Ann. sc. math. Québec, 1987, vol. 11, no 2, pp. 295-303

CARACTÉRISATION D'UN ESPACE PRÉHILBERTIEN AU MOYEN DE LA RELATION D'ORTHOGONALITÉ DE BIRKHOFF-JAMES

Jocelyn Desbiens

Summary

In this paper we show that if one of the following orthogonalities: Roberts orthogonality, Isoceles orthogonality, or Pythagorian orthogonality is implied by the Birkhoff-James orthogonality then the underlying space is an inner-product space.

Résumé

Dans cet article nous montrons que si la relation d'orthogonalité telle que définie par Birkhoff-James implique soit l'orthogonalité de Roberts, soit l'orthogonalité isocèle ou soit l'orthogonalité de Pythagore alors l'espace considéré est préhilbertien.

1. Introduction

Quelques définitions généralisant aux espaces vectoriels normés la notion classique d'orthogonalité (cf. [1], [2], [6], [7] et [10]) telle qu'entendue dans le cadre des espaces préhilbertiens (nommément $x \perp y \Longleftrightarrow \langle x,y\rangle = 0$) ont été données depuis 1934, date de la parution de l'article de Roberts [10]. La plus importante quant à la richesse de ses applications fut sans doute la définition donnée par Birkhoff [1] et reprise peu après par James [7]. C'est celle-ci que nous désignerons sous le vocable d'orthogonalité de Birkhoff-James.

On s'est souvent servi du fait que l'une quelconque de ces relations d'orthogonalité en impliquait une autre pour caractériser les espaces préhilbertiens (cf. [1], [2], [3], [5]). Cependant fort peu de ces caractérisations tenaient compte de la relation d'orthogonalité de Birkhoff-James (cf. [1], [2]). Le but du présent article est de combler cette lacune en montrant que si la relation d'orthogonalité de Birkhoff-James entraîne l'une quelconque des relations d'orthogonalité définies ci-dessous, alors l'espace vectoriel normé considéré est préhilbertien.

2. Notations

Dans cet article, $(E,\|.\|)$ désignera toujours un espace vectoriel normé réel (e.v.n.), S la sphère unité de E c'est-à-dire $S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$ et $C(x,y) = S \cap P$ où P est le plan contenant les vecteurs indépendants x, y et l'origine Θ. Donc $C(x,y)$ est le cercle unité dans le plan P. Nous le noterons par C lorsque le contexte sera clair. Par $\dim(E)$ nous dénoterons toujours la dimension algébrique de E et par $[x,y]$ le segment de droite ayant les vecteurs x, y comme extrémités.

3. Rappels

DÉFINITION 1. Soit $(x,y) \in E^2$. Nous dirons que

1) x est *orthogonal à* y *au sens de Birkhoff-James*, ce que nous noterons par $x \perp_{BJ} y$, si et seulement si: $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$, $\forall \lambda \in R$.

2) x est *orthogonal à* y *au sens isocèle*, ce que nous noterons par $x \perp_I y$, si et seulement si: $\|x + y\| = \|x - y\|$.

3) x est *orthogonal à* y *au sens de Roberts*, ce que nous noterons par $x \perp_R y$, si et seulement si: $\|x + \lambda y\| = \|x - \lambda y\|$, $\forall \lambda \in R$.

4) x est *orthogonal à* y *au sens de Pythagore*, ce que nous noterons par $x \perp_P y$, si et seulement si: $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

La relation d'orthogonalité de Birkhoff-James a les propriétés suivantes:

LEMME 1 (James [7], corollaire (2.2) et théorème(2.3)). *Soit* E *un e.v.n. Alors pour tout couple de vecteurs* $(x,y) \in E^2$ *on a:*

1) $x \perp_{BJ} y \Rightarrow \alpha x \perp_{BJ} \beta y, \quad \forall(\alpha,\beta) \in R^2.$

2) *Il existe au moins un couple* $(\alpha,\beta) \in R^2$ *tel que:* $x + \alpha y \perp_{BJ} y$ *et* $x \perp_{BJ} \beta x + y$.

De façon générale, la relation d'orthogonalité de Birkhoff-James n'est pas symétrique, c'est-à-dire: $x \perp_{BJ} y \not\Rightarrow y \perp_{BJ} x$. En fait, comme le montre le résultat suivant dû à James, la symétrie de l'orthogonalité est caractéristique des espaces préhilbertiens de dimension supérieure à 2.

LEMME 2 (James [8], théorème (1)). *Soit* E *un e.v.n. avec* $\dim(E) \geq 3$. *Pour que la norme sur* E *soit issue d'un produit scalaire il faut et il suffit que la relation d'orthogonalité de Birkhoff-James soit symétrique.*

Nous aurons de plus besoin des lemmes et des définitions suivants:

LEMME 3 (James [7], théorème (2.3)). *Soit* E *un e.v.n. et* $(x,y) \in E^2$. *Définissons* $\varphi: R \to R$ *par la formule:*

$$\varphi(\lambda) = \|x + \lambda y\|, \qquad \forall\lambda \in R.$$

Alors φ *est continue et convexe sur tout* R. *De plus, pour que* $\gamma \in R$ *soit un minimum de la fonction* φ, *il faut et il suffit que* $x + \gamma y \perp_{BJ} y$.

LEMME 4 (James [6], corollaire (4.7)). *Soit* E *un e.v.n. Si pour tout vecteur* $x \in E$ *et tout plan* P *contenant* x *et l'origine* Θ *il existe un vecteur non nul* $y \in P$ *tel que* $x \perp_R y$, *alors* E *est préhilbertien.*

DÉFINITION 2. Soit E un e.v.n. E est *strictement* convexe si et seulement si pour tout couple de vecteurs $(x,y) \in E^2$ on a:

$$x \neq y \quad \text{et} \quad \|x\| = \|y\| \leq 1 \Rightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1.$$

Une définition équivalente est que toute droite tangente à la sphère unité S ne coupe celle-ci qu'en un seul point.

LEMME 5 (James [7], théorème (4.3)). *Soit* E *un e.v.n. Pour que* E *soit strictement convexe, il faut et il suffit que pour tout couple de vecteurs* $(x,y) \in E^2$ *avec* $y \neq \Theta$ *il existe un unique nombre réel* γ *tel que* $x + \gamma y \perp_{BJ} y$.

DÉFINITION 3 (Joly [9]). Soit E un e.v.n. On définit la *constante rectangle* de l'espace E, que l'on note $\mu(E)$, par la formule:

$$\mu(E) = \sup_{x \perp_{BJ} y} \frac{\|x\| + \|y\|}{\|x + y\|} .$$

Joly [9] a montré que $\sqrt{2} \leq \mu(E) \leq 3$. On a en fait la caractérisation suivante:

LEMME 6 (Del Rio et Benitez [4]). *Soit* E *un e.v.n. Pour que la norme sur* E *soit issue d'un produit scalaire, il faut et il suffit que* $\mu(E) = \sqrt{2}$.

4. Résultat principal

Bien que le théorème principal soit une conséquence directe du Lemme 10, nous préférons débuter la preuve par une argumentation géométrique.

LEMME 7. *Soit* E *un e.v.n. et* x, y, z *trois points distincts de* S. *Si* x, y *et* z *sont colinéaires, alors* S *contient le segment de droite délimité par ces trois points.*

PREUVE. Supposons que x, y et z soient colinéaires et, quitte à permuter les symboles, que $y \in [x,z]$. Soit $w = \lambda x + (1-\lambda)z$, $0 \leq \lambda \leq 1$, un point du segment $[x,z]$. Alors $\|w\| \leq 1$. En effet,

$$\begin{aligned} \|w\| &= \|\lambda x + (1-\lambda)y\| \\ &\leq \lambda\|x\| + (1-\lambda)\|y\| \\ &= \lambda + 1 - \lambda \\ &= 1. \end{aligned}$$

Soit maintenant $w \in [y,z]$. Puisque $y \in [x,z]$ on peut poser que $w = (1-\lambda)x + \lambda y$ pour un certain $\lambda \geq 1$. Mais

$$\begin{aligned} \|(1-\lambda)x + \lambda y\| &\geq \big|\,|\lambda|\|y\| - |1-\lambda|\|x\|\,\big| \\ &= \big|\lambda - |1-\lambda|\big| \\ &= 1. \end{aligned}$$

Donc $\|w\| = 1$, $\forall w \in [y,z]$. Par symétrie $\|w\| = 1$, $\forall w \in [x,y]$. Donc $[x,z] \subset S$. □

LEMME 8. *Soit* E *un e.v.n. Si*

$$(\forall (x,y) \in E^2)(x \perp_{BJ} y \Rightarrow x \perp_I y).$$

alors la relation d'orthogonalité de Birkhoff-James définie sur E *est symétrique.*

PREUVE. Montrons tout d'abord que E est strictement convexe. Pour ce, soit $(x,y) \in E^2$ avec $y \neq \Theta$. On sait (lemme (1.2)) qu'il existe au moins un nombre $\gamma \in R$ tel que $x + \gamma y \perp_{BJ} y$ et que ce nombre (Lemme 3) minimise la fonction φ (telle que définie au Lemme 3). Nous allons maintenant montrer que ce nombre γ est unique. Supposons, sans perte de généralité, que $\gamma = 0$. Posons

$$M = \{\lambda \in R \mid \varphi(\lambda) = \varphi(0)\}.$$

Par la convexité et la continuité de la fonction φ (Lemme 3), on a que $M = [\alpha,\beta]$, un intervalle fermé borné contenant $\gamma = 0$. Supposons maintenant que $\beta > 0$. Puisque $x + \beta y \perp_{BJ} y$, alors, par le lemme (1.1), $x + \beta y \perp_{BJ} y$, $\forall \lambda \in R$. Donc par hypothèse, $x + \beta y \perp_I \lambda y$, $\forall \lambda \in R \Rightarrow \varphi(\beta+\lambda) = \varphi(\beta-\lambda)$, $\forall \lambda \in R$. Ce qui entraîne une contradiction si $\beta > 0$. En conclusion, $\beta = 0$. De façon similaire, on obtient que $\alpha = 0$. Ainsi γ est l'unique minimum de la fonction φ ou, en terme équivalent, γ est l'unique nombre réel tel que: $x + \gamma y \perp_{BJ} y$. On en déduit que E est strictement convexe (Lemme 5).

Montrons maintenant que la relation d'orthogonalité de Birkhoff-James définie sur E est symétrique. Pour ce, soit $(x,y) \in E^2$ avec $x \perp_{BJ} y$. On peut évidemment supposer que $x \neq \Theta$, $y \neq \Theta$ et $y \in S$. Grâce à la propriété d'homogénéité de l'orthogonalité de Birkhoff-James (lemme (1.1)), on a que: $\lambda x \perp_{BJ} y$, $\forall \lambda \in R$. Posons maintenant

$$\Delta = \{\lambda x \mid \lambda \in R\}$$

et $\Delta_1 = y + \Delta$. Nous affirmons que la droite Δ_1 est tangente au cercle unité $C = C(x,y)$ au point y. Supposons en fait que le contraire soit vrai. E étant strictement convexe, Δ_1 coupe alors C en un unique point $y' \neq y$, l'unicité du point y' découlant en fait du Lemme 7 et de la convexité stricte de l'espace E. Posons maintenant $x' = y' - y$. Evidemment $x' \in \Delta$. Donc $x' \perp_{BJ} y$. Mais $\|x' + y\| = \|y'\| = 1 \neq \|x' - y\|$. S'il en était autrement, nous aurions i) $\|y + x'\| = 1$, ii) $\|y + x'\| = \|y - x'\| = 1$, et iii) $\|y\| = 1$. Les trois points $y + x'$, y et $y - x'$ étant colinéaires (ils appartiennent tous à la droite $\{y + \lambda x' \mid \lambda \in R\}$), de norme égale à 1 et l'espace E étant strictement convexe, il suffit alors d'appliquer le Lemme 7 pour obtenir une contradiction. Nous venons donc de montrer que

$$\|y + \lambda x\| \geq \|y\|, \qquad \forall \lambda \in R.$$

Autrement dit $y \perp_{BJ} x$. □

L'inverse du Lemme 8 est faux car il existe des espaces vectoriels normés non strictement convexes pour lesquels la relation d'orthogonalité de Birkhoff-James est symétrique. L'espace suivant en est un exemple. Ici $E = R^2$ avec la norme $\|.\|$ définie par la formule:

$$\|(x,y)\| = \begin{cases} |x| + |y|, & \text{si } xy \leq 0; \\ \max\{|x|,|y|\}, & \text{si } xy \geq 0. \end{cases}$$

LEMME 9. *Soit* E *un e.v.n. avec* $\dim(E) \geq 3$. *Pour que la norme sur* E *soit issue d'un produit scalaire, il faut et il suffit que*

$$\boxed{(\forall (x,y) \in E^2)(x \perp_{BJ} y \Rightarrow x \perp_I y).}$$

PREUVE. Il suffit d'appliquer les Lemmes 8 et 2. □

LEMME 10. *Soit* E *un e.v.n. Pour que la norme sur* E *soit issue d'un produit scalaire, il faut et il suffit que*

$$\boxed{(\forall (x,y) \in E^2)(x \perp_{BJ} y \Rightarrow x \perp_R y).}$$

PREUVE. Soit $x \in E$ et P un plan contenant x et l'origine Θ. On peut certainement trouver un vecteur non nul $y \in P$ avec $x \perp_{BJ} y$ (lemme (1.2)). Par hypothèse, $x \perp_R y$. Il suffit maintenant d'appliquer le Lemme 4. □

LEMME 11. *Soit* E *un e.v.n. Pour que la norme sur* E *soit issue d'un produit scalaire, il faut et il suffit que*

$$\boxed{(\forall (x,y) \in E^2)(x \perp_{BJ} y \Rightarrow x \perp_P y).}$$

PREUVE. Soit $(x,y) \in E^2$ avec $x \perp_{BJ} y$. Posons

$$\mu[x,y] = \frac{\|x\| + \|y\|}{\|x + y\|}.$$

Puisque par hypothèse $x \perp_P y$, on a alors

$$\mu[x,y] = \frac{\|x\| + \|y\|}{\sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}} = \sqrt{\frac{(\|x\| + \|y\|)^2}{\|x\|^2 + \|y\|^2}} = \sqrt{1 + \frac{2\|x\|\|y\|}{\|x\|^2 + \|y\|^2}} \leq \sqrt{2}.$$

Il suffit maintenant d'appliquer le Lemme 6. □

Voici maintenant le théorème principal.

THÉORÈME 1. *Soit* E *un e.v.n. Les conditions suivantes sont alors équivalentes:*

1) E *est préhilbertien.*
2) $(\forall (x,y) \in E^2)(x \perp_{BJ} y \Rightarrow x \perp_I y)$.
3) $(\forall (x,y) \in E^2)(x \perp_{BJ} y \Rightarrow x \perp_R y)$.
4) $(\forall (x,y) \in E^2)(x \perp_{BJ} y \Rightarrow x \perp_P y)$.

PREUVE. On a déjà que: $3 \Leftrightarrow 1 \Leftrightarrow 4$ (Lemmes 10 et 11). Evidemment $3 \Rightarrow 2$. Supposons maintenant que 2 soit vérifié. Soit $(x,y) \in E^2$ avec $x \perp_{BJ} y$. Par homogénéité de la relation d'orthogonalité de Birkhoff-James (lemme (1.1)), on a que $x \perp_{BJ} \lambda y$, $\forall \lambda \in R$. Donc $x \perp_I \lambda y \Rightarrow \|x + \lambda y\| = \|x - \lambda y\|$, $\forall \lambda \in R \Rightarrow x \perp_R y$. Par conséquent: $2 \Leftrightarrow 3$. □

Il est intéressant de comparer les résultats ci-haut avec ceux de [2]. Dans [2] on exige, pour prouver qu'un espace vectoriel normé est préhilbertien, que l'orthogonalité en question ait la propriété (H) ce qui, en d'autres mots ([2], théorème (3.5)), signifie que la relation d'orthogonalité de Birkhoff-James doit être équivalente à la relation d'orthogonalité isocèle ou à la relation de Pythagore. En ce sens notre condition est plus faible. D'un autre côté dans [2] aucune restriction n'est faite sur la dimension de l'espace sous-jacent et, en ce qui a trait à la relation d'orthogonalité, les conclusions des différents théorèmes s'appliquent dans le cadre plus général suivant. Soit α_k, β_k, γ_k, $k = 1,\dots,n$, une collection fixée de nombres réels satisfaisant les relations suivantes:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\beta_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\gamma_k^2 = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\beta_k\gamma_k = 1.$$

DÉFINITION 4. Soit $(x,y) \in E^2$. On dit que x est *orthogonal à* y *au sens de Carlsson*, ce que l'on note par $x \perp_C y$, si et seulement si

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\|\beta_k x + \gamma_k y\|^2 = 0.$$

On peut facilement voir que les relations d'orthogonalité isocèle et de Pythagore sont des cas particuliers de cette définition plus générale. La question qui se pose maintenant est la suivante: Une condition nécessaire et suffisante pour que E soit préhilbertien est-elle que

$$\boxed{(\forall (x,y) \in E^2)(x \perp_{BJ} y \Rightarrow x \perp_C y)?}$$

Références

[1] BIRKHOFF, G., Orthogonality in linear metric spaces, *Duke Mathematical Journal* 1(1935), 169-172.

[2] CARLSSON, S., Orthogonality in normed linear spaces, *Arkiv for Matematik* 4, no 22 (1963), 297-318.

[3] DAY, M., Some characterizations of inner-product spaces, *Trans. of the American Mathematical Society* 62(1947), 320-337.

[4] DEL RIO, M., BENITEZ, C., The rectangular constant for two-dimensional spaces, *Journal of Approximation Theory* 19(1977), 15-21.

[5] FICKEN, F., Note on the existence of scalar products in normed linear spaces, *Annals of Mathematics* 45, no 2 (1944), 362-366.

[6] JAMES, R., Orthogonality in normed linear spaces, *Duke Mathematical Journal* 12(1945), 291-302.

[7] JAMES, R., Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces, *Trans. of the American Mathematical Society* 61(1947), 265-292.

[8] JAMES, R., Inner products in normed linear spaces, *Bull. of the American Mathematical Society* 53(1947), 559-566.

[9] JOLY, J.L., Caractérisations d'espaces hilbertiens au moyen de la constante rectangle, *Journal of Approximation Theory* 2(1969), 301-311.

[10] ROBERTS, B., On the geometry of abstract vector spaces, *Tohoku Mathematical Journal* 39(1934), 42-59.

Département d'ingénierie et d'informatique
Collège Militaire Royal
Saint-Jean

Manuscrit reçu le 20 août 1986.
Revisé le 27 novembre 1986.