisissons maintenant une suite acceptable de couples $\{(\alpha_k,\beta_k)\}_{k\in N}$, avec $\alpha_k \to 1$, et appliquons le Théorème 5.4, cas $\boxed{\alpha < 1}$. On obtient que

$$x_k \to p$$

où $\{x_k\}_{k\in N}$ est la suite engendrée par l'algorithme de base.

b) Nous reprenons ici un exemple donné dans Petryshyn [14] page 464. Posons $B := R^2$, $U :=$ boule unité dans R^2 (considéré comme espace euclidien usuel) et $T: U \to U$ la fonction définie par la formule:

$$T(x,y) = (-\frac{x}{2}, -y)$$

et ce, pour tout $(x,y) \in U$.

. T est lipschitzienne de constante $L = 1$. Donc, $(M,M';T,U,x_o,p;1)$ est un processus de Mann (voir l'exemple suivant la Définition 5.1);

. O est l'unique point fixe de T dans U;

. T est quasi-contractante par rapport à $K := \{O\}$.

Choisissons une suite acceptable de couples $\{\{(\alpha_k,\beta_k)\}_{k\in N}$, avec $\alpha \to 1$. Appliquons le Théorème 5.4, cas $\boxed{\alpha = 1}$. On obtient que

$\boxed{\text{première alternative}}$

$x_k \to O$, le seul point fixe de l'application T.

$\boxed{\text{seconde alternative}}$

$(\forall\varepsilon > 0)(\exists k_\varepsilon \in N)(k \geq k_\varepsilon \Rightarrow x_k \in B(O;\|O\|+\varepsilon)) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists k_\varepsilon \in N)(k \geq k_\varepsilon \Rightarrow x_k \in B(O;\varepsilon)) \Leftrightarrow x_k \to O$.

En conclusion, on obtient dans les deux cas que

$$x_k \to O = T(O)$$

où $\{x_k\}_{k\in N}$ est la suite engendrée par l'algorithme de base.

c) L'exemple suivant est un contre-exemple classique dû à Lindenstrauss [10]. La raison d'être de ce contre-exemple est de montrer qu'il existe une application lipschitzienne (de constante $L = 1$) définie sur un convexe borné fermé d'un espace de Hilbert, possédant un point fixe, et dont la suite donnée par l'algorithme de Krasnoselskii (c'est-à-dire, l'algorithme (2)), à partir d'un point x_o, ne converge pas en norme.

Rappelons brièvement au lecteur la construction de cette fonction. Soit $\{e_k\}_{k\in N}$ une base orthonormale de ℓ_2. Nous allons définir une suite $\{x_k\}_{k\in N} \subset \ell_2$ de la façon suivante: posons $x_1 := e_1$ et, pour un certain entier n_1, les points $x_2,\ldots,x_{n_1}$ sont choisis dans le plan $\mathcal{O}e_1e_2$ de façon à satisfaire aux conditions suivantes:

- $\|x_k\| = \|T(x_k)\|$;
- $\langle x_k, T(x_k)\rangle/\|x_k\|^2 = \cos(2\varphi_1)$

pour $k = 1,\ldots,n_1-1$. De ces relations, on peut voir que le triangle $\Delta\mathcal{O}x_ix_j$ est congruent au triangle $\Delta\mathcal{O}T(x_i)T(x_j)$, pour $i,j = 1,\ldots,n_1-1$. Pour déterminer les valeurs n_1 et φ_1, on pose

$$\varphi_1 := \frac{\pi}{3}(n_1-1) \qquad n_1 > 10, \cos(\varphi_1)^{n_1} \geq \frac{3}{4}$$

en remarquant que ceci est toujours possible, car $\cos(\frac{\pi}{3}n)^n \to 1$. Considérons maintenant un point y_1 dans le plan $\mathcal{O}e_1e_2$ tel que $\|y_1\| = \|x_{n_1}\|$ et tel que l'angle compris entre x_{n_1} et y_1 soit égal à $2\varphi_1$. Posons $z_1 := \frac{1}{2}(y_1+x_{n_1})$, et remarquons que

$$\|z_1 - T(x_k)\| < \|x_{n_1} - x_k\|$$

pour $k = 1,\ldots,n_1-1$. Il existe donc un scalaire positif λ_1 tel que si $T(x_{n_1}) = z_1 + \lambda_1 e_3$ alors

$$\|T(x_{n_1}) - T(x_k)\| < \|x_{n_1} - x_k\|$$

pour $k = 1,\ldots,n_1-1$. De cette construction, on peut déduire aussi que

$$\|x_{n_1+1}\| = \|\tfrac{1}{2}(x_{n_1} + T(x_{n_1}))\| \geq \|z_1\| \geq \frac{3}{4}\ .$$

Le reste de la suite est construite de façon similaire. On utilise maintenant le théorème de Kirzbraun [8] pour étendre le domaine de définition de l'application T au convexe borné fermé $C = \mathrm{clo}(\{x_k\}_{k\in N} \cup \{T(x_k)\}_{k\in N})$. On démontre ensuite que

. $T: C \to C$ est lipschitzienne (de constante $L = 1$);

. la suite $\{x_k\}_{k\in N}$ est divergente en norme;

. la suite $\{x_k\}_{k\in N}$ converge faiblement vers $\mathcal{O}$.

Donc la suite $\{x_k\}_{k\in N}$ donnée par l'algorithme de Krasnoselskii ne converge pas en norme vers un point fixe de T. Or, par le théorème d'Opial [13], $\mathcal{O}$ est un point fixe de T.

Choisissons maintenant une suite acceptable de couples $\{(\alpha_k,\beta_k)\}_{k\in N}$, avec α_k ne convergeant pas nécessairement vers 1. Nous affirmons que $x_k \to x_* = T(x_*)$, où $\{x_k\}_{k\in N}$ est la suite donnée par l'algorithme de base. En effet, si $T(x_\ell) = x$, pour un certain indice $\ell \in N$, alors $x_k := x$, $\forall k \geq \ell$ (voir l'étape (4) de l'algorithme de base). Donc $x_k \to x_* := x$. Supposons alors que $x_k \neq y_k$, $\forall k \in N$. Or

$$\begin{aligned}
\|x_{k+1}\| &= \|\beta_k x_k + \alpha_k y_k\| \\
&\leq \beta_k\|x_k\| + \alpha_k\|y_k\| \\
&= \beta_k\|x_k\| + \alpha_k\|T(x_k)\| \\
&\leq \beta_k\|x_k\| + \alpha_k\|x_k\| \\
&= \rho_k\|x_k\|.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\|x_{k+1}\| \leq (\prod_{i=0}^{k} \rho_i)\|x_o\|.$$

Comme la suite de couples $\{(\alpha_k,\beta_k)\}_{k\in N}$ est acceptable, alors $x_k \to \mathcal{O} = T(\mathcal{O})$. Si l'on pose

$$\alpha_k := \tfrac{1}{2} \quad \text{et} \quad \beta_k := \tfrac{1}{2} - \frac{1}{k+3} \tag{9}$$

et ce, pour tout $k \in N$, nous obtenons alors le corollaire suivant:

COROLLAIRE 6.1. *Soit* $C,B,T: C \to C$, $\{(\alpha_k,\beta_k)\}_{k\in N}$ *définis comme à l'Exemple* 6.c. *Alors la suite* $\{x_k\}_{k\in N}$ *donnée à partir de l'algorithme "asymptotique" de Krasnoselskii (c'est-à-dire, l'algorithme de base avec les couples* (α_k,β_k) *de la Définition* (9)) *convergenen norme vers un point fixe de* T, *et ce indépendamment du choix du "germe"* $x_0 \in C$.

Bibliographie

[1] BERGE, C., *Espaces topologiques, fonctions multivoques*, Dunod, Paris, 114-118, 1966.

[2] BROWDER, F.E., PETRYSHYN, W.V., Construction of fixed points of nonlinear mappings in Hilbert spaces, *J. Math. Anal. Appl.* 20(1967), 197-228.

[3] EDELSTEIN, M., A remark on a theorem of M.A. Krasnoselskii, *Amer. Math. Monthly* 13(1966), 509-510.

[4] ENGL, H.W., Weak convergence of asymptotically regular sequences for nonexpansive mappings and connections with certain Chebyshef-centers, *Nonlinear Anal.* (1977), 495-501.

[5] HALPERN, B., Fixed points of nonexpanding maps, *Bull. Amer. Math. Soc.* 73 (1967), 957-961.

[6] ISHIKAWA, S., Fixed points and iteration of nonexpansive mappings in a Banach space, *Proc. Amer. Math. Soc.* 59, 1(1976), 65-71.

[7] KANIEL, S., Construction of a fixed point for contractions in Banach spaces, *Israel J. Math.* 9(1971), 935-940.

[8] KIRZBRAUN, M.D., Uber die zusammenziehenden und Lipschitzschen Transformationen, *Fund. Math.* 22(1934), 123-127.

[9] KRASNOSELSKII, M.A., Two remarks on the method of successive approximation, *Uspehi Mat. Nauk* 10, 1(63)(1955), 123-127.

[10] LINDENSTRAUSS, J., GENEL, A., An example concerning fixed points, *Israel J. Math.* 22(1975), 81-86.

[11] MANN, W.R., Mean value methods in iteration, *Proc. Amer. Math. Soc.* 4(1953), 506-510.

[12] NUSSBAUM, R.D., Some asymptotic fixed point theorems, *Trans. Amer. Math. Soc.* 171(1972), 349-375.

[13] OPIAL, Z., Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings, *Bull. Amer. Math. Soc.* 73(1967), 591-597.

[14] PETRYSHYN, W.V., WILLIAMSON, T.E., Strong and weak convergence of the sequence of successive approximations for quasi-nonexpansive mappings, *J. Math. Anal. Appl.* 43(1973), 459-497.

[15] SCHAEFER, H., Über die Methode des sukzessive Approximationen, *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein* 59(1957), 131-140.

Collège militaire royal de Saint-Jean
Département d'ingénierie et d'informatique
Richelain, Qué. J0J 1R0

Manuscrit reçu le 14 mai 1987.