Ann. sc. math. Québec, 1987, vol. 11, no 2, pp. 305-320

GÉNÉRALISATION DE LA SÉRIE GÉOMÉTRIQUE ET APPLICATIONS

François Dubeau et Jean Savoie

Summary

We analyse a generalization of the geometric series and deduce results concerning circulant matrices occurring in periodic splines interpolation problems.

Résumé

Nous analysons une généralisation de la série géométrique et en déduisons des résultats concernant les matrices circulantes rencontrées dans les problèmes d'interpolation à l'aide de fonctions splines périodiques.

1. Introduction

L'interpolation à l'aide de fonctions splines périodiques donne lieu à l'étude de systèmes linéaires formés de matrices dites "circulantes" (cf. [2], [8], [9], [12]). Pour obtenir des majorations d'erreur (cf. [2], [3], [7], [8], [9], [14], [15]) et des développements asymptotiques (cf. [5], [11]), nous devons étudier la régularité de ces matrices et obtenir des estimations de la norme $\|.\|_\infty$ de ces matrices. Ces deux derniers problèmes ont déjà été considérés par différents auteurs (cf. [2], [6], [10], [15]) et l'objectif de notre travail est d'en présenter un traitement unifié et complet à partir d'une généralisation de la série géométrique.

Nous débutons par l'étude d'une généralisation de la série géométrique à laquelle nous associons un polynôme. Cette série et ce polynôme dépendent d'un paramètre. Cette première partie est une extension du travail de R. Stalley [13]. Dans la deuxième partie, nous étudions le comportement des racines du polynôme par rapport au paramètre. Les matrices "circulantes" du problème d'interpolation, pouvant être générées à partir de ce polynôme et d'une matrice de permutation, font l'objet de la dernière partie.

2. Une généralisation de la série géométrique

Si n est un nombre entier et t est un nombre réel, la série

$$K_n(t,z) = \sum_{k=1}^{\infty} (k-t)^n z^k \tag{1}$$

converge absolument pour tout nombre complexe z tel que $|z| < 1$. Cette série est une généralisation de la série géométrique puisque

$$K_o(t,z) = \frac{z}{1-z} .$$

En fait, nous avons

$$K_n(t,z) = (z \frac{\partial}{\partial z} - t)K_{n-1}(t,z), \tag{2}$$

d'où

$$K_n(t,z) = (z \frac{\partial}{\partial z} - t)^n (\frac{z}{1-z}). \tag{3}$$

La première étape consiste à associer un polynôme à cette série.

THÉORÈME 1. *Il existe un polynôme de degré au plus* n, *noté* $p_n(t,.)$, *tel que*

$$K_n(t,z) = \frac{z}{(1-z)^{n+1}} p_n(t,z). \tag{4}$$

DÉMONSTRATION. Procédons par induction sur n. Observons que $p_o(t,z) = 1$ et pour $n \geq 1$ utilisons (2) pour obtenir la relation de récurrence suivante:

(5) $$p_n(t,z) = [(1-t) + (n-1+t)z]p_{n-1}(t,z) + z(1-z)\frac{\partial}{\partial z}p_{n-1}(t,z),$$

qui nous permet de conclure. □

Pour identifier les coefficients de $p_n(t,.)$, posons

$$p_n(t,z) = \sum_{r=0}^{n} f_n(t,r)z^r$$

et utilisons (5). Nous obtenons

$$f_n(t,r) = (n-r+t)f_{n-1}(t,r-1) + (r+1-t)f_{n-1}(t,r)$$

pour $r = 0,\dots,n$. Sachant que $f_0(t,0) = 1$, nous en tirons $f_n(t,0) = (1-t)^n$ et $f_n(t,n) = t^n$, et en procédant par induction sur n, nous obtenons le résultat suivant.

THÉORÈME 2. *Les* $n+1$ *coefficients de* $p_n(t,.)$ *sont*

$$f_n(t,r) = \sum_{m=0}^{r} (-1)^m\binom{n+1}{m}(r+1-t-m)^n = \nabla^{n+1}[(r+1-t)^n\chi_{[0,\infty)}(r)]$$

pour $r = 0,\dots,n$, *où* χ_A *est la fonction caractéristique de l'ensemble* A *et* ∇ *est l'opérateur aux différences finies régressives.* □

Ainsi nous obtenons la formule

$$K_n(t,z) = \frac{z}{(1-z)^{n+1}} \sum_{r=0}^{n} z^r\nabla^{n+1}[(r+1-t)^n\chi_{[0,\infty)}(r)]$$

qui ramène le calcul de la série infinie (1) à un nombre fini d'opérations élémentaires.

REMARQUE 1. Notons que $p_0(t,z) = 1$ tandis que pour tout $n \geq 1$ le polynôme $p_n(t,.)$ est de degré n si et seulement si $t \neq 0$, car $f_n(t,n) = t^n$. Puisque

(6) $$K_n(1,z) = z\,K_n(0,z),$$

nous en déduisons que

$$p_n(1,z) = z\, p_n(0,z) \tag{7}$$

et $p_n(0,.)$ est un polynôme de degré $n-1$.

REMARQUE 2. De (5) nous obtenons $p_n(t,1) = n\, p_{n-1}(t,1)$, ainsi $p_n(t,1) = n!$

REMARQUE 3. Sachant que $\nabla^{n+1}q(x) = 0$ à chaque fois que $q(.)$ est un polynôme de degré inférieur à $n+1$, nous avons

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla^{n+1}(r+1-t)^n \\ &= \sum_{m=0}^{r} (-1)^m \binom{n+1}{m} (r+1-t-m)^n + \sum_{m=r+1}^{n+1} (-1)^m \binom{n+1}{m} (r+1-t-m)^n \\ &= f_n(t,r) - f_n(1-t,\ n-r) \end{aligned}$$

d'où $f_n(t,r) = f_n(1-t,\ n-r)$, ce qui nous permet d'établir

$$p_n(t,z) = z^n\, p_n(1-t,\ 1/z). \tag{8}$$

REMARQUE 4. Nous pouvons démontrer le Théorème 2 directement. En effet, de (1) et (4) nous avons

$$p_n(t,z) = (1-z)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1-t)^n z^k.$$

Utilisons la formule du binôme de Newton pour développer $(1-z)^{n+1}$. Après multiplication et réorganisation des termes, nous obtenons

$$p_n(t,z) = \sum_{r=0}^{n} z^r \nabla^{n+1}[(r+1-t)^n \chi_{[0,\infty)}(r)] + \sum_{r=n+1}^{\infty} z^r \nabla^{n+1}(r+1-t)^n$$

et le résultat suit puisque tous les termes de la deuxième sommation sont nuls.

REMARQUE 5. En posant $k-t = (k-t') + (t'-t)$ et en utilisant la formule du binôme de Newton pour développer $(k-t)^n$, nous obtenons de (1)

$$K_n(t,z) = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} (t'-t)^{n-\ell} K_\ell(t',z). \tag{9}$$

En posant successivement $t' = 0$ et $t' = 1$, nous obtenons

$$K_n(t,z) = \sum_{\ell=0}^{n} (-1)^{n-\ell} t^{n-\ell} \binom{n}{\ell} K_\ell(0,z) \tag{10}$$

et

$$K_n(t,z) = \sum_{\ell=0}^{n} (1-t)^{n-\ell} \binom{n}{\ell} K_\ell(1,z). \tag{11}$$

Ainsi $K_n(t,z)$ est un polynôme de degré au plus n par rapport à t. De plus, si nous posons $t = 1$ dans (10) et utilisons (6), nous obtenons pour $n \geq 1$,

$$K_n(0,z) = -\frac{1}{1-z} \sum_{\ell=0}^{n-1} (-1)^{n-\ell} \binom{n}{\ell} K_\ell(0,z). \tag{12}$$

De la même façon, posons $t = 0$ dans (11) et utilisons (6), nous en déduisons, pour $n \geq 1$,

$$K_n(1,z) = \frac{z}{1-z} \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n}{\ell} K_\ell(1,z). \tag{13}$$

Ainsi les expressions (10) et (12), respectivement (11) et (13), nous permettent de calculer récursivement $K_n(t,z)$ à partir de $K_o(t,z) = z/(1-z)$.

REMARQUE 6. Comme $f_n(t,r)$ est un polynôme par rapport à t de degré au plus n, nous en déduisons que $p_n(\cdot,\cdot)$ est indéfiniment différentiable par rapport à ses arguments, ce que nous noterons par $p(.,.) \in C^\infty(R^2;R)$.

Terminons cette section en étudiant la variation de $K_n(t,z)$ et de $p_n(t,z)$ par rapport au paramètre t.

THÉORÈME 3. *Pour* $i = 1,\ldots,n$, *nous avons*

$$\frac{\partial^i}{\partial t^i} K_n(t,z) = (-1)^i (n)_i K_{n-i}(t,z) \tag{14}$$

et

$$\frac{\partial^i}{\partial t^i} p_n(t,z) = (-1)^i (n)_i (1-z)^i p_{n-i}(t,z) \tag{15}$$

où $(n)_i = n!/(n-i)!$.

DÉMONSTRATION. En utilisant (3), nous obtenons

$$\frac{\partial}{\partial t} K_n(t,z) = \frac{\partial}{\partial t} (z \frac{\partial}{\partial z} - t)^n (\frac{z}{1-z})$$

$$= -n(z \frac{\partial}{\partial z} - t)^{n-1} (\frac{z}{1-z})$$

$$= -n \; K_{n-1}(t,z).$$

Ceci nous permet d'établir (14). Nous obtenons (15) en utilisant (14) et (4). □

REMARQUE 7. Observons que

$$\frac{\partial^i}{\partial t^i} f_n(t,r) = \frac{\partial^i}{\partial t^i} \nabla^{n+1}[(r+1-t)^n \chi_{[0,\infty)}(r)]$$

$$= (-1)^i (n)_i \nabla^{n+1}[(r+1-t)^{n-i} \chi_{[0,\infty)}(r)]$$

$$= (-1)^i (n)_i \nabla^i \nabla^{n+1-i}[(r+1-t)^{n-i} \chi_{[0,\infty)}(r)]$$

$$= (-1)^i (n)_i \nabla^i f_{n-i}(t,r).$$

Ainsi, de (15), nous avons

$$(1-z)^i p_{n-i}(t,z) = \sum_{r=0}^{n} z^r \nabla^i f_{n-i}(t,r).$$

3. Étude des racines de $p_n(t,.)$

Notre objectif maintenant est de connaître le comportement des racines de $p_n(t,.)$ par rapport au paramètre t. Pour les applications au problème d'interpolation, il suffit de savoir ce qui se passe lorsque le paramètre t est dans l'intervalle $[0,1]$. Dans cette section nous obtenons le comportement des racines de $p_n(t,.)$ lorsque le paramètre t est dans un voisinage de l'intervalle $[0,1]$. Pour y arriver nous distinguons deux situations: $t \in (0,1)$ et $t = 1$ (ou 0). Nous obtenons alors les résultats suivants.

THÉORÈME 4. *Supposons* $t \in (0,1)$.

(a) *Le polynôme* $p_n(t,.)$ *possède* n *racines réelles distinctes strictement négatives.*

(b) *Si* $-\nu$ *est une racine de* $p_n(t,.)$, *alors* $-1/\nu$ *est une racine de* $p_n(1-t,.)$.

DÉMONSTRATION. (a) Procédons par induction. Le résultat est vrai pour $n = 1$ car $p_1(t,z) = tz + (1-t)$. Pour $n \geq 2$, supposons que $p_{n-1}(t,.)$ possède $n-1$ racines réelles distinctes strictement négatives, notées $z_{n-1,i}(t)$ pour $i = 1,\dots,n-1$, telles que

$$z_{n-1,n-1}(t) < \dots < z_{n-1,i}(t) < \dots < z_{n-1,1}(t) < 0.$$

Sachant que $p_{n-1}(t,0) = (1-t)^{n-1}$ et que les racines de $p_{n-1}(t,.)$ sont simples, nous en déduisons que

$$\text{signe}\left[\frac{\partial}{\partial z} p_{n-1}(t,z_{n-1,i}(t))\right] = (-1)^{i+1} \tag{16}$$

pour $i = 1,\dots,n-1$. Alors, en utilisant (5) et (16), nous obtenons

$$\text{signe}[p_n(t,z_{n-1,i}(t))] = (-1)^i$$

pour $i = 1,\dots,n-1$. De plus, lorsque z prend des valeurs négatives suffisamment grandes, nous avons

$$\text{signe}[p_n(t,z)] = \text{signe}[t^n z^n] = (-1)^n.$$

Ainsi $p_n(t,.)$ a n changements de signes sur l'intervalle $(-\infty,0)$, nous en déduisons l'existence de n racines distinctes strictement négatives, notées $z_{n,i}(t)$ pour $i = 1,\dots,n$, telles que

$$z_{n,i+1}(t) < z_{n-1,i}(t) < z_{n,i}(t) \tag{17}$$

pour $i = 1,\dots,n-1$.

(b) Ce résultat est une conséquence directe de (8). □

Comme $p_n(1,z) = z\, p_n(0,z)$, nous sommes assurés que $p_n(1,z)$ possède une racine nulle.

THÉORÈME 5. *Supposons* $t = 1$.

(a) *Le polynôme* $p_n(1,.)$ *possède la racine* $z = 0$ *et* $n-1$ *autres racines réelles distinctes strictement négatives.*

(b) *Si* $-\nu$ *est une racine non nulle de* $p_n(1,.)$, *alors* $-1/\nu$ *est également une racine de* $p_n(1,.)$.

DÉMONSTRATION. (a) Si nous procédons de la même façon qu'au Théorème 4, et observons que $p_n(1,0) = 0$ et $\frac{\partial}{\partial z} p_n(1,0) = 1$, nous en déduisons que $p_n(1,.)$ possède n racines réelles distinctes négatives, notées $z_{n,i}(1)$ pour $i = 1,\dots,n$, telles que $z_{n,1}(1) = 0$ et

$$z_{n,i+1}(1) < z_{n-1,i}(1) < z_{n,i}(1) \tag{18}$$

pour $i = 2,\dots,n-1$.

(b) Ce résultat est une conséquence directe de (7) et (8). □

REMARQUE 8. Le Théorème 5 a été démontré initialement par Ahlberg et al [2, p. 135]. Notre démonstration est légèrement différente et nous permet d'établir (18).

REMARQUE 9. En utilisant les notations précédentes, nous avons $z_{n,i}(0) = z_{n,i+1}(1)$ pour $i = 1,\dots,n-1$ et, selon (8), $z_{n,i}(t) = 1/z_{n,n+1-i}(1-t)$ lorsque les deux racines existent. Cette dernière relation peut servir à définir les racines de $p_n(t,.)$ à partir des racines de $p_n(1-t,.)$ comme il sera utile de le faire dans le prochain théorème.

Pour chaque $t \in [0,1]$, nous avons défini une i-ième racine $z_{n,i}(t)$ du polynôme $p_n(t,.)$. La prochaine étape consiste à relier entre elles ces différentes i-ième racines à l'aide du théorème des fonctions implicites.

THÉORÈME 6. *Pour tout* $n \geq 1$, *il existe un nombre réel* ε *strictement positif et* n *fonctions, notées* $z_{n,i}(.)$ *pour* $i = 1,\dots,n$, *telles que* $z_{n,i}(t)$ *est la i-ième racine de* $p_n(t,.)$ *pour tout* $t \in (-\varepsilon,1+\varepsilon)$ *(sauf pour* $i = n$ *lorsque* $t = 0$*). De plus,*

(a) $z_{n,1}(.) \in C^\infty((-\varepsilon,1+\varepsilon);\mathbb{R})$, $z_{n,1}(.)$ *est strictement croissante sur* $(-\varepsilon,1]$ *et* $z_{n,1}(.)$ *est strictement croissante, respectivement décroissante, sur* $[1,1+\varepsilon)$ *si* n *est impair, respectivement pair;*

(b) *pour* $i = 2,\dots,n-1$, $z_{n,i}(.) \in C^\infty((-\varepsilon,1+\varepsilon);\mathbb{R})$ *et* $z_{n,i}(.)$ *est strictement croissante sur* $(-\varepsilon,1+\varepsilon)$;

(c) $z_{n,n}(.) \in C^\infty((-\varepsilon,0) \cup (0,1+\varepsilon);\mathbb{R})$, $z_{n,n}(.)$ *est strictement croissante sur* $(0,1+\varepsilon)$, $z_{n,n}(.)$ *est strictement croissante, respectivement décroissante, sur* $(-\varepsilon,0)$ *si* n *est impair, respectivement pair, et*

$$\lim_{t\to 0^+} z_{n,n}(t) = -\infty$$

$$\lim_{t\to 0^-} z_{n,n}(t) = \begin{cases} +\infty & \textit{si } n \textit{ est impair} \\ -\infty & \textit{si } n \textit{ est pair.} \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Considérons $t \in (0,1]$ et observons que

(i) $p_n(.,.) \in C^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ (d'après la Remarque 6),

(ii) pour chaque $t \in (0,1]$ le couple $(t,z_{n,i}(t)) \in (0,1] \times (-\infty,0]$,

(iii) $\left.\frac{\partial}{\partial z} p_n(t,z)\right|_{z=z_{n,i}(t)} \neq 0$ car $z_{n,i}(t)$ est une racine simple de $p_n(t,.)$,

(iv) $p_n(t,z_{n,i}(t)) = 0$.

Ainsi pour chaque $t_o \in (0,1]$ et chaque $i = 1,\dots,n$, il existe une application continue $z_{n,i}(.)$ définie sur un voisinage U_o de t_o telle que $p_n(t,z_{n,i}(t)) = 0$ pour tout $t \in U_o$. Par continuité des $z_{n,i}(.)$ on peut choisir U_o suffisamment petit pour que $z_{n,i}(t)$ soit la i-ième racine de $p_n(t,.)$ pour tout $t \in U_o$. On montre alors par recouvrement de compacts, que

a) $z_{n,i}(.) \in C^\infty((0,1+\varepsilon);\mathbb{R})$,

b) $z_{n,i}(t)$ est la i-ième racine de $p_n(t,.)$,

c) $z_{n,i+1}(t) < z_{n,i}(t)$ pour $i = 1,\dots,n-1$ et $t \in (0,1+\varepsilon)$.

De plus,

$$\frac{d}{dt} z_{n,i}(t) = - \left.\frac{\frac{\partial}{\partial t} p_n(t,z)}{\frac{\partial}{\partial z} p_n(t,z)}\right|_{z=z_{n,i}(t)}$$

et, en utilisant (15), (16), (17) et le fait que $p_{n-1}(t,0) > 0$ lorsque $t \in (0,1)$, nous obtenons $\text{signe}[\frac{d}{dt} z_{n,i}(t)] = +1$, ce qui démontre la croissance stricte des $z_{n,i}(\cdot)$ sur l'intervalle $(0,1)$.

Pour compléter la démonstration de la partie (b), il suffit de remarquer que nous pouvons inclure les points $t = 0$ et $t = 1$ dans les étapes précédentes pour $i = 2,\dots,n-1$.

Pour obtenir la partie (a), nous pouvons inclure comme précédemment le point $t = 0$. Pour $t = 1$, considérons l'identité $p_n(t,z_{n,1}(t)) = 0$ valide pour t dans un voisinage de $t = 1$. En prenant la k-ième dérivée par rapport à t, nous obtenons

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} p_n(t,z)\Big|_{(t,z)=(1,0)} + \frac{\partial}{\partial z} p_n(t,z) \frac{d^k}{dt^k} z_{n,1}(t)\Big|_{(t,z)=(1,0)}$$

$$+ \sum_{\ell=1}^{k-1} g_{n,\ell}(t) \frac{d^\ell}{dt^\ell} z_{n,1}(t)\Big|_{t=1} = 0,$$

où les $g_{n,\ell}(\cdot)$ sont des fonctions régulières. En utilisant (15) et en observant que $\frac{\partial}{\partial z} p_n(t,z)\Big|_{(t,z)=(1,0)} = f_n(1,1) = 1$, nous obtenons

$$\frac{d^k}{dt^k} z_{n,1}(t)\Big|_{t=1} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le k < n, \\ (-1)^{n+1} n! & \text{si } k = n, \end{cases}$$

ce qui nous permet d'achever la démonstration de (a).

Finalement, nous obtenons (c) de (a) en utilisant la relation $z_{n,n}(t) = 1/z_{n,1}(1-t)$. □

Des parties (b) des Théorèmes 4 et 5 et du Théorème 6, nous obtenons le résultat suivant.

THÉORÈME 7. *Pour chaque entier* $n \ge 1$ *il existe un* $\varepsilon > 0$ *tel que, sur l'intervalle* $(-\varepsilon,1+\varepsilon)$, $p_n(t,-1) = 0$ *si et seulement si* n *est impair et* $t = \frac{1}{2}$ *ou* n *est pair et* $t = 0$ *ou* 1. □

REMARQUE 10. En utilisant (5) et sachant que $p_n(t,z)$ est un polynôme de degré n par rapport à t, nous obtenons

$$\lim_{t\to\infty} \frac{p_n(t,z)}{t^n} = (z-1)^n.$$

Ainsi, à partir de quelques exemples $(n = 1,2,3)$, il semble que pour tout t hors de l'intervalle $(-\varepsilon,1+\varepsilon)$ les racines de $p_n(t,.)$ se déplacent vers 1 lorsque t tend, par valeurs positives ou négatives, vers l'infini. De plus, lorsque deux racines réelles se rencontrent, elles donnent naissance à deux racines complexes conjuguées.

3. Application aux matrices circulantes

Considérons la matrice de permutation P d'ordre N définie par

$$P = \mathrm{circ}(0,1,0,\ldots,0)$$

où $\mathrm{circ}(a_1,\ldots,a_N)$ désigne une matrice circulante ayant les éléments $a_1,\ldots,a_N$ sur sa première rangée (cf. Davis [4, p. 66]). Dans cette section, nous étudions la régularité des matrices $p_n(t,P)$ et obtenons des majorations de la norme $\|.\|_\infty$ de ces matrices et de leurs inverses.

Considérons le polynôme élémentaire $p(z) = z-a$ où $a \in \mathbb{C}$. Nous utiliserons dans la suite le résultat suivant.

THÉORÈME 8. *Si* $p(P) = P - aI$, *nous avons*

(a) $\|p(P)\|_\infty = 1 + |a|$;

(b) $p(P)$ *est inversible si et seulement si* $a^N \neq 1$. *Dans ce cas, l'inverse est une matrice circulante de la forme*

$$p(P)^{-1} = \frac{1}{1-a^N} \sum_{i=0}^{N-1} a^{N-1-i}P^i$$

et

$$\|p(P)^{-1}\|_\infty = \frac{1}{|1-a^N|}\sum_{i=0}^{n-1}|a|^{N-1-i} = \begin{cases} \dfrac{1-|a|^N}{|1-a^N|(1-|a|)} & |a| \neq 1, \\ \dfrac{N}{|1-a^N|} & |a| = 1. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. (a) Par définition de $p(P)$ et de la norme $\|.\|_\infty$.

(b) Voir Davis [4, p. 89] et par définition de la norme $\|.\|_\infty$. □

Lorsque a est réel, le Théorème 8 donne les résultats suivants.

COROLLAIRE 9. *Si* $p(P) = P - aI$ *et* $a \in \mathbb{R}$, *alors*

$$\|p(P)\|_\infty = \begin{cases} 1+a = |p(-1)| & si \quad a \geq 0, \\ 1-a = p(1) & si \quad a \leq 0. \end{cases}$$

COROLLAIRE 10. *Si* $p(P) = P - aI$, $a \in \mathbb{R}$ *et*

(a) *si* $|a| = 1$, *alors* $p(P)$ *est inversible et*

$$\|p(P)^{-1}\|_\infty \leq \begin{cases} \dfrac{1}{|p(1)|} & a \geq 0, \\ \dfrac{1}{|p(-1)|} & a \leq 0; \end{cases}$$

(b) *si* $|a| = 1$, *alors* $p(P)$ *est inversible si et seulement si* $a = -1$ *et* N *est impair. Dans ce cas,* $\|p(P)^{-1}\|_\infty = N/2$.

Les matrices circulantes de la théorie de l'interpolation à l'aide de fonctions splines pédiodiques sont définies par

$$\begin{aligned} p_n(t,P) &= \sum_{r=0}^{n} f_n(t,r)P^r \\ &= \mathrm{circ}(f_n(t,0), f_n(t,1), \ldots, f_n(t,n), 0, \ldots, 0). \end{aligned}$$

Nous obtenons alors les résultats suivants.

THÉORÈME 11. *Pour tout* $t \in [0,1]$, *nous avons*

$$\|p_n(t,P)\|_\infty = p_n(t,1) = n!$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer que les $f_n(t,r)$ sont tous positifs ou nuls pour tout $t \in [0,1]$. □

THÉORÈME 12. *Supposons* $t \in [0,1]$.

(a) *Si*

(i) n *est impair et* $t \neq \frac{1}{2}$,

(ii) n *est pair et* $t \neq 0$ *et* $t \neq 1$,

alors $p_n(t,P)$ *est inversible et* $\|p_n(t,P)^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{|p_n(t,-1)|}$.

(b) *Si*

(i) n *est impair et* $t = \frac{1}{2}$,

(ii) n *est pair et* $t = 0$ *ou* $t = 1$,

alors

$$p_n(t,z) = (z+1)q_n(t,z) \tag{19}$$

et $p_n(t,P)$ *est inversible si et seulement si* N *est impair. Dans ce cas,* $p_n(t,P)^{-1} = (P+I)^{-1}q_n(t,P)^{-1}$ *et*

$$\|p_n(t,P)^{-1}\|_\infty \leq \|(P+I)^{-1}\|_\infty \ \|q_n(t,P)^{-1}\|_\infty \leq \frac{N}{2|q_n(t,-1)|}.$$

DÉMONSTRATION. D'après les Théorèmes 4 et 5, nous pouvons factoriser le polynôme $p_n(t,z)$ comme suit:

$$p_n(t,z) = \begin{cases} t^n \prod_{i=1}^{n} (z-z_{n,i}(t)) & \text{si } t \in (0,1], \\ \prod_{i=1}^{n-1} (z-z_{n,i}(0)) & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Nous utilisons alors le Théorème 7 et le Corollaire 10 pour conclure. □

REMARQUE 11. De (15) nous avons $\frac{\partial}{\partial t} p_n(t,-1) = -2n\, p_{n-1}(t,-1)$. Ainsi

$$\frac{\partial}{\partial t} p_n(t,-1) = 0 \text{ si et seulement si } \begin{cases} n \text{ est pair et } t = \frac{1}{2}, \\ n \text{ est impair et } t = 0 \text{ ou } 1. \end{cases}$$

De plus, $\frac{\partial^2}{\partial t^2} p_n(t,-1) = 4n(n-1)p_{n-2}(t,-1)$ et $\frac{\partial^2}{\partial t^2} p_n(t,-1) \neq 0$ aux points où

$\frac{\partial}{\partial t} p_n(t,-1) = 0$ sur l'intervalle $(-\varepsilon,1+\varepsilon)$. Ainsi, nous en déduisons que $|p_n(t,-1)|$ est maximum sur un intervalle $(-\varepsilon,1+\varepsilon)$ pour ε suffisamment petit si et seulement si n est pair et $t = \frac{1}{2}$ ou n est impair et $t = 0$ ou 1. Ces deux situations correspondent à l'interpolation à l'aide de fonctions splines périodiques de degré pair, respectivement impair, avec points de collocation aux points milieux, respectivement aux extrémités, des sous-intervalles.

Il nous reste à estimer $p_n(t,-1)$ et $q_n(t,-1)$. Des relations (5) et (19) nous obtenons $q_n(t,-1) = -\frac{1}{2} p_{n+1}(t,-1)$ lorsque n est impair et $t = \frac{1}{2}$ ou lorsque n est pair et $t = 0$ ou 1. Il suffit ainsi d'évaluer $p_n(t,-1)$.

THÉORÈME 13. *Pour tout* $n \geq 0$, *nous avons*

$$p_n(t,-1) = (-1)^n 2^n E_n(t) \tag{20}$$

où $E_n(t)$ *est le polynôme d'Euler de degré* n.

DÉMONSTRATION. Remplaçons z par $-e^{-x}$ avec $x > 0$ dans (1) et (4). Nous obtenons

$$\frac{-e^{-x}}{(1+e^{-x})^{n+1}} p_n(t,-e^{-x}) = (-1)^{n+1} e^{-tx} \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{e^{tx}}{1+e^x}\right).$$

Mais

$$\frac{e^{tx}}{1+e^x} = \frac{1}{2} \sum_{\ell=0}^{\infty} E_\ell(t) \frac{x^\ell}{\ell!}$$

pour tout $|x| < \pi$ (voir Abramowitz et Stegun [1, p. 804]). Le résultat suit en prenant la limite lorsque x tend vers 0. □

Sachant que le n-ième nombre d'Euler est défini par $E_n = 2^n E_n(\frac{1}{2})$ et que $E_n(0) = -2 \frac{2^{n+1}-1}{n+1} B_{n+1}$ où B_n est le n-ième nombre de Bernoulli, nous obtenons de (20)

$$p_n(\tfrac{1}{2},-1) = (-1)^n E_n$$

et

$$p_n(0,-1) = (-1)^{n+1} 2^{n+1} \frac{2^{n+1}-1}{n+1} B_{n+1} .$$

On retrouve ainsi un résultat dû à Kershaw [10].

Bibliographie

[1] ABRAMOWITZ, M., STEGUN, I.A., *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, 1965.

[2] AHLBERG, J.L., NILSON, E.N., WALSH, J.L., *The Theory of Splines and their Applications*, Academic Press, New York, 1967.

[3] ALBASINY, E.L., HOSKINS, W.D., Explicit error bounds for periodic splines of odd order on a uniform mesh, *J. Inst. Math. Applics* 12(1973), 303-318.

[4] DAVIS, P.J., *Circulant Matrices*, J. Wiley and Sons, New York, 1979.

[5] DIKSHIT, H.P., SHARMA, A., TZIMBALARIO, J., Asymptotic error expansions for spline interpolation, *Canad. Math. Bull.* 27(1984), 337-344.

[6] DUBEAU, F., On band circulant matrices in the periodic spline interpolation theory, *Linear Algebra and Appl.* 72(1985), 177-182.

[7] DUBEAU, F., SAVOIE, J., Periodic even degree spline interpolation on a uniform partition, *J. of Approx. Theory* 44(1985), 43-54.

[8] FYFE, D.J., Linear dependance relations connecting equal interval N^{th} degree splines and their derivatives, *J. Inst. Math. Applics* 7(1971), 398-406.

[9] HOSKINS, W.D., MEEK, D.S., Linear dependance relations for polynomial splines at midknots, *BIT* 15(1975), 272-276.

[10] KERSHAW, D., A bound on the inverse of a band matrix which occurs in interpolation by periodic odd order splines, *J. Inst. Math. Applics* 20(1977), 227-228.

[11] LUCAS, T.R., Asymptotic expansions for interpolating periodic splines, *SIAM J. Numer. Anal.* 19(1982), 1051-1066.

[12] MEEK, D., Some new linear relations for even degree polynomial splines on a uniform mesh, *BIT* 20(1980), 382-384.

[13] STALLEY, R., A generalization of the geometric series, *Amer. Math. Monthly* (1949), 325-327.

[14] SWARTZ, B., $O(h^{2n+2-\ell})$ bounds on some spline interpolation errors, *Bull. Amer. Math. Soc.* 74(1968), 1072-1078.

[15] SWARTZ, B., $O(h^{2n+2-\ell})$ bounds on some spline interpolation errors, LA-3886, *Los Alamos Scientific Laboratory*, Los Alamos, N.M., 1968.

Département de mathématiques
Collège militaire royal de Saint-Jean
Saint-Jean-sur-Richelieu, Québec J0J 1R0

Manuscrit reçu le 17 septembre 1985.
Revisé le 7 mars 1986.