Ann. sc. math. Québec, 1987, vol. 11, no 2, pp. 321-342

# SOLUTIONS SINGULIÈRES DES SYSTÈMES HYPERBOLIQUES LINÉAIRES HOMOGÈNES

Jean-Guy Dubois

Summary

We study the singularities of local solutions of homogeneous linear hyperbolic bidimensional systems on the plane. Generically, the solutions of these systems of partial differential equations, with free initial conditions, have only folds as singularities. Also, we classify and characterize the singularities holded by the solutions under generic one parameter deformations of the free initial conditions.

Résumé

Nous étudions les singularités des solutions locales des systèmes hyperboliques linéaires homogènes du plan dans le plan. Génériquement, les solutions d'un tel système d'équations aux dérivées partielles, si elles satisfont à des conditions initiales libres, ne présentent que des plis comme singularités. Nous classifions et caractérisons aussi les singularités rencontrées par les solutions sous les déformations génériques à un paramètre de conditions initiales libres.

## 0. Introduction

Nous avons développé, dans un article précédent [1], les outils mathématiques nécessaires à l'étude des singularités des solutions locales des systèmes d'équations aux dérivées partielles (EDP) quasilinéaires du premier ordre admettant une direction libre. Les prolongements, au sens d'Elie Cartan, d'ordre $q$ de tels systèmes à $m$ variables indépendantes et à $n$ variables dépendantes, définissent des sous-variétés différentielles $S^q$ de l'espace $J^q(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$ des jets d'ordre $q$ des fonctions de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$. Il apparaît possible de mener à bien l'étude locale des solutions singulières de ces systèmes si les sous-variétés $S^q$ rencontrent convenablement les strates de Thom dans $J^q(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$, c'est-à-dire si chaque intersection est une sous-variété de $S^q$.

Dans les bons cas, on a une stratification de $S^q$ en de telles sous-variétés intersections. Comme il existe une submersion $\Gamma$, à valeurs sur $S^q$, de la variété des jets (à un ordre suffisant) des conditions initiales libres, cette stratification induit, par les images réciproques de $\Gamma$, une stratification correspondante sur la variété des jets de conditions initiales. Lorsque le problème de Cauchy est résoluble, les types locaux des solutions qui se présentent sont alors fonctions des conditions initiales. Par l'utilisation des théorèmes de transversalité, une description des singularités des solutions génériques et des familles de solutions génériques sous déformation des conditions initiales libres, devient alors possible.

Nous avons réalisé un tel programme dans [1], entre autres pour les systèmes hyperboliques réductibles de la forme

$$AU_x + BU_y = 0, \tag{0.1}$$

définis dans $\mathbb{R}^2$ et d'inconnues $U$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, où $A$ et $B$ sont des matrices d'ordre 2 dont les coefficients sont des fonctions définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ qui ne dépendent que des composantes $u$ et $v$ de $U(x,y)$. Le système est dit "réductible" parce qu'il peut être réduit à un système linéaire à l'aide d'une transformation du plan dans le plan, appelée classiquement "transformation hodographique", qui interchange les variables dépendantes et indépendantes.

Dans les cas où $U$ est régulière en un point, la transformation hodographique inverse permet de ramener localement les solutions du système linéaire associé comme solution du système réductible initial. Toutefois, des difficultés apparaissent lorsque la solution $U$ du système réductible présente des points critiques. Il en est de même pour la solution $X$ du système linéaire associé. Ce qui motive en partie l'étude des singularités des solutions de tels systèmes, d'autant plus que l'utilisation de la transformation hodographique reste un outil fondamental pour l'application de ceux-ci à l'hydrodynamique.

Dans le présent article, on traite des systèmes hyperboliques linéaires homogènes du premier ordre à deux fonctions inconnues définies dans $\mathbb{R}^2$. Ils sont de la forme (0.1), mais où les matrices $A$ et $B$ sont maintenant fonctions de $x$ et $y$. Contrairement à notre attente, il est plus difficile d'obtenir une classification des types locaux de solutions pour cette classe de systèmes d'EDP que pour celle des systèmes hyperboliques réductibles, même si les systèmes de ces deux classes sont reliés par la transformation hodographique. Cette difficulté provient du fait qu'on ne peut plus en général "séparer", à équivalence près, les solutions locales selon $(x,y) \mapsto (a(x),b(y))$, comme c'était possible dans le cas précédent.

Nous avons pu cependant décrire les premières singularités de petites codimensions dans $S^q$. D'autre part, contrairement au cas des systèmes hyperboliques réductibles, on n'a pas directement ici une description des singularités des solutions en fonction des conditions initiales. Toutefois, grâce à l'existence de la submersion $\Gamma$, on pourrait traduire sur celles-ci les caractérisations fournies sur les solutions.

Génériquement, les solutions d'un système hyperbolique linéaire homogène du type étudié, satisfaisant à des conditions initiales libres, ne présentent que des plis comme singularités. D'autre part, pour presque tous les systèmes de ce type, les solutions correspondant à une déformation générique à un paramètre de conditions initiales libres ne rencontrent comme singularités que des plis, des fronces et des mouchoirs pliés en quatre génériques (une perturbation du mouchoir plié en quatre).

Nous caractérisons en appendice le mouchoir plié en quatre générique. Comme nous n'avons pas rencontré dans la littérature de démonstration de ce résultat, qui devrait pourtant être classique, nous avons tenu à la présenter. Dans le texte, nous référons à l'appendice par un A. On y trouvera quelques définitions courantes utilisées au cours de l'article.

Toutes les fonctions considérées dans le texte sont de classe $C^\infty$. La notation $C^\infty(V,W)$ désignera l'espace des applications de classe $C^\infty$ de la variété $V$ dans la variété $W$. On le munit de la topologie de Whitney (cf. Golubitsky et Guillemin [2]). Les définitions relatives aux systèmes d'EDP introduites dans l'article précédent [1] ne seront pas répétées ici. Nous invitons donc le lecteur à s'y référer au besoin.

## 1. Une forme canonique

DÉFINITION 1.1. Un *système hyperbolique linéaire homogène du premier ordre* (du plan dans le plan) est un système hyperbolique de la forme

$$A^*X_u + B^*X_v = 0, \tag{1.1}$$

où $u$ et $v$ sont les variables indépendantes, $X$ est le vecteur colonne des fonctions inconnues $X$ et $Y$ de $u$ et $v$, $A^*$ et $B^*$ des matrices d'ordre 2 dont les coefficients sont des fonctions de $u$ et $v$ définies sur un ouvert $\Delta \subset \mathbb{R}^2$. Les indices $u$ et $v$ de $X$ dénotent les dérivées partielles.

Rappelons que l'hyperbolicité est définie par l'existence de deux directions non libres (ou caractéristiques) en tout point de l'ouvert de définition. Ce qui fut caractérisé analytiquement dans [1].

Il existe une certaine dualité entre les systèmes hyperboliques réductibles et les systèmes hyperboliques linéaires homogènes, qui est mise en évidence par la transformation hodographique. C'est pour cette raison que nous avons choisi de noter les variables indépendantes de (1.1) comme les valeurs des inconnues de (0.1).

DÉFINITION 1.2. La *transformation hodographique* est celle qui, à un système hyperbolique réductible du type (0.1) défini par les matrices

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix},$$

associe un système hyperbolique linéaire homogène du type (1.1) défini par les matrices

$$A^* = \begin{bmatrix} f & -b \\ h & -d \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B^* = \begin{bmatrix} -e & a \\ -g & c \end{bmatrix}.$$

Réciproquement, à tout système du type (1.1), on associe un système du type (0.1) par la même opération sur les matrices les définissant: c'est la *transformation hodographique inverse*. Il est à remarquer que l'opération introduite sur les matrices est involutive.

LEMME 1.1. *Si* $\mathcal{U}: (x,y) \mapsto (U(x,y), V(x,y))$ *est une solution d'un système hyperbolique réductible du type* (0.1), *inversible au voisinage de* $(x_0, y_0)$, *alors son inverse local est solution du système hyperbolique linéaire homogène associé par la transformation hodographique. Réciproquement, toute solution localement inversible d'un système hyperbolique linéaire homogène du type* (1.1) *a un inverse local qui vérifie le système hyperbolique réductible associé.*

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{U}: (x,y) \mapsto (u,v)$ une solution locale inversible d'un système du type (0.1), c'est-à-dire de

$$\left\{\begin{array}{l} aU_x + bV_x + eU_y + fV_y = 0 \\ cU_x + dV_x + gU_y + hV_y = 0, \end{array}\right. \tag{1.2}$$

si on utilise les notations introduites à la Définition 1.2. Il en découle que le graphe de $\mathcal{U}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ sur laquelle

$$\left\{\begin{array}{l} adu\wedge dy + bdv\wedge dy + edu\wedge dx - fdv\wedge dx = 0 \\ cdu\wedge dy + ddv\wedge dy - gdu\wedge dx - hdv\wedge dx = 0, \end{array}\right. \tag{1.3}$$

où $du$ et $dv$ dénotent respectivement les différentielles de $U$ et $V$ en $(x,y)$ et $\wedge$, le produit extérieur. Comme $\mathcal{U}$ est inversible, on peut paramétrer localement son graphe par $(u,v)$. Notant $\mathcal{U}^{-1}$ par $\mathcal{X} = (X,Y)$ et substituant dans (1.3) les différentielles respectives $dx$ et $dy$ de $X$ et $Y$ en $(u,v)$, on en dérive que $X$ et $Y$ satisfont localement au système

$$\begin{cases} fX_u - bY_u - eX_v + aY_v = 0 \\ hX_u - dY_u - gX_v + cY_v = 0. \end{cases}$$

Comme ce n'est autre que le système hyperbolique linéaire homogène associé à (1.2), la première partie du lemme est démontrée; sa réciproque se démontre de la même façon.

REMARQUE 1.1. On peut généraliser la notion de transformation hodographique en la définissant pour n'importe quel système quasilinéaire homogène (second membre nul) du premier ordre du plan dans le plan. On peut démontrer pour ce cas, l'analogue du Lemme 1.1.

On vérifie facilement qu'un changement de variables

$$(u,v) \mapsto (u',v')$$

au but (resp. $(x,y) \mapsto (x',y')$ à la source) d'un système (1.1) correspond à un changement de variables à la source (resp. au but) du système (1.2) associé par la transformation hodographique. Ainsi, on obtient le lemme suivant qui est, en un sens, dual au Lemme 2.1 de [1].

LEMME 1.2. *Soit un système hyperbolique linéaire homogène de la forme* (1.1). *Pour tout* $(u_0,v_0) \in \Delta$, *il existe un changement de variables local dans* $\Delta$ *qui ramène ce système à*

$$(1.4) \qquad -\lambda \frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial v} = 0, \qquad -\mu \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial Y}{\partial u} = 0$$

*(ou à un système analogue obtenu en permutant* $X$ *et* $Y$*), avec* $\lambda$ *et* $\mu$ *des fonctions de* $u$ *et* $v$ *telles que* $\lambda(u,v) \neq \mu(u,v)$ *pour tout* $(u,v)$ *voisin de* $(u_0,v_0)$.

## 2. Nature des solutions

Par le Lemme 1.2, l'étude des singularités des solutions locales d'un système hyperbolique linéaire homogène se ramène à celle d'un système de la forme (1.4). La situation est plus complexe ici que dans le cas des systèmes hyperboliques réductibles, car l'on ne peut pas en général séparer, à un changement de variables près à la source, les solutions locales selon $(u,v) \mapsto (a(u),b(v))$ (cf. Lemme 2.2 de [1]). Cependant, on pourra décrire l'allure des premières singularités de petites codimensions.

On notera $x = X(u,v)$, $y = Y(u,v)$, $x_{ij} = \partial^{i+j}X/\partial u^i\partial v^j(u,v)$, $y_{ij} = \partial^{i+j}Y/\partial u^i\partial v^j(u,v)$, $i+j \geq 1$. De même, on dénotera par $S^q$ le sous-ensemble de $J^q(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$ défini par le prolongement d'ordre $q$ du système (1.4), $q \geq 1$, c'est-à-dire par les dérivations jusqu'à l'ordre $q$ par rapport à $u$ et $v$ de chacune des deux équations de (1.4), établies à la page suivante $(P^q)$.

Dans chaque sous-groupe d'équations de $(P^q)$, on peut récrire les équations qui font intervenir les $x_{ij}$ ou $y_{ij}$, $i \geq 1$ et $j \geq 1$, sous la forme

$$x_{ij} = A_{ij},$$
$$y_{ij} = B_{ij},$$

où $A_{ij}$ et $B_{ij}$ sont des polynômes de variables $x_{\ell m}$, avec $1 \leq \ell+m < i+j$. Par exemple, du deuxième groupe, on tire

$$(2.1)\quad \begin{cases} x_{11} = \dfrac{1}{\lambda(u,v) - \mu(u,v)} [\dfrac{\partial\mu}{\partial v}(u,v)x_{10} - \dfrac{\partial\lambda}{\partial u}(u,v)x_{01}] \\[2ex] y_{11} = \dfrac{1}{\lambda(u,v) - \mu(u,v)} [\lambda(u,v)\dfrac{\partial\mu}{\partial v}(u,v)x_{10} - \mu(u,v)\dfrac{\partial\lambda}{\partial u}(u,v)x_{01}]. \end{cases}$$

On voit que $S^q$ est une sous-variété de $J^q(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$ de codimension $q(q+1)$ paramétrée par $u$, $v$, $x_{0i}$ et $x_{i0}$, avec $1 \leq i \leq q$ (sans contraintes sur $x_{00}$ et $y_{00}$). Ce qui est conforme au Lemme 1.4 de [1].

$$\begin{cases} -\lambda(u,v)x_{01} + y_{01} = 0 \\ -\mu(u,v)x_{10} + y_{10} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\lambda(u,v)x_{11} + y_{11} = \frac{\partial\lambda}{\partial u}(u,v)x_{01} \\ -\mu(u,v)x_{11} + y_{11} = \frac{\partial\mu}{\partial v}(u,v)x_{10} \\ -\lambda(u,v)x_{02} + y_{02} = \frac{\partial\lambda}{\partial v}(u,v)x_{01} \\ -\mu(u,v)x_{20} + y_{20} = \frac{\partial\mu}{\partial u}(u,v)x_{10}, \end{cases}$$

$$(P^q) \quad \begin{cases} -\lambda(u,v)x_{21} + y_{21} = \frac{\partial^2\lambda}{\partial u^2}(u,v)x_{01} + 2\frac{\partial\lambda}{\partial u}(u,v)x_{11} \\ -\lambda(u,v)x_{12} + y_{12} = \frac{\partial^2\lambda}{\partial u\partial v}(u,v)x_{01} + [\frac{\partial\lambda}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial\lambda}{\partial v}(u,v)]x_{11} \\ -\mu(u,v)x_{21} + y_{21} = \frac{\partial^2\mu}{\partial u\partial v}(u,v)x_{10} + [\frac{\partial\mu}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial\mu}{\partial v}(u,v)]x_{11} \\ -\mu(u,v)x_{12} + y_{12} = \frac{\partial^2\mu}{\partial v^2}(u,v)x_{10} + 2\frac{\partial\mu}{\partial v}(u,v)x_{11} \\ -\lambda(u,v)x_{03} + y_{03} = \frac{\partial^2\lambda}{\partial v^2}(u,v)x_{01} + 2\frac{\partial\lambda}{\partial v}(u,v)x_{02} \\ -\mu(u,v)x_{30} + y_{30} = \frac{\partial^2\mu}{\partial u^2}(u,v)x_{10} + 2\frac{\partial\mu}{\partial u}(u,v)x_{20}, \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$\begin{cases} -\lambda(u,v)x_{q-1,1} + y_{q-1,1} = F_{q-1,1} \\ \quad\vdots \\ -\lambda(u,v)x_{1,q-1} + y_{1,q-1} = F_{1,q-1} \\ -\mu(u,v)x_{q-1,1} + y_{q-1,1} = G_{q-1,1} \\ \quad\vdots \\ -\mu(u,v)x_{1,q-1} + y_{1,q-1} = G_{1,q-1} \\ -\lambda(u,v)x_{0q} + y_{0q} = H_q \\ -\mu(u,v)x_{q0} + y_{q0} = K_q, \end{cases}$$

où $F_{k\ell}$ et $G_{k\ell}$ sont des polynômes de variables $x_{ij}$, avec $1 \le i+j < k+\ell$; $H_q$ est un polynôme de variables $x_{0i}$, avec $1 \le i < q$; $K_q$ est un polynôme de variables $x_{i0}$, avec $1 \le i < q$.

a) <u>Cas des solutions de rang strictement positif</u>

Le jacobien en $(u,v)$ d'une solution $X = (X,Y)$ du système (1.4) est donné par

$$JX(u,v) = \det\begin{bmatrix} x_{10} & x_{01} \\ y_{10} & y_{01} \end{bmatrix} = (\lambda(u,v) - \mu(u,v))x_{10}x_{01}.$$

Le rang de $X$ en $(u,v)$ est 2 si l'on a

$$x_{10} \cdot x_{01} \neq 0.$$

C'est le cas régulier: $X$ est localement un difféomorphisme.

Le rang de $X$ en $(u,v)$ est 1 dans les deux cas suivants:

$$x_{10} \neq 0 = x_{01},$$
$$x_{01} \neq 0 = x_{10}.$$

Nous plaçant dans le premier, l'équation de *l'ensemble critique* $\Sigma_X$ de $X$ (l'ensemble des points où son jacobien s'annule) est défini par

$$\Sigma_X = \{(u,v) \in \Delta;\ \frac{\partial X}{\partial v}(u,v) = 0\}.$$

On trouve alors un pli en $(u,v)$ si et seulement si $x_{02} \neq 0$. Comme on a un résultat analogue dans le second cas, on peut énoncer le lemme suivant:

LEMME 2.1. *Soit un système hyperbolique linéaire homogène de la forme* (1.4) *et* $S^q$ *la sous-variété de* $J^q(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$ *définie par son prolongement d'ordre* q. *L'ensemble des éléments de* $S^q$, $q \geq 2$, *correspondant à des plis est caractérisé par* $x_{10} = 0 \neq x_{10}x_{02}$ *ou* $x_{10} = 0 \neq x_{01}x_{20}$. *C'est une sous-variété de* $S^q$ *de codimension* 1.

On peut avoir des fronces dans les deux cas suivants:

$$x_{01} = x_{02} = 0 \neq x_{10},$$
$$x_{10} = x_{20} = 0 \neq x_{01}.$$

On doit avoir en outre que $x_{11} \neq 0$, qui exprime que $\Sigma_X$ est localement une sous-variété de $\Delta$. Utilisant la première expression de (2.1), cette condition se traduit par

$$\frac{\partial\mu}{\partial v}(u,v) \neq 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial\lambda}{\partial u}(u,v) \neq 0,$$

suivant que l'on est dans le premier ou le second cas respectivement.

D'après Whitney [5], on caractérise les points fronces par

$$\nabla_w X(u,v) = 0 \neq \nabla_w(\nabla_w X)(u,v),$$

où $\nabla_w$ désigne la dérivée directionnelle dans la direction $w$, avec $w$ tangent à $\Sigma_X$ en $(u,v)$.

Prenons $(u,v) \in \Sigma_X$ et considérons la situation où $x_{01} = 0 \neq x_{10}$. Alors $w = (\alpha,\beta)(u,v)$ appartient à $T_{(u,v)}\Sigma_X$, l'espace vectoriel tangent à $\Sigma_X$ en $(u,v)$, si l'on a

$$\alpha(u,v)x_{11} + \beta(u,v)x_{02} = 0. \tag{2.2}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\nabla_w X(u,v) &= (\alpha(u,v)x_{10} + \beta(u,v)x_{01},\ \alpha(u,v)y_{10} + \beta(u,v)y_{01}),\\ &= \alpha(u,v)(x_{10},y_{10}),\end{aligned}$$

car si $x_{01} = 0$, alors $y_{01} = 0$, d'après la première équation de $(P^q)$. Donc $\nabla_w X(u,v)$ est nulle si et seulement si $\alpha(u,v)$ l'est; ce qui, par (2.2), revient à $x_{02} = 0$. On a donc $\beta(u,v) \neq 0$ et

$$\begin{aligned}\nabla_w(\nabla_w X)(u,v) &= \beta(u,v)\frac{\partial}{\partial v}(\nabla_w X)(u,v),\\ &= \beta(u,v)\frac{\partial}{\partial v}(u,v)(x_{10},y_{10}).\end{aligned}$$

Or, cette expression est non nulle si et seulement si $\frac{\partial\alpha}{\partial v}(u,v) \neq 0$. D'autre part, on obtient de (2.2) et de $\nabla_w X(u,v) = 0$ que

$$\frac{\partial\alpha}{\partial v}(u,v)x_{11} + \beta(u,v)x_{03} = 0,$$

soit

$$\frac{\partial \alpha}{\partial v}(u,v) = -\frac{\beta(u,v)}{x_{11}} x_{03}.$$

On déduit de ces calculs le lemme suivant:

LEMME 2.2. *Soit les mêmes hypothèses qu'au Lemme 2.1. L'ensemble des éléments de* $S^q$, $q \geq 3$, *correspondant à des fronces est caractérisé par*

$$x_{01} = x_{02} = 0 \nparallel x_{10}x_{03}\frac{\partial \mu}{\partial v}(u,v)$$

*ou*

$$x_{10} = x_{20} = 0 \nparallel x_{01}x_{30}\frac{\partial \lambda}{\partial u}(u,v).$$

*C'est une sous-variété de* $S^q$ *de codimension* 2.

b) <u>Cas des solutions de rang nul</u>

Le rang de $X$ en $(u,v)$ est nul dans le cas où $x_{10} = x_{01} = 0$. Nous caractériserons l'une des situations qui se présente dans ce cas, soit celle où les éléments d'une sous-variété de $S^q$, $q \geq 3$, correspondent à des "mouchoirs pliés en quatre génériques" (cf. Définition A.3).

LEMME 2.3. *Soit les mêmes hypothèses qu'au Lemme 2.1. L'ensemble des éléments de* $S^q$, $q \geq 3$, *correspondant à des mouchoirs pliés en quatre génériques est caractérisé par* $x_{10} = x_{01} = 0 \nparallel x_{20}x_{02}\frac{\partial \lambda}{\partial v}(u,v)\frac{\partial \mu}{\partial u}(u,v)$. *C'est une sous-variété de* $S^q$ *de codimension* 2.

DÉMONSTRATION. Sans perte de généralité, on peut se placer en $(u,v) = 0$ et supposer que $X(0) = 0$. Puisqu'en un point où se présente un mouchoir plié en quatre générique le rang de $X$ est nul, on a $x_{10} = x_{01} = 0$. Utilisant ce fait et les équations du système $(P^3)$, le prolongement d'ordre 3 de (1.4), on obtient:

$$x_{11} = y_{11} = 0,$$

$$y_{02} = \lambda(0)x_{02},$$

$$y_{20} = \mu(0)x_{20},$$

$$x_{12} = x_{21} = y_{12} = y_{21} = 0,$$

$$-\lambda(0)x_{03} + y_{03} = 2\frac{\partial\lambda}{\partial v}(0)x_{02},$$

$$-\mu(0)x_{30} + y_{30} = 2\frac{\partial\mu}{\partial u}(0)x_{20}.$$

On en déduit que

$$j^3X(0) = \Big(\frac{x_{20}}{2}u^2 + \frac{x_{02}}{2}v^2 + \frac{x_{30}}{6}u^3 + \frac{x_{03}}{6}v^3,\ \frac{x_{20}}{2}\mu(0)u^2 + \frac{x_{20}}{2}\lambda(0)v^2$$
$$+ \frac{1}{6}(\mu(0)x_{30} + 2\frac{\partial\mu}{\partial u}(0)x_{20})u^3 + \frac{1}{6}(\lambda(0)x_{03} + 2\frac{\partial\lambda}{\partial v}(0)x_{02})v^3\Big).$$

Par le changement de variables au but $(x,y) \to (\lambda(0)x - y,\ -\mu(0)x + y)$, cette expression devient

$$\Big(\frac{\lambda(0) - \mu(0)}{2}x_{20}u^2 + \Big(\frac{\lambda(0) - \mu(0)}{6}x_{30} - \frac{1}{3}\frac{\partial\mu}{\partial u}(0)x_{20}\Big)u^3 - \frac{1}{3}\frac{\partial\lambda}{\partial v}(0)x_{02}v^3,$$
$$\frac{\lambda(0) - \mu(0)}{2}x_{02}v^2 + \frac{1}{3}\frac{\partial\mu}{\partial u}(0)x_{20}u^3 + \Big(\frac{\lambda(0) - \mu(0)}{6}x_{03} + \frac{1}{3}\frac{\partial\lambda}{\partial v}(0)x_{02}\Big)v^3\Big).$$

Compte tenu de la caractérisation fournie par la Proposition A.1, on voit que l'on a un mouchoir plié en quatre générique si et seulement si $x_{20}x_{02}\frac{\partial\lambda}{\partial v}(0)\frac{\partial\mu}{\partial u}(0) \neq 0$. Ce qui termine la démonstration du lemme.

## 3. Déformations et généricité

Des conditions initiales libres pour un système tel que (1.4) consistent en la donnée de deux courbes

$$\mathcal{X}^o\colon t \mapsto (X^o(t),Y^o(t)),\qquad \mathcal{U}^o\colon t \mapsto (U^o(t),V^o(t)),$$

où $t \in\, ]a,b[$ et $\mathcal{U}^o(t)$ appartient au domaine de définition de $\lambda$ et $\mu$, telles que $\mathcal{U}^o$ soit "non caractéristique", c'est-à-dire telle que

$$\frac{dU^o}{dt}(t)\,\frac{dV^o}{dt}(t) \neq 0$$

pour tout $t \in\, ]a,b[$ . Désignons par $j^q(\mathcal{X}^o,\mathcal{U}^o)(t)$ le q-jet de $(\mathcal{X}^o,\mathcal{U}^o)$ en t. On notera $CI^q \subset J^q(\mathbb{R},\mathbb{R}^4)$ l'ouvert formé des $(t,j^q(\mathcal{X}^o,\mathcal{U}^o)(t))$ tels que $t \in\, ]a,b[$

et $(X^o, U^o)$ soit un système de conditions initiales libres (CIL) pour (1.4). On dénotera par $CI^\infty$ le sous-ensemble de $C^\infty(]a,b[,\mathbb{R}^4)$ formé par les systèmes de CIL.

Il existe évidemment une solution locale unique $X$ de (1.4) satisfaisant à chaque système de CIL (cf. Lemme 1.2 de [1]). On a aussi la proposition qui suit, analogue à la Proposition 1.1 de [1]. La lecture de la démonstration de cette dernière fera comprendre que $\Gamma^q$ est bien définie et est une submersion.

PROPOSITION 3.1. *Soit un système hyperbolique linéaire homogène de la forme* (1.4) *qui admet un système de* CIL $(X^o, U^o) \in CI^\infty$. *Il existe une submersion*

$$\Gamma^q \colon CI^q \to S^q, \qquad q \geq 1,$$

*telle que si* $X$ *est une solution locale de ce système vérifiant*

$$X(U^o(t)) = X^o(t)$$

*sur un voisinage de* $t_o \in ]a,b[$ , *alors on a*

$$\Gamma^q(t_o, j^q(X^o, U^o)(t_o)) = (U^o(t_o), j^q X(U^o(t_o))).$$

Contrairement au cas des systèmes hyperboliques réductibles, on n'a pas directement une description des singularités des solutions des systèmes hyperboliques linéaires homogènes en fonction des conditions initiales. C'est pourquoi nous aurons à utiliser la Proposition 3.1: on introduira une décomposition de $S^q$ et on lui en fera correspondre une de $CI^q$ par les images réciproques de $\Gamma^q$.

THÉORÈME 3.1. *Génériquement, les solutions locales d'un système hyperbolique linéaire homogène qui satisfont à un système de* CIL, *ne présentent comme singularités que des plis. De façon précise, il existe un ouvert dense de* $CI^\infty$ *tel que, pour les systèmes de* CIL *appartenant à cet ouvert, les solutions locales correspondantes d'un système hyperbolique linéaire homogène ne peuvent présenter comme singularités que des plis.*

DÉMONSTRATION. D'après le Lemme 1.2, nous pouvons, sans perte de généralité, travailler avec un système hyperbolique linéaire homogène de la forme (1.4). On considère $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{CI}^\infty$, l'ensemble formé des CIL $(\mathcal{X}^o,\mathcal{U}^o)$ telles que l'application

$$]a,b[ \to CI^2 : t \mapsto (t, j^2(\mathcal{X}^o,\mathcal{U}^o)(t))$$

soit transverse aux images réciproques par $\Gamma^2$ des sous-variétés

$$\{x_{10} = x_{01} = 0\}, \quad \{x_{10} = x_{20} = 0\} \quad \text{et} \quad \{x_{01} = x_{02} = 0\}$$

de $S^2$. Du fait que ces sous-variétés soient fermées, il résulte des théorèmes de transversabilité que $\mathcal{O}_1$ est ouvert dense dans $\mathcal{CI}^\infty$. Par ailleurs, la propriété de transversabilité aux images réciproques par $\Gamma^2$ de ces sous-variétés de codimension 2 se traduit par le fait que

$$t \to (t, j^2(\mathcal{X}^o,\mathcal{U}^o)(t))$$

ne les rencontre pas. Ainsi, pour $(\mathcal{X}^o,\mathcal{U}^o)$ dans $\mathcal{O}_1$, on a

$$\Gamma^2(t, j^2(\mathcal{X}^o,\mathcal{U}^o)(t)) = (u,v,x,y,x_{10},x_{01},x_{20},x_{11},x_{02}),$$

dont les composantes ne vérifient aucune des conditions

$$x_{10} = x_{01} = 0, \qquad x_{10} = x_{20} = 0, \qquad x_{01} = x_{02} = 0.$$

Ce qui veut dire que l'on ne peut rencontrer génériquement que des plis comme singularités: d'où le théorème.

Nous voulons maintenant considérer les déformations à un paramètre des systèmes de CIL satisfaits par les solutions d'un système hyperbolique linéaire homogène. La décomposition à définir pour l'étude des singularités qui se présentent génériquement dans ce cas exige l'introduction d'une hypothèse supplémentaire.

<u>Hypothèse H.</u> Chacun des ensembles

$$\{(u,v) \in \Delta;\ \frac{\partial\lambda}{\partial u}(u,v) = 0\}, \qquad \{(u,v) \in \Delta;\ \frac{\partial\mu}{\partial u}(u,v) = 0\},$$

$$\{(u,v) \in \Delta;\ \frac{\partial\lambda}{\partial v}(u,v) = 0\}, \qquad \{(u,v) \in \Delta;\ \frac{\partial\mu}{\partial v}(u,v) = 0\}$$

est vide ou est une sous-variété de $\Delta$ de codimension strictement positive.

Par exemple, $H$ est vérifiée si l'on a

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u} \cdot \frac{\partial\lambda}{\partial v} \cdot \frac{\partial\mu}{\partial u} \cdot \frac{\partial\mu}{\partial v} \neq 0$$

pour tout $(u,v) \in \Delta$.

On décompose $S^q$, $q \geq 3$, selon le recouvrement suivant:

$$S^q = \Sigma_0 \cup \Sigma_{10} \cup \Sigma_{01} \cup \Sigma_{11} \cup \Sigma_{20} \cup \Sigma_{02} \cup \Sigma,$$

où l'on définit

$$\Sigma_0 = \{x_{10}x_{01} \neq 0\},$$
$$\Sigma_{10} = \{x_{10} = 0 \neq x_{01}x_{20}\},$$
$$\Sigma_{01} = \{x_{01} = 0 \neq x_{10}x_{02}\},$$
$$\Sigma_{11} = \{x_{10} = x_{01} = 0 \neq x_{20}x_{02} \frac{\partial\lambda}{\partial v}(u,v) \frac{\partial\mu}{\partial u}(u,v)\},$$
$$\Sigma_{20} = \{x_{10} = x_{20} = 0 \neq x_{01}x_{30} \frac{\partial\lambda}{\partial u}(u,v)\},$$
$$\Sigma_{02} = \{x_{10} = x_{02} = 0 \neq x_{10}x_{03} \frac{\partial\mu}{\partial v}(u,v)\}$$

et $\Sigma$, supposant l'hypothèse vérifiée, par la réunion des sous-variétés

$$\{x_{10} = x_{01} = x_{20} = 0\}, \quad \{x_{10} = x_{01} = x_{02} = 0\}, \quad \{x_{10} = x_{01} = \frac{\partial\lambda}{\partial v}(u,v) = 0\},$$
$$\{x_{10} = x_{01} = \frac{\partial\mu}{\partial u}(u,v) = 0\}, \quad \{x_{10} = x_{20} = x_{30} = 0\}, \quad \{x_{10} = x_{20} = \frac{\partial\lambda}{\partial u}(u,v) = 0\},$$
$$\{x_{01} = x_{02} = x_{03} = 0\}, \quad \{x_{01} = x_{02} = \frac{\partial\mu}{\partial v}(u,v) = 0\}.$$

On définit alors une décomposition correspondante de $CI^q$, $q \geq 3$, en prenant les images réciproques par $\Gamma^q$ de ces ensembles:

$$\tilde{\Sigma}_0 = (\Gamma^q)^{-1}(\Sigma_0), \quad \tilde{\Sigma}_{ij} = (\Gamma^q)^{-1}(\Sigma_{ij}), \quad \tilde{\Sigma} = (\Gamma^q)^{-1}(\Sigma).$$

On a que $\Sigma_0$ et $\tilde{\Sigma}_0$ sont des ouverts respectifs de $S^q$ et $CI^q$; $\Sigma_{10}$ et $\Sigma_{01}$ (resp. $\tilde{\Sigma}_{10}$ et $\tilde{\Sigma}_{01}$) sont des sous-variétés de codimension 1 de $S^q$ (resp. de $CI^q$); $\Sigma_{11}$, $\Sigma_{20}$ et $\Sigma_{02}$ (resp. $\tilde{\Sigma}_{11}$, $\tilde{\Sigma}_{20}$ et $\tilde{\Sigma}_{02}$) sont des sous-variétés de codimension 2 de $S^q$ (resp. de $CI^q$); $\Sigma$ et $\tilde{\Sigma}$ sont des fermés respectifs de $S^q$

et $CI^q$, réunions de sous-variétés de codimension 3. Remarquons qu'il serait possible d'écrire les équations des $\tilde{\Sigma}_{ij}$ dans $CI^q$ en explicitant quelque peu $\Gamma^q$.

THÉORÈME 3.2. *Supposons que l'hypothèse* H *soit vérifiée. Alors génériquement, pour toute famille de* CIL *définie par une déformation à un paramètre d'un système de* CIL *pour un système hyperbolique linéaire homogène, les solutions locales satisfaisant les éléments de la famille ne présentent comme singularités que des plis, des fronces ou des mouchoirs pliés en quatre génériques.*

DÉMONSTRATION. Nous allons considérer un système hyperbolique linéaire homogène de la forme (1.4) et un système $(X^o,U^o)$ de CIL pour celui-ci. Désignons pour $CI_1^\infty$ l'ensemble des déformations à un paramètre de $(X^o,U^o)$: c'est un ouvert de $C^\infty(\Xi \times ]a,b[, \mathbb{R}^4)$, où $\Xi$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. On se donne alors $O_2 \subset CI_1^\infty$, l'ensemble des déformations à un paramètre $(\overline{X}^o,\overline{U}^o)$ d'un système $(X^o,U^o)$ de CIL telles que l'application

$$(\xi,t) \to (t,j^3(\overline{X}^o(\xi,.),\overline{U}^o(\xi,.)))$$

soit transverse aux images réciproques par $\Gamma^3$ des sous-variétés de $S^3$ figurant dans la réunion définissant $\Sigma$. Du fait que ces sous-variétés soient fermées, il résulte des théorèmes de transversalité que $O_2$ est un ouvert dense de $CI_1^\infty$. Par ailleurs, la propriété de transversalité aux images réciproques par $\Gamma^3$ de ces sous-variétés de codimension 3 se traduit par le fait que l'application (3.7) ne les rencontre pas. Cela entraîne qu'elle ne rencontre que $\tilde{\Sigma}_0$, $\tilde{\Sigma}_{10}$, $\tilde{\Sigma}_{01}$, $\tilde{\Sigma}_{11}$, $\tilde{\Sigma}_{20}$ ou $\tilde{\Sigma}_{02}$. Or $\tilde{\Sigma}_0$ correspond à $X$ régulière, $\tilde{\Sigma}_{10}$ et $\tilde{\Sigma}_{01}$ aux plis, $\tilde{\Sigma}_{20}$ et $\tilde{\Sigma}_{02}$ aux fronces, $\tilde{\Sigma}_{11}$ aux mouchoirs pliés en quatre génériques. Le résultat en découle donc.

REMARQUE 3.1. (i) Dans la démonstration des Théorèmes 3.1 et 3.2, on pourrait de plus imposer que les éléments de $O_1$ (resp. de $O_2$) soient tels que l'application considérée rencontre aussi transversalement les sous-variétés $(\Gamma^2)^{-1}(\{x_{10} = 0\})$, $(\Gamma^2)^{-1}(\{x_{01} = 0\})$ (resp. les sous-variétés $\tilde{\Sigma}_{10}$, $\tilde{\Sigma}_{01}$, $\tilde{\Sigma}_{11}$, $\tilde{\Sigma}_{20}$, $\tilde{\Sigma}_{02}$). Cela permettrait de décrire avec plus de précision les situations génériques qui se présentent. Par exemple, on aurait alors des plis en des points isolés de $]a,b[$ ; on aurait aussi des fronces ou des mouchoirs pliés en quatre génériques en des points isolés de $\Xi \times ]a,b[$ et des plis sur des courbes de $\Xi \times ]a,b[$ .

(ii) Utilisant les méthodes classiques de la théorie des singularités, on pourrait aussi montrer que les plis sont stables, au sens où une déformation suffisamment petite du système de CIL, dont la solution correspondante présentait des plis, impliquerait une solution qui en possède en des points proches des anciens plis.

REMARQUE 3.2. Dans le cas où l'hypothèse H n'est pas vérifiée, mais où les ensembles définis dans celle-ci, lorsque non vides, sont des sous-variétés de codimension possiblement nulle, on pourrait avoir un analogue du Théorème 3.2. Par exemple, si $\frac{\partial\lambda}{\partial u} = \frac{\partial\mu}{\partial u} = \frac{\partial\lambda}{\partial v} = \frac{\partial\mu}{\partial v} = 0$ sur un ouvert, le système (1.1) est alors à coefficients constants sur celui-ci et devient ainsi un système hyperbolique réductible. Mais si l'un des ensembles considérés dans H n'est pas une variété, on n'a pas d'analogue au Théorème 3.2. Remarquons toutefois que pour presque tout choix de $A^*$ et $B^*$ pour (1.1), l'hypothèse H est vérifiée.

## Appendice

DÉFINITION A.1. Soit $f$ et $g$ deux fonctions de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ définies respectivement aux voisinages des points $a$ et $b$. On dit que $f$ est *localement équivalente* au voisinage de $a$ à $g$ au voisinage de $b$ s'il existe un difféomorphisme local $H$ à la source et un difféomorphisme local $K$ au but tels que

$$g = K \circ f \circ H^{-1},$$

où $H(a) = b$ et $K(f(a)) = g(b)$.

DÉFINITION A.2. Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ définie au voisinage du point $a$. On dit que $f$ est *régulière* en $a$ si sa matrice jacobienne en $a$ est de rang maximum; sinon, on dit qu'elle est *singulière* en $a$ (ou que $f$ présente une *singularité* en $a$).

DÉFINITION A.3. On dit que la fonction $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ présente une singularité *mouchoir plié en quatre générique* au point $(x_o,y_o)$ si $f$ est localement équivalente au voisinage de $(x_o,y_o)$ à

$$(x,y) \mapsto (x^2 + y^3,\ y^2 + x^3)$$

au voisinage de $(0,0)$.

Rappelons que le *mouchoir plié en quatre* est une singularité localement équivalente à $(x,y) \mapsto (x^2,y^2)$. Cette singularité est très dégénérée, contrairement au mouchoir plié en quatre générique . Une perturbation suffisamment petite du mouchoir plié en quatre le rend générique.

La *codimension d'une singularité* est une mesure de sa dégénérescence. Elle est donnée par la codimension de son germe. Pour la définition de la *codimension d'un germe*, nous référons à Martinet [3]. On y trouvera (ch. XIII) aussi les calculs qui montrent que le mouchoir plié en quatre est de codimension infinie et que le mouchoir plié en quatre générique est de codimension 2.

DÉFINITION A.4. Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ définie au voisinage du point $a$ et $j^kf(a)$ son jet d'ordre $k$ en $a$. On dit que $f$ est une *fonction k-déterminée* en $a$ si toute fonction ayant le même $k$-jet que $f$ est localement équivalente à $f$ au voisinage de $a$; en particulier, $f$ est alors localement équivalente à $j^kf$ au voisinage de $a$. Si $f$ est $k$-déterminée en un point pour un certain entier positif $k$, alors $f$ est dite de *détermination finie* en ce point.

Suite aux travaux de Mather [4], il est bien connu que $f$ est de détermination finie en un point si et seulement si $f$ est de codimension finie en ce point. Comme le mouchoir plié en quatre générique est de codimension finie, il est donc de détermination finie.

PROPOSITION A.1. *Soit* $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *une fonction dont le jet d'ordre* 2 *en* $(x_o,y_o)$ *est de la forme*

$$j^2f(x_o,y_o) = f(x_o,y_o) + (\alpha(x-x_o)^2,\beta(y-y_o)^2),$$

*avec* $\alpha\beta \neq 0$. *Alors* $f$ *présente un mouchoir plié en quatre générique en* $(x_o,y_o)$ *si et seulement si*

$$\frac{\partial^3 f^1}{\partial y^3}(x_o,y_o)\,\frac{\partial^3 f^2}{\partial x^3}(x_o,y_o) \neq 0,$$

*où* $f^1$ *et* $f^2$ *dénotent les composantes de* $f$.

DÉMONSTRATION. Il est immédiat de démontrer que la condition énoncée est nécessaire pour que $f$ présente en $(x_o,y_o)$ un mouchoir plié en quatre générique : nous montrerons donc qu'elle est suffisante. Quitte à effectuer des translations et des homothéties à la source et au but, on supposera $(x_o,y_o) = 0$ et $j^2f(0) = (x^2,y^2)$. On a alors

$$j^3f(0) = (x^2(1+ax+by) + cxy^2 + dy^3,\ \ y^2(1+gx+hy) + fyx^2 + ex^3),$$

avec $de \neq 0$, et le changement de variables

$$(x,y) \mapsto (x\sqrt{1+ax+by},\ y\sqrt{1+gx+hy})$$

mène à

$$j^3f(0) = (x^2+cxy^2+dy^3,\ y^2+fyx^2+ex^3),$$

aux abus d'écriture près. Comme on a ainsi

$$j^3f(0) = j^3((x+\tfrac{c}{2}y^2)^2 + dy^3,\ \ (y+\tfrac{f}{2}x^2)^2 + ex^3)(0),$$

par le changement

$$(x,y) \mapsto (x+\tfrac{c}{2}y^2,\ y+\tfrac{f}{2}x^2),$$

on obtient

$$j^3f(0) = (x^2+dy^3,\ y^2+ex^3).$$

Enfin, par des homothéties à la source et au but, on arrive à

$$j^3f(0) = (x^2+y^3,\ y^2+x^3).$$

En effet, par les changements $(x,y) \mapsto (\lambda x,\mu y)$ à la source et $(u,v) \mapsto (\nu u,\tau v)$ au but, on passe de

$$(x^2+y^3,\ y^2+x^3) \quad \text{à} \quad (\lambda^2\nu x^2+\mu^3\nu y^3,\ \mu^2\tau y^2+\lambda^3\tau x^3),$$

et il reste à voir que l'on sait résoudre le système

$$\lambda^2\nu = 1, \qquad \mu^2\tau = 1,$$
$$\mu^3\nu = d, \qquad \lambda^3\tau = e$$

d'inconnues non nulles $\lambda$, $\mu$, $\nu$, $\tau$. Il équivaut à

$$\mu^3/\lambda^2 = d, \qquad \lambda^3/\mu^2 = e,$$

soit à

$$\begin{cases} \lambda\mu = de \\ \mu^5/\lambda^5 = d/e \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \lambda\mu = de \\ \mu/\lambda = \sqrt[5]{d/e}, \end{cases}$$

système que l'on sait toujours résoudre: il correspond à l'intersection dans le plan $\lambda$, $\mu$ d'une droite de pente non nulle et d'une hyperbole équilatère.

Nous montrons alors par récurrence que l'on peut supposer

$$j^qf(0) = (x^2+y^3,\ y^2+x^3)$$

pour tout $q \geq 3$. En effet, si cela est vrai à l'ordre $q-1 \geq 3$, on a

$$\begin{aligned} j^qf(0) &= (x^2 + y^3 + a_1x^q + a_2x^{q-1}y + \dots + a_{q+1}y^q,\ \ y^2 + x^3 + b_1x^q + \dots + b_{q+1}y^q) \\ &= (x^2(1+P) + y^3 + axy^{q-1} + by^q,\ \ y^2(1+Q) + x^3 + cyx^{q-1} + dx^q), \end{aligned}$$

où $P$ et $Q$ sont des polynômes de degré $q-2$. Par le changement de variables

$$(x,y) \mapsto (x\sqrt{1+P},\ y\sqrt{1+Q}),$$

on arrive alors à

$$j^qf(0) = (x^2 + y^3 + axy^{q-1} + by^q,\ \ y^2 + x^3 + cyx^{q-1} + dx^q).$$

Comme on a ainsi

$$J^q f(0) = j^q((x + \frac{a}{2} y^{q-1})^2 + y^3 + by^q, \quad (y + \frac{c}{2} x^{q-1})^2 + x^3 + dx^q)(0),$$

le changement

$$(x,y) \mapsto (x + \frac{a}{2} y^{q-1}, \ y + \frac{c}{2} x^{q-1})$$

mène à

$$j^q f(0) = (x^2 + y^3 + by^q, \quad y^2 + x^3 + dx^q).$$

On élimine maintenant les termes en $y^q$ et $x^q$ à l'aide de changements de variables au but en distinguant deux cas. Pour le cas où $q$ est pair, soit $q = 2n$, $n \geq 2$, on effectue le changement au but

$$(u,v) \mapsto (u-bv^n, \ v-du^n)$$

et on arrive à $j^q f(0) = (x^2+y^3, \ y^2+x^3)$. Pour le cas où $q$ est impair, soit $q = 2n+1$, $n \geq 2$, du changement de variables au but

$$(u,v) \mapsto (u-buv^{n-1}, \ v-dvu^{n-1}),$$

on obtient:

$$j^q f(0) = (x^2 + y^3 + bx^2(y^{2n-2}+(n-1)x^3y^{2n-4}), \quad y^2 + x^3 - dy^2(x^{2n-2}+(n-1)y^3x^{2n-4}))$$

qui, par le changement à la source

$$(x,y) \mapsto (x\sqrt{1 - b(y^{2n-2}+(n-1)x^3y^{2n-4})}, \quad y\sqrt{1 - d(x^{2n-2}+(n-1)y^3x^{2n-4})}),$$

mène à

$$j^q f(0) = (x^2 + y^3 + \alpha y^3 x^{2n-2}, \quad y^2 + x^3 + \beta x^3 y^{2n-2}),$$

et on arrive au résultat pour un nouveau changement du même type.

Sachant que pour $q$ assez grand, $(x,y) \mapsto (x^2+y^3, \ y^2+x^3)$ est $q$-déterminée, la proposition est alors démontrée.

REMARQUE A.1. On pourrait améliorer la caractérisation fournie par le lemme en précisant sous quelles conditions le jet d'ordre 2 de $f$ peut être mis sous la forme indiquée, mais ce n'est pas nécessaire pour les besoins de notre article. On remarquera aussi que par le lemme on sait qu'un mouchoir plié en quatre générique est déterminé par son jet d'ordre 3.

## Références

[1] DUBOIS, J.G., DUFOUR, J.-P., Singularités de solutions d'équations aux dérivées partielles, *J. Differential Equations* 60(1985), 174-200.

[2] GOLUBITSKY, M., GUILLEMIN, V., *Stable Mappings and their Singularities*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 14, Springer-Verlag, New York, 1973.

[3] MARTINET, J., *Singularités des fonctions et applications différentiables*, Monografias de matematica da PUC/RJ No 1, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2$^e$ édition, 1977.

[4] MATHER, J.N., Stability of $C^\infty$ mappings. III: Finitely determined map-germs, *Publ. Math. I.H.E.S.* 35(1968), 127-156.

[5] WHITNEY, H., On singularities of mappings of euclidean spaces. I: Mappings of the plane into the plane, *Ann. of Math.*

*Département de génie électro-mécanique*
*Université des sciences et techniques de Masuku*
*Franceville, Garon*

*Reçu le 19 septembre 1986.*
*Revisé le 17 octobre 1986.*