

FONDEMENT DE LA DESCRIPTION COMBINATOIRE DES CARTES CELLULAIRES

Pierre Damphousse

Summary

We describe a complete system of algebraic invariants classifying up to within an isomorphism all cellular maps. This classification is achieved in terms of an action of a remarkable group; moreover it underlines the naturality of the notion of punctured maps and it shows the existence of a punctured map which is a universal cover to all punctured maps; this "universal map" happens to have a nice hyperbolic representation.

Résumé

On décrit ici un système complet d'invariants algébriques classifiant à isomorphie près les cartes cellulaires. Cette classification est obtenue en termes d'une action d'un groupe remarquable; elle nous amène avec naturalité à la notion de cartes trouées et révèle une carte trouée qui est revêtement universel de toutes les cartes trouées; cette carte "universelle" possède une représentation hyperbolique.

1. Introduction

Le but de ce travail est de classifier avec naturalité les cartes cellulaires. L'exposé s'adresse en tout premier lieu à l'intuition et par conséquent il n'a pas la prétention de la grande rigueur d'un formalisme à la Bourbaki; il ne s'agit pas non plus d'un tour d'horizon du sujet dans son état actuel mais de la présenta-

tion des idées riches qui en sont la base.

La pièce centrale de ce texte est le *groupe cartographique*

$G = \langle \varepsilon, \sigma_0, \sigma_2 : \varepsilon^2 = \sigma_0^2 = \sigma_2^2 = (\sigma_0 \sigma_2)^2 = 1 \rangle$, produit libre du groupe cyclique à deux éléments et du groupe de Klein $K = \langle \sigma_0, \sigma_2 : \sigma_0^2 = \sigma_2^2 = (\sigma_0 \sigma_2)^2 = 1 \rangle$. L'idée de ce groupe dans le contexte des cartes cellulaires est due à Grothendieck; le développement qui consiste à prendre pour morphismes de cartes les revêtements est de l'auteur, mais en toute honnêteté intellectuelle il revient d'attribuer le théorème de classification à Grothendieck avec qui les conversations ont permis de mettre au point de nombreuses idées. Une étude des cartes cellulaires dans le même esprit quant à la partie proprement combinatoire a été faite et publiée par Christine Voisin et Jean Malgloire (cf. [1] et [2]). Notre note se distingue cependant de leur travail sur au moins deux points; le premier est l'obtention du groupe cartographique à partir des groupes diédraux, ce qui permet de comprendre comment une technique semblable permet de classifier des objets plus complexes tels les 2-complexes ou encore les décompositions cellulaires des surfaces en surfaces à bord dont l'intérieur est homéomorphe à un disque et sur le bord duquel un groupe agit transitivement. Le second point est un pont vers la géométrie hyperbolique et la théorie des nombres obtenu par le biais de modèles de la carte universelle dans le plan hyperbolique.

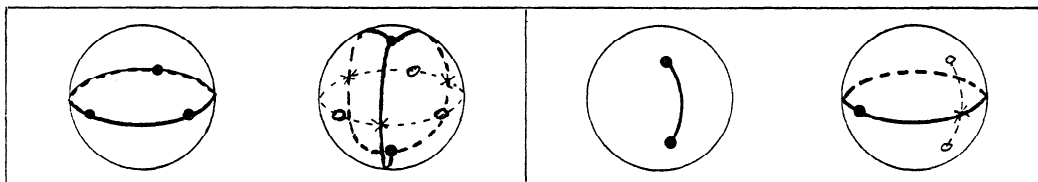
Cette note est écrite en reconnaissance à Grothendieck à qui l'auteur doit entre autre un contact enrichissant avec une approche formelle des mathématiques qui peut si facilement tourner au "syntaxisme".

2. Les groupes diédraux et la bonne notion topologique de carte

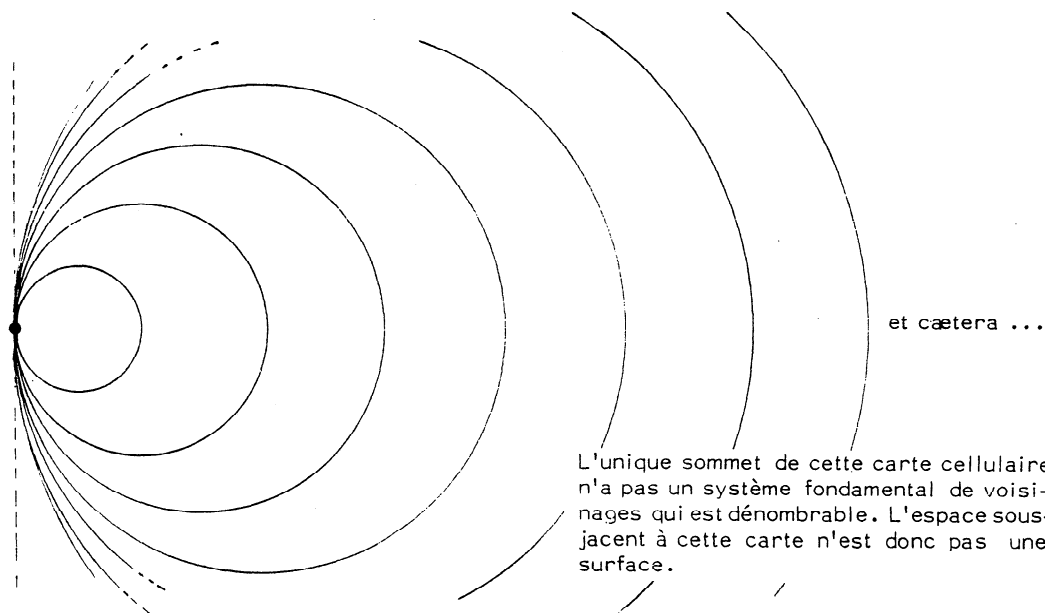
Les cartes cellulaires sont essentiellement des données de recollement; on les obtient en recollant une famille de polygones de telle manière que *chaque* arête soit recollée homéomorphiquement à *exactement une seule autre* arête, l'objet résultant du recollement étant vêtu de la topologie quotient. Cette définition est insatisfaisante. En premier lieu il n'est pas naturel de prendre comme seules unités de construction les polygones à 3, 4, ... côtés, même si on y ajoute le polygone à deux côtés et le polygone à un seul côté...



pour arriver à inclure la carte duale du recollement de deux triangles puis la carte duale du recollement du polygone à deux côtés sur lui-même pour donner la sphère "à fermeture éclair"; nous allons justifier plus loin cette affirmation.



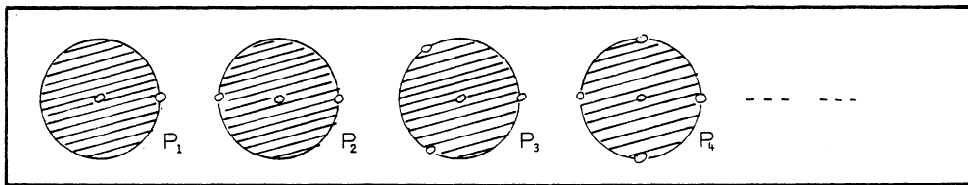
En second lieu un recollement de polygones suivant la définition ne donne pas nécessairement une surface, ce qui est moralement gênant...



Le défaut de notre définition résulte de ce que l'on ne tient pas compte de toute la structure combinatoire des polygones à cause d'un choix accessoire qui

consiste à représenter les sommets par des points; on obtient combinatoirement la même chose en représentant les sommets par des "trous"; mais d'un point de vue topologique nous obtenons ainsi une réalisation plus fidèle et plus éclairante de la structure combinatoire des polygones. Ce dernier point de vue nécessite une explication.

Polygone à n côtés signifiera désormais la surface à bord obtenue en retirant du disque unité fermé les n n -ième racines de l'unité ainsi que le centre 0; on notera P_n le polygone à n côtés. A chacun de ces polygones correspond son groupe d'isométries; le groupe des isométries du polygone P_n est le groupe diédral $D_n = \langle \epsilon, \rho : \epsilon^2 = \rho^n = (\epsilon\rho)^2 = 1 \rangle$. Si n divise m , disons $m = kn$,

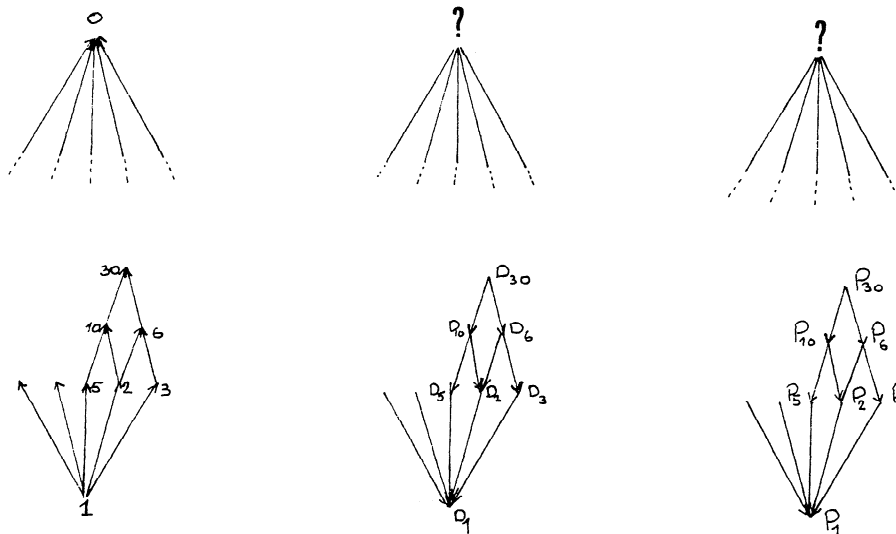


Les polygones...

il y a un homomorphisme évident $D_m \rightarrow D_n$, à savoir le prolongement "linéaire" de

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon \mapsto \epsilon \\ \rho \mapsto \rho^k \end{array} \right\},$$

que nous appellerons l'enroulement de D_m autour de D_n . Aux objets combinatoires que sont ces enroulements correspondent les objets topologiques que sont les revêtements $P_m \rightarrow P_n$, donnés par $re^{i\theta} \mapsto re^{ki\theta}$; nous les appellerons aussi enroulements. Les catégories des groupes diédraux et des polygones avec pour morphismes les enroulements correspondants sont munis d'une structure de treillis de manière évidente; ces catégories sont en effet calquées sur le treillis des entiers naturels équipés de la relation "divise":



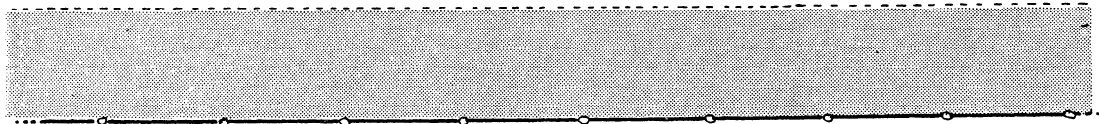
Le structure combinatoire de la catégorie des polygones P_1, P_2, \dots et de celle des groupes diédraux sont incomplètes puisqu'il y manque un élément maximum; cet élément maximum correspond à l'entier naturel 0; dans le cas des groupes diédraux ce plus grand élément est

$$D_0 = \langle \varepsilon, \rho : \varepsilon^2 = (\varepsilon 0)^2 = \rho^0 = 1 \rangle = \langle \varepsilon, \rho : \varepsilon^2 = (\varepsilon \rho)^2 = 1 \rangle$$

$$= \langle \varepsilon, \sigma_0 : \varepsilon^2 = \sigma_0^2 = 1 \rangle \quad (\text{où } \sigma_0 \text{ remplace } \varepsilon \rho).$$

D_0 sera appelé le groupe diédral universel. Il joue le rôle de revêtement universel commun à tous les groupes diédraux D_1, D_2, \dots . De la même manière le plus grand élément P_0 à ajouter à la liste P_1, P_2, \dots doit être le revêtement universel commun à tous les polygones à n côtés ($n = 1, 2, \dots$). Nous posons donc

$$P_0 = (\mathbb{R} \times [0,1]) \setminus (\mathbb{Z} \times \{0\}).$$




P_0 sera appelé le polygone universel. On notera que D_0 n'est autre que le groupe des isométries de P_0 (nous en laissons l'interprétation au lecteur).

Nous appellerons maintenant carte cellulaire la donnée de recollement d'une famille de polygones (au sens de P_0, P_1, P_2, \dots) de telle manière que chaque arête soit recollée homéomorphiquement à exactement une seule autre arête. Cette définition est bien supérieure à la première. Tout d'abord il y a des raisons sérieuses de considérer comme complète et naturelle la liste des polygones utilisés (et la prochaine section établira ce fait de manière irréfutable). Ensuite une carte cellulaire repose toujours sur une surface; ce but fut atteint non pas en imposant une contrainte (vg "ne considérer que les cartes finies") mais en complétant le matériau de construction à partir de considérations naturelles. Finalement nous obtenons en prime une catégorie des cartes cellulaires où la combinatoire n'a rien perdu (elle y a même gagné!) et où elle est fidèlement en écho avec la topologie: cette catégorie des cartes cellulaires a pour objets les cartes cellulaires et pour morphismes les revêtements qui induisent au niveau de la découpe (i.e. "de la famille des polygones ayant recollement") une somme d'enroulements.

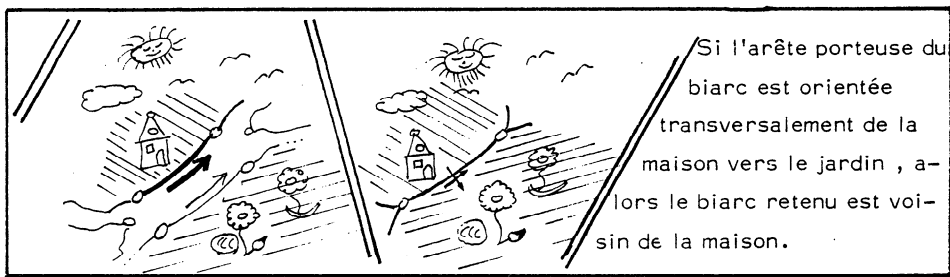
3. Du groupe diédral universel au groupe cartographique

Une notion importante lorsque l'on parle de cartes est celle d'arc, c'est-à-dire d'arête orientée. L'orientation d'une arête sur une carte est cependant une construction imprécise car elle peut être induite par l'orientation de deux arêtes de la découpe:

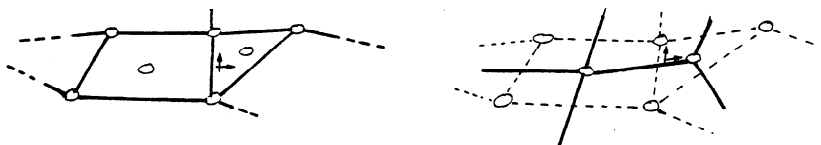


Nous avons donc besoin d'une notion plus fine; nous appellerons *biarc* d'une carte une arête orientée de sa découpe. Chaque arête d'une carte détermine donc quatre biarcs. Intuitivement nous concevons un biarc comme un croisillon de flèches () représentant une orientation longitudinale et une orientation "transversale" d'une

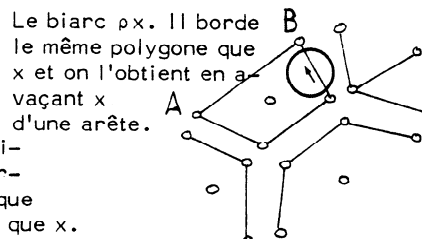
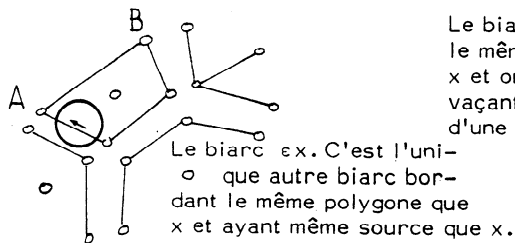
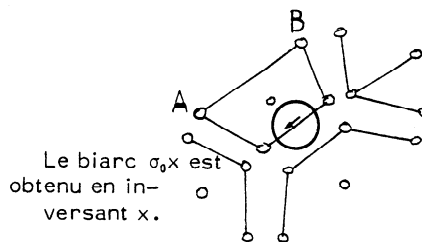
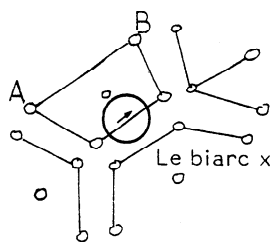
arête; la figure suivante explicite cette idée.



Une autre manière de voir un biarc consiste à le considérer comme la donnée d'un arc sur la carte et d'un arc (sur l'arête correspondante) de la carte duale. Etant donné une carte Γ nous noterons $B(\Gamma)$ l'ensemble de ses biarcs.

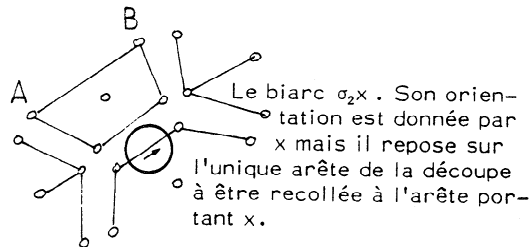
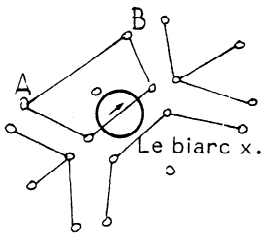


Le groupe diédral universel D_0 agit naturellement sur $B(\Gamma)$ pour chaque carte cellulaire Γ ; la figure suivante explicite cette action.



Il est clair que D_0 n'agit pas transitivement sur tous les $B(\Gamma)$ puisque suivre une orbite nous fait tourner autour d'un pays de la carte cellulaire. Si D_0 agissait transitivement sur les biarcs d'une carte quelconque nous aurions alors dans D_0 la structure combinatoire de toutes les cartes cellulaires. Nous allons prolonger D_0 et son action sur les biarcs d'une carte quelconque en un groupe G et une action de G sur les biarcs d'une carte, laquelle action sera transitive sur les $B(\Gamma)$ des cartes connexes Γ . Ce groupe G contiendra alors la combinatoire de toutes les cartes cellulaires car la structure combinatoire d'une telle carte sera toujours, à isomorphie près, un ensemble de classes à gauche d'un sous-groupe de G .

Puisque D_0 nous permet de suivre la frontière d'un pays sur une carte donnée, tout ce qu'il nous faut ajouter à D_0 pour obtenir G est un élément, que nous noterons σ_2 , dont l'action est d'inverser la flèche transversale d'un biarc.



On notera que σ_0 inverse la flèche longitudinale d'un biarc. Les indices $(^0)$ et $(^2)$ de σ_0 et σ_2 correspondent au fait que la source d'une flèche inversée par l'action de σ_0 (resp. σ_2) est un sommet (resp. un pays), ce qui est un objet de dimension 0 (resp. de dimension 2). Nous devons bien sûr avoir les relations suivantes:

- 1) $\sigma_2^2 = 1$; (Inverser deux fois la flèche transversale est sans effet.)
- 2) $(\sigma_0 \sigma_2)^2 = 1$. (Inverser les deux flèches deux fois est sans effet.)

Nous appelons *groupe cartographique* le groupe suivant:

$$G = \langle \varepsilon, \sigma_0, \sigma_2; \varepsilon^2 = \sigma_0^2 = \sigma_2^2 = (\sigma_0 \sigma_2)^2 = 1 \rangle.$$

De plus, on se convaincra facilement des faits suivants:

- a) $\varepsilon, \sigma_0, \sigma_2, \sigma_0\sigma_2$ agissent sans point fixe, c'est-à-dire que pour n'importe quel biarc x , les biarcs $\varepsilon x, \sigma_0 x, \sigma_2 x$ et $\sigma_0\sigma_2 x$ sont chacun distinct de x ;
- b) G agit transitivement sur $\mathcal{B}(\Gamma)$ pour n'importe quelle carte cellulaire Γ .

Suite à la propriété (b) G apparaît donc comme le revêtement universel (en un sens que nous allons préciser dans la prochaine section) de toutes les cartes cellulaires.

4. Les maquettes et la carte universelle

Nous appellerons *maquettes* les G -ensembles satisfaisant la condition (a) ci-dessus. A chaque carte cellulaire Γ correspond donc la maquette $\mathcal{B}(\Gamma)$ comme nous venons de l'expliquer. Mais il y a en fait quelque chose de plus; un morphisme de cartes $\phi: \Gamma \rightarrow \Sigma$ induit une application $\mathcal{B}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{B}(\Sigma)$ qui commute avec les actions de ε, σ_0 et σ_2 . Nous notons $\mathcal{B}(\phi)$ cette application. Nous appellerons catégorie des maquettes la catégorie dont les objets sont les maquettes et dont les morphismes sont les morphismes de G -ensembles.

Le théorème suivant a été proposé par Grothendieck dans le cas où les morphismes étaient des isomorphismes, et dans le contexte où les polygones avaient tous leurs sommets et étaient tous finis. On en trouvera une démonstration dans [3].

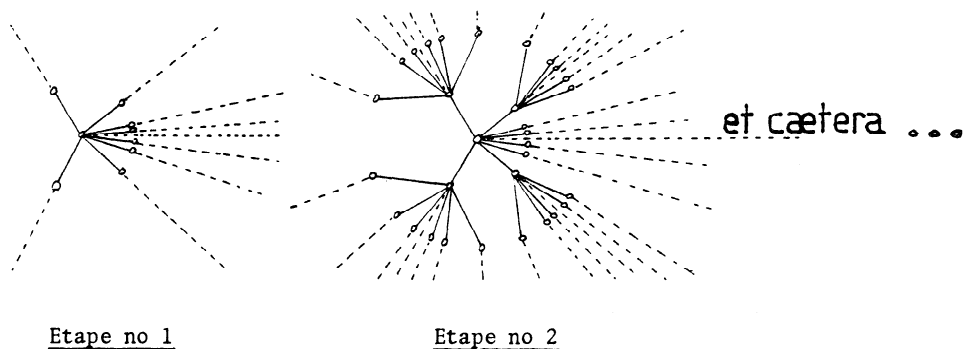
THÉORÈME (Classification des cartes cellulaires). *La construction*

$$\begin{bmatrix} \Gamma \rightarrow \mathcal{B}(\Gamma) \\ \phi \rightarrow \mathcal{B}(\phi) \end{bmatrix}$$

est fonctorielle. Le foncteur \mathcal{B} est une équivalence naturelle entre d'une part la catégorie des cartes cellulaires et d'autre part la catégorie des maquettes.

Ce théorème a une conséquence remarquable qui vient justifier le souci de naturalité que nous avons eu dans le choix des polygones. La catégorie des maquettes transitives possède un objet initial, à savoir le groupe G lui-même! La catégorie

des cartes connexes qui lui correspond doit donc elle aussi posséder un objet initial; ainsi il existe une carte cellulaire, unique à isomorphie près, dont toutes les autres sont quotients par un revêtement! La naturalité de nos choix vient de nous profiter pleinement; le même énoncé est totalement faux si on prend pour cartes cellulaires les cartes correspondant à notre première définition. Les deux figures suivantes illustrent comment à coups de coupures et de traits dans le plan complexe on construit un modèle de la carte universelle. Le modèle résultant se trouve sur la page suivante.




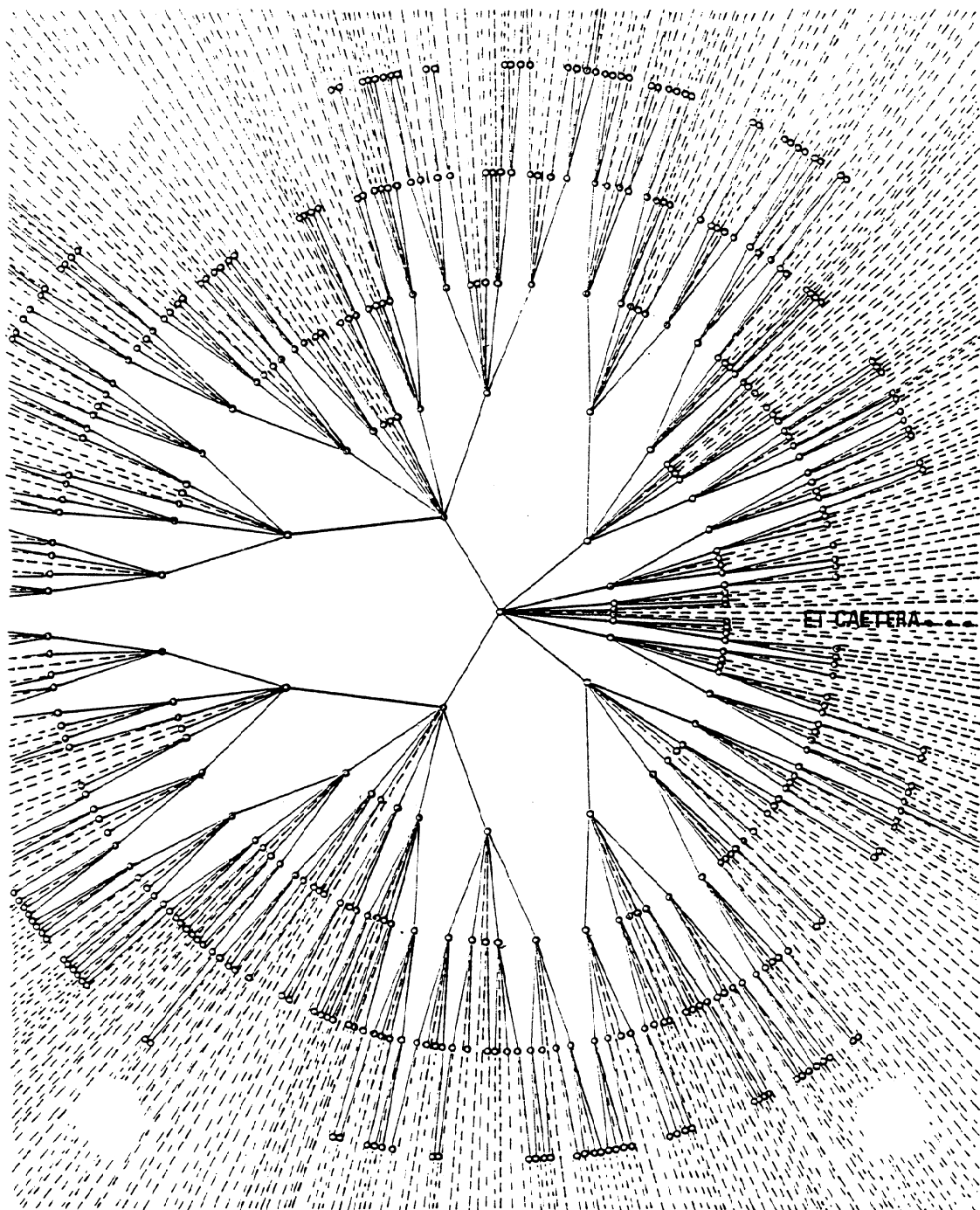
Etape no 1

Etape no 2

5. Le groupe cartographique alterne et les représentations hyperboliques de la carte universelle

On notera que les relations de la présentation de G en ε , σ_0 et σ_2 sont toutes de longueur paire. Par conséquent, les éléments de G expressibles comme un mot de longueur paire en ε , σ_0 et σ_2 ne sont pas expressibles autrement que comme un mot de longueur paire en ces générateurs. On peut donc parler des éléments pairs de G ; ces derniers forment un sous-groupe de G d'indice 2 dans G que l'on notera G_+ et que l'on appellera le *groupe cartographique alterné*. Si on note σ l'élément $\sigma_0\sigma_2$ on a $G_+ = \langle \sigma, \rho: \sigma^2 = 1 \rangle$, ce qui nous montre G_+ comme étant le produit libre de \mathbb{Z} et $\mathbb{Z}/2$.

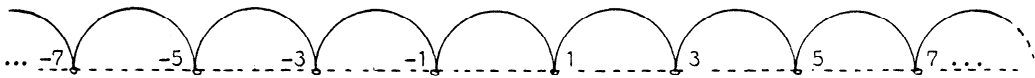
Un biarc  peut être vu très naïvement comme un repère local sur la surface porteuse de la carte; une carte sur une surface orientable connexe détermine donc deux classes de biarcs, chaque classe correspondant à une des orien-



Modèle de la carte universelle

tations possibles. Etant donné une carte connexe Γ , $\mathcal{B}(\Gamma)$ est un G -ensemble transitif si et seulement si la surface sous-jacente à Γ n'est pas orientable; dans le cas contraire $\mathcal{B}(\Gamma)$ a exactement deux orbites, chacune contenant les biarcs correspondant à une des orientations possibles. L'étude combinatoire des cartes orientables revient donc à l'étude combinatoire de G_+ . La carte universelle est orientable car si elle ne l'était pas elle admettrait un revêtement propre à deux feuillets. Quant on l'oriente, les biarcs qui correspondent à l'orientation choisie forment un G_+ -ensemble qui n'est autre que G_+ lui-même car la carte universelle n'a pas (par définition) de revêtements propres.

Considérons dans le plan hyperbolique $H = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ les droites hyperboliques d'extrémités $2n \pm 1$ ($n \in \mathbb{Z}$).



La portion du plan hyperbolique au-dessus de ces droites n'est autre à isomorphie près que P_0 . Par rapport à chacune de ces droites prenons la réflexion de toutes les autres et répétons indéfiniment cette opération par rapport aux droites nouvellement obtenues. Nous obtenons ainsi une carte cellulaire dont la surface porteuse (c'est H) a un groupe fondamental trivial. Elle est obtenue en recollant une infinité de polygones universels. La Figure 1 nous donne cette représentation qui nous suggère une représentation fidèle de G_+ dans $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$; cette représentation est

$$\rho \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et elle est justifiée par la Figure 2.

La Figure 3 nous donne une représentation hyperbolique de la carte universelle dans le disque unité en envoyant la première représentation hyperbolique (Fig. 1) dans celui-ci à l'aide de la transformation conforme $U(z) = (z-i)/(z+i)$.

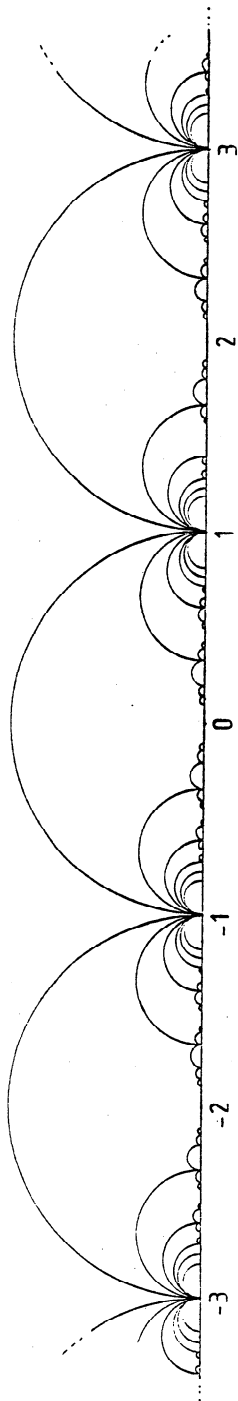


Figure 1
Modèle de la carte universelle dans le plan hyperbolique

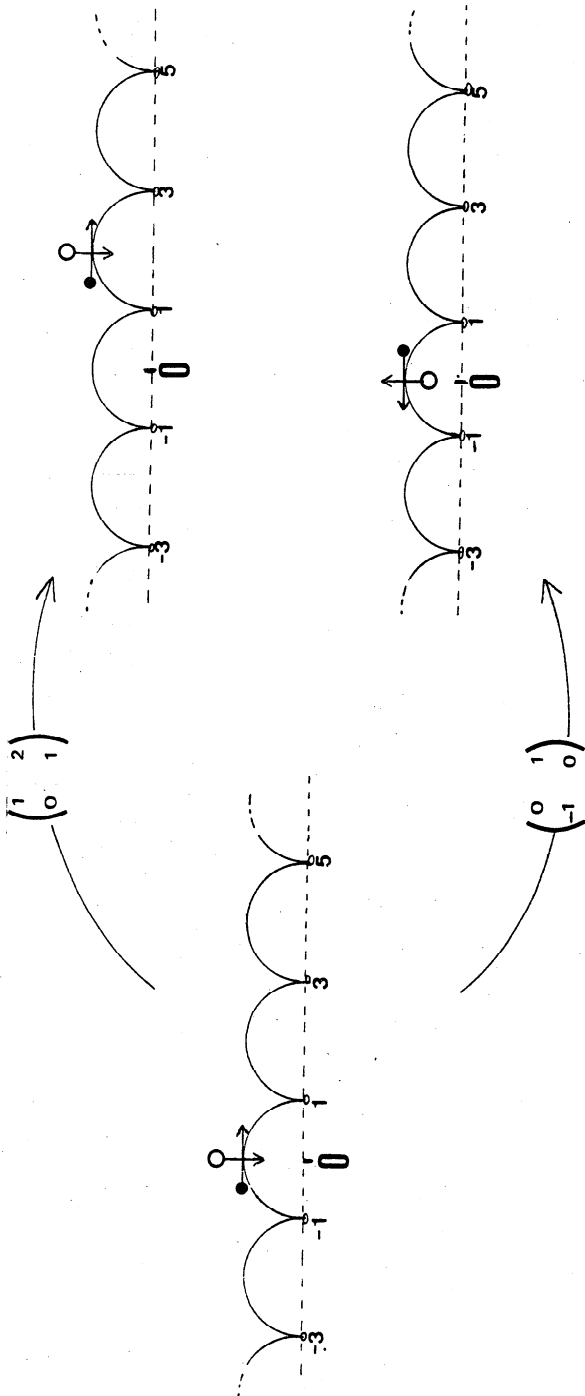


Figure 2
Sur la représentation de G_+ dans $PSL(2, \mathbb{Z})$

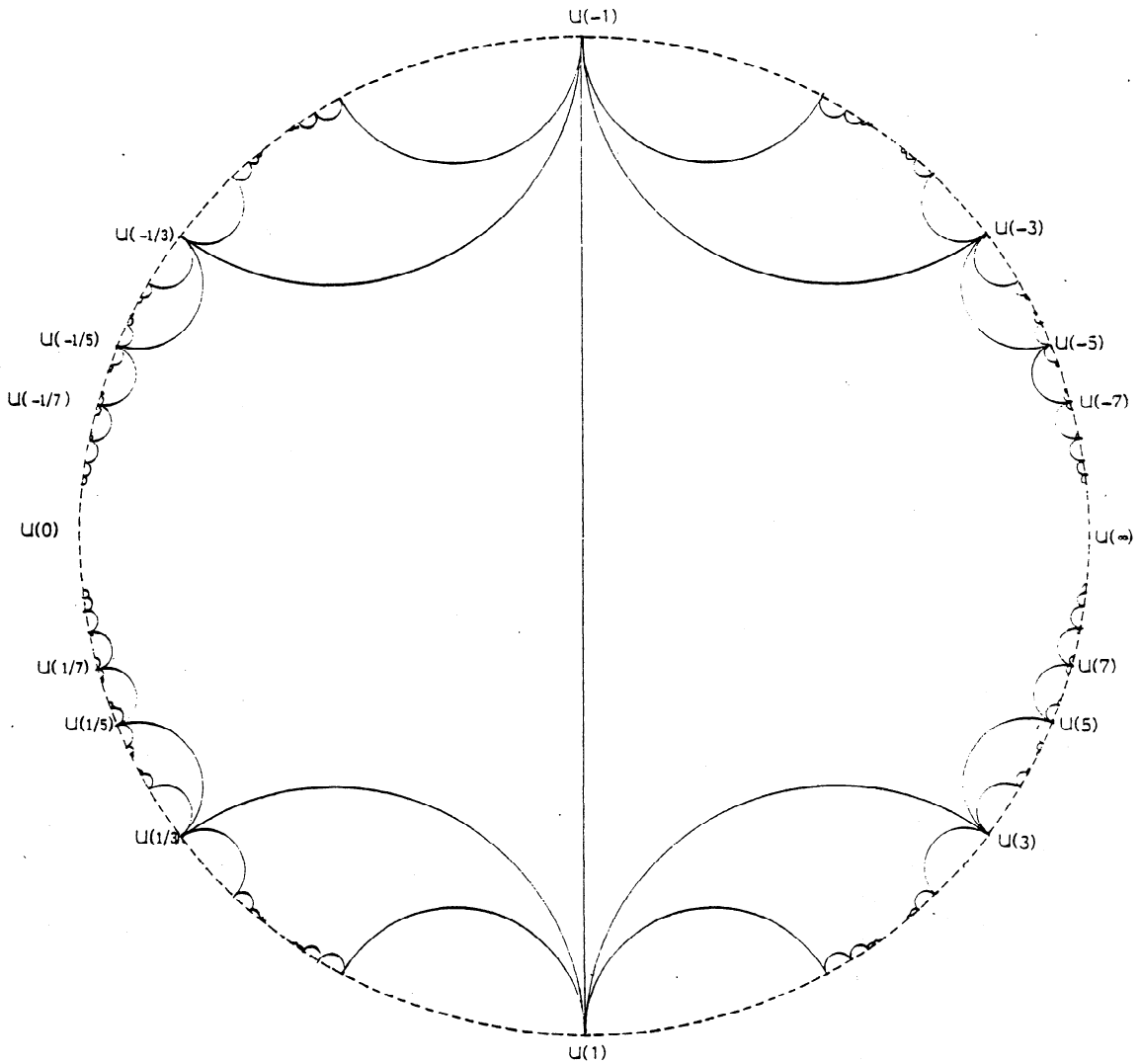
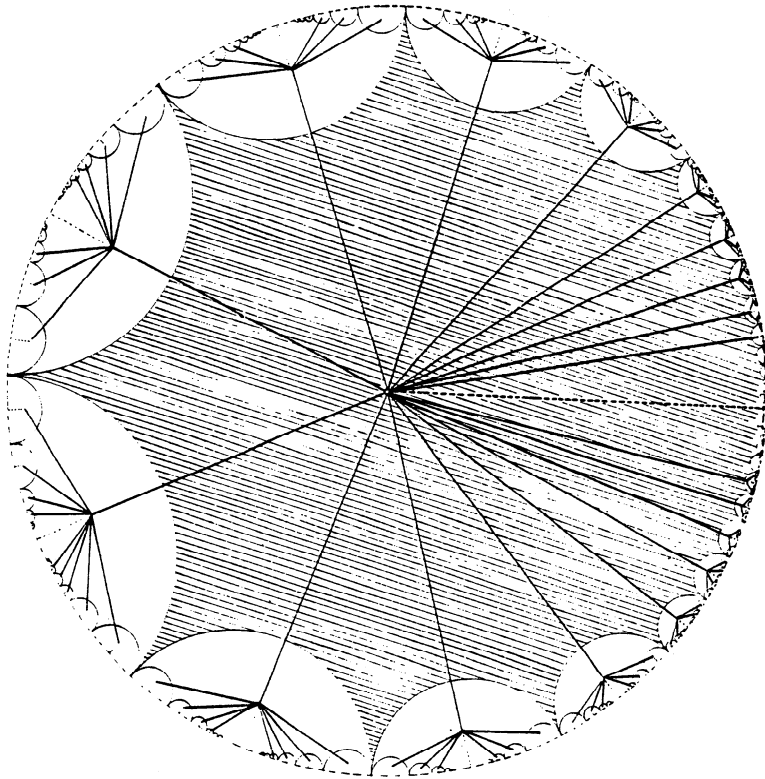


Figure 3

Modèle de la carte universelle dans le disque unité.

Pour vérifier l'autodualité, photocopier sur un papier calque, superposer puis faire un quart de tour.

On notera que la carte universelle est autoduale, c'est-à-dire isomorphe à sa carte duale car la construction de la carte duale ne change pas la surface porteuse, donc son groupe fondamental; la carte duale de la carte universelle est donc son propre revêtement universel, c'est-à-dire, à isomorphie près, la carte universelle elle-même. On peut s'en convaincre visuellement à peu de frais; il suffit pour cela de photocopier la Figure 3 sur du papier calque et de superposer cette photocopie à l'original après avoir effectué un quart de tour, ou bien encore de comparer le dessin ci-dessous à la première représentation de la carte universelle que nous avons donnée.



Conclusion

Beaucoup de conséquences peuvent être tirées de notre approche des cartes cellulaires. Il n'y a pas de place ici pour les développer, notre but étant de présenter à l'intuition les idées les plus élémentaires du fondement de la classification des cartes cellulaires. Ces idées courent plusieurs sujets de la géométrie, de

la topologie, des surfaces de Riemann et de la théorie des nombres et sont développées dans un ouvrage de l'auteur en préparation.

Références

- [1] MALGLOIRE, J., VOISIN, C., *Cartes cellulaires*, Cahiers mathématiques no 12, Montpellier, 1977.
- [2] MALGLOIRE, J., VOISIN, C., *Cartes topologiques infinies et revêtement ramifiés de la sphère*, Cahiers mathématiques no 19, Montpellier, 1980.
- [3] DAMPHOUSSE, P., *Topological Cartography*, Thèse de doctorat, Université de Paris Sud (Orsay); Juin 1981.

Département de mathématiques
et d'informatique scientifique
Faculté des sciences
37200 Tours, France

Manuscrit reçu le 12 septembre 1985.
Revisé le 1er octobre 1986.