Ann. sc. math. Québec, 1987, vol. 11, no 2, pp. 253-268

TREILLIS DE FONCTIONS RÉELLES, COMPACTIFIÉS ET TRANSFORMATIONS MULTIPLICATIVES

J.-M. Belley et F. Lessard

Abstract

Let L be a lattice of real-valued functions defined on a set X, which is closed with respect to the operations $(\alpha-f) \vee 0$ and $(f-\alpha) \vee 0$ $(f \in L,\ \alpha \in [0,\infty))$. We construct a compact space $\overline{X}$ such that X is dense in it and each function $f \in L$ admits a (unique) continuous extension on $\overline{X}$. By our construction of $\overline{X}$ we are able to show that, when L is also an algebra, any positive multiplicative linear transformation U on L such that $U(1) = 1$ is characterized as being induced by a continuous transformation on $\overline{X}$. This result is then used to obtain a sufficient condition for a function to be invertible in L and to show that, when X is a semigroup, $\overline{X}$ can be identified with a compact semigroup.

Résumé

A partir d'un treillis L de fonctions réelles (sur un ensemble X) fermé par rapport aux opérations $(\alpha-f) \vee 0$ et $(f-\alpha) \vee 0$ $(f \in L,\ \alpha \in [0,\infty))$, nous construisons un espace compact $\overline{X}$ tel que X est dense dans $\overline{X}$ et tel que chaque fonction $f \in L$ admet une (unique) extension continue sur $\overline{X}$. Moyennant cette construction nous obtenons, dans le cas où L est aussi une algèbre, qu'un opérateur linéaire positif et multiplicatif $U: L \to L$ tel que $U(1) = 1$ est nécessairement généré par une transformation continu sur $\overline{X}$. Ce résultat est ensuite utilisé pour

* Recherche subventionnée par les fonds F.C.A.R. et C.R.S.N.G.

obtenir une condition suffisante pour qu'une fonction soit inversible dans L et pour montrer que, lorsque X est un semigroupe, $\overline{X}$ peut être identifié à un semigroupe compact.

Soit L un treillis de fonctions réelles bornées définies sur un ensemble X, fermé par rapport aux opérations $(\alpha - f) \vee 0$ et $(f - \alpha) \vee 0$ $(f \in L,\ \alpha \geq 0)$. (Evidemment L contient toutes les fonctions constantes non négatives.) Les treillis ayant cette propriété ont été utilisés par Pollard et Topsøe (voir [11] et [15]) pour généraliser des théorèmes de représentation intégrale. Il est clair que toute algèbre de Banach (par rapport à la norme uniforme) de fonctions bornées $f: X \to \mathbb{R}$, contenant les fonctions constantes, est un tel treillis. Ecrivons L^+ pour désigner la classe des fonctions non négatives dans L et L_0^+ pour la classe des fonctions $f \in L^+$ telles que $\inf\{f(x): x \in X\} = 0$. Soit $W(L)$ la classe des treillis maximaux dans L_0^+ avec topologie ayant $\emptyset$ et les ensembles de la forme $W(f) = \{F \in W(L): f \in F\}$ $(f \in L_0^+)$ comme sous-base pour les fermés. Nous dirons que $f \in L$ est *éloignée de zéro* si $\inf\{|f(x)|: x \in X\} > 0$.

PROPOSITION 1. $W(L)$ *est un espace compact* T_1, *et la classe des ensembles* $W(f)$ $(f \in L_0^+)$ *forme une base pour les fermés de* $W(L)$.

DÉMONSTRATION. Soit $F_1, F_2 \in W(L)$ tels que $F_1 \neq F_2$. Alors il existe $f \in F_1 \setminus F_2$ et on a $F_1 \in W(f)$ et $F_2 \notin W(f)$. Cela montre que F_1 est fermé dans $W(L)$ (et ainsi $W(L)$ est T_1).

Montrons maintenant, par la propriété d'intersection finie, que $W(L)$ est compact. Soit $\{f_i: i \in I\}$ dans L_0^+ tel que $\{W(f_i): i \in I\}$ possède la propriété d'intersection finie. Alors, pour tout sous-ensemble fini $\{f_{i_k}: k = 1,\dots,n\}$ de $\{f_i: i \in I\}$ nous avons $\cap W(f_{i_k}) \neq \emptyset$. Ainsi, il existe $F \in W(L)$ tel que $F \in \cap W(f_{i_k})$. On en déduit que la fonction $\vee f_{i_k}$ est dans F et ainsi $\inf\{\vee f_{i_k}(x): x \in X\} = 0$. Donc il existe $F' \in W(L)$ contenant $\{f_i: i \in I\}$. Evidemment $F' \in \cap\{W(f_i): i \in I\}$ et ainsi $\cap\{W(f_i): i \in I\} \neq \emptyset$. Par le théorème d'Alexander sur les sous-bases, on a que $W(L)$ est compact.

Finalement, pour $g,h \in L_o^+$ et $F \in W(L)$ tels que $F \notin W(g) \cup W(h)$, il existe des fonctions $f_1, f_2 \in F$ pour lesquelles $f_1 \vee g$ et $f_2 \vee h$ sont éloignées de zéro. Ainsi, la fonction $f = f_1 \vee f_2$, qui est élément de F, est telle que $f \vee (g \wedge h)$ est éloignée de zéro. Donc, l'ensemble $W(g \wedge h)$, qui contient $W(g) \cup W(h)$, ne contient pas F. On en déduit que la classe des $W(f)$ $(f \in L_o^+)$ est une base pour les ensembles fermés de $W(L)$. Cela termine la démonstration.

On dit qu'une classe C de fonctions réelles sur X *sépare les points de* X si pour tous points $x,y \in X$ avec $x \neq y$, il existe une fonction non négative $f \in C$ telle que $f(x) \neq f(y)$. Lorsque X est un espace topologique sur lequel chaque fonction de C est continue, on dit que X est *complètement régulier par rapport à* C si, pour chaque point $x \in X$ et chaque sous-ensemble fermé E de X ne contenant pas x, il existe une fonction non négative $g \in C$ avec $g(x) > 0$ et $g(y) = 0$ pour tout $y \in E$. Désignons par $C_r(X)$ et $C_r(W(L))$, respectivement, l'ensemble des fonctions réelles continues définies sur X et $W(L)$.

REMARQUE 1. Pour le cas où X est un espace topologique T_1, Wallman a introduit les idées que nous employons dans cet article afin de montrer l'existence d'un compact $w(X)$ et d'une fonction continue $\rho: X \to w(X)$ telle que $\rho(X)$ est dense dans $w(X)$. Il s'est servi de la structure sur X plutôt que de celle sur une classe L de fonctions définies sur X (comme nous faisons). Notre façon de faire donne facilement de nouveaux compactifiés, et bien d'autres qui sont déjà connus. Quant aux techniques très générales des treillis distributifs commutatifs pour construire des compactifiés, nous référons le lecteur à [1]. Ici nous nous restreignons au cas où les éléments de L sont bornés, car il nous faudra dans cet article étendre ces fonctions à des fonctions continues sur le compactifié $W(L)$.

Considérons la fonction $\omega: X \to W(L)$ définie par

$$\omega(x) = \{f \in L^+ : f(x) = 0\}.$$

PROPOSITION 2. ω *est bien définie.*

DÉMONSTRATION. Si $x \in X$, il est clair que $\omega(x)$ est un treillis dans L_0^+. Montrons que $\omega(x)$ est maximal. Soit $f \in L_0^+ \backslash \omega(x)$. Alors $f(x) > 0$. Choisissons $0 < \alpha < f(x)$. Alors $g = (\alpha - f) \vee 0$ est une fonction dans $\omega(x)$ pour laquelle $f \vee g$ est éloignée de zéro. Cela termine la démonstration de la Proposition 2.

PROPOSITION 3. $\omega(X)$ *est dense dans* $W(L)$.

DÉMONSTRATION. Si $\omega(X)$ était contenu dans $W(h)$ pour une fonction $h \in L_0^+$ alors, pour tout $x \in X$, $\omega(x)$ serait élément de $W(h)$ (i.e. $h \in \omega(x)$ pour tout $x \in X$). Ainsi, h serait la fonction nulle et donc on aurait $W(h) = W(L)$. La Proposition 3 est démontrée.

PROPOSITION 4. *A chaque* $f \in L$, *il correspond un unique* $\mathfrak{f} \in C_r(W(L))$ *tel que* $\mathfrak{f} \circ \omega = f$ *sur* X.

DÉMONSTRATION. Premièrement, supposons f non négative et pour chaque $\alpha \geq 0$, désignons respectivement par f_α et f_α^- les fonctions $(f-\alpha) \vee 0$ et $(\alpha - f) \vee 0$. Définissons

$$\mathfrak{f}(F) = \inf\{\alpha > 0 : f_\alpha \in F\}$$

pour chaque $F \in W(L)$. $\mathfrak{f}$ est définie sur tout $W(L)$ puisque $f_\alpha = 0$ pour α assez grand. Aussi, il est clair que i) $\mathfrak{f}(\omega(x)) = f(x)$ pour tout $x \in X$, ii) $\mathfrak{f}^{-1}((-\infty,\alpha']) = \mathfrak{f}^{-1}([\alpha'',\infty)) = \emptyset$ lorsque $\alpha' < \inf_{x \in X} f(x)$ et $\alpha'' > \sup_{x \in X} f(x)$, et iii) $\mathfrak{f}^{-1}((\infty,\alpha']) = W(f_{\alpha'})$ lorsque $\alpha' \geq \inf_{x < X} f(x)$. Pour établir la continuité de $\mathfrak{f}$ il suffit de montrer que $\mathfrak{f}^{-1}([\alpha',\infty)) = W(f_{\alpha'}^-)$ lorsque $0 \leq \alpha' \leq \sup_{x \in X} f(x)$. Puisque la dernière inégalité est triviale lorsque $\alpha' = 0$, supposons que $\alpha' > 0$. $f_\alpha \vee f_{\alpha'}^-$ est éloignée de zéro lorsque $0 < \alpha < \alpha'$ et ainsi $W(f_{\alpha'}^-) \subset \mathfrak{f}^{-1}([\alpha',\infty))$. Pour montrer l'inégalité inverse, prenons $F \in \mathfrak{f}^{-1}([\alpha',\infty))$ et supposons que $F \notin W(f_{\alpha'}^-)$. Alors il existe $h \in F$ et $\alpha > 0$ avec $\alpha' - \alpha > 0$ et $f_{\alpha'-\alpha}^- \vee h$ éloignée de zéro. Mais $f_{\alpha'-\alpha} \notin F$ et ainsi on peut choisir $g \in F$ tel que $f_{\alpha'-\alpha} \vee g$ est éloignée de zéro. Ainsi, $g \vee h$ est éloignée de zéro, ce qui contredit le fait que F est un treillis dans L_0^+. Alors $\mathfrak{f}^{-1}([\alpha',\infty)) \subset W(f_{\alpha'}^-)$ et donc $\mathfrak{f}$ est continue sur $W(L)$.

Prenons maintenant une fonction f quelconque dans L et posons $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}^+ - \mathfrak{f}^-$ où f^+ et f^- sont les fonctions dans L^+ égales à $f \vee 0$ et $-f \vee 0$ respectivement. Evidemment $\mathfrak{f}$ est une fonction dans $C_r(W(L))$ telle que $f = \mathfrak{f} \circ \omega$ sur X. On a que $\mathfrak{f}$ est unique puisque $\omega(X)$ est dense dans $W(L)$. Nous avons démontré la Proposition 4.

PROPOSITION 5. *La classe* $\{\mathfrak{f}: f \in L\}$ *est un treillis de fonctions qui sépare les points de* $W(L)$ *(et ainsi* $W(L)$ *est séparé) et qui contient les fonctions constantes non négatives.*

DÉMONSTRATION. Evidemment, $A = \{\mathfrak{f}: f \in L\}$ est un treillis de fonctions définies sur $W(L)$ et contenant les fonctions constantes non négatives. Pour montrer que A sépare les points de $W(L)$, prenons $F_1, F_2 \in W(L)$ avec $F_1 \nsubseteq F_2$. Alors, il existe $f \in F_2 \backslash F_1$ et on a $\mathfrak{f}(F_1) > 0$ et $\mathfrak{f}(F_2) = 0$. Nous avons démontré la Proposition 5.

REMARQUE 2. a) Lorsque L est en plus une algèbre, ou si elle a aussi la propriété que, pour tous $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ et $F, F' \in W(L)$, il existe $f \in L$ tel que $\mathfrak{f}(F) = \alpha$ et $\mathfrak{f}(F') = \alpha'$, alors par le théorème de Stone-Weierstrass et la Proposition 5, on en déduit que $\{\mathfrak{f}: f \in L\}$ est dense dans $C_r(W(L))$ par rapport à la norme uniforme.

b) Lorsque Y est un espace compact séparé, la classe $C_r(Y)$ de toutes les fonctions bornées réelles continues sur Y sépare les points (de Y) et Y est complètement régulier par rapport à $C_r(Y)$. (Voir, par exemple, [7, pp. 141, 115].)

THÉORÈME 1. *Soit* L *un treillis de fonctions réelles bornées définies sur un ensemble* X *et fermé sous les opérations* $(\alpha - f) \vee 0$, *et* $(f - \alpha) \vee 0$ *(*$f \in L$ *et* $\alpha \geq 0$*), et soit* q *une fonction définie sur* X *et à valeurs dans un espace compact séparé* Y *telle que* $g \circ q \in L$ *pour tout* g *dans un sous-ensemble dense de* $C_r(Y)$. *Alors, il existe une unique fonction continue* $Q: W(L) \to Y$ *telle que* $Q \circ \omega = q$ *sur* X.

DÉMONSTRATION. Prenons $F \in W(L)$. Puisque $\omega(X)$ est dense dans $W(L)$, choisissons une suite généralisée $\{\omega(x_\alpha)\}$ dans $\omega(X)$ telle que $F = \lim_\alpha \omega(x_\alpha)$ et posons

$Q(F) = \lim_\alpha q(x_\alpha)$. Il suffit maintenant de montrer que Q est bien définie, car Q sera alors l'unique fonction continue sur $W(L)$, à valeurs dans Y, pour laquelle $Q \circ \omega = q$ sur X. Puisque Y est compact, il existe une sous-suite $\{q(x_{\alpha'})\}$ de $\{q(x_\alpha)\}$ qui converge vers un point y_0 dans Y. Soit V un voisinage de y_0 dans Y. En vertu du fait que Y est complètement régulier par rapport à $C_r(Y)$, on peut choisir $g \in C_r(Y)$ tel que $g \circ q \in L$, $g(y_0) \geq 1$ et $g(y) \leq 0$ pour tout point y à l'extérieur de V. On a que $\lim_\alpha (g \circ q(x_\alpha))$ existe puisque $\lim_\alpha (g \circ q(x_\alpha)) = \lim_\alpha (g \circ q(\omega(x_\alpha)) = g \circ q(F)$, et donc $\lim_\alpha (g \circ q(x_\alpha)) = \lim_{\alpha'} (g \circ q(x_{\alpha'})) = g(y_0) \geq 1$. Alors, il existe α_0 tel que $q(x_\alpha) \in V$ pour tout $\alpha \geq \alpha_0$ et ainsi, $\lim_\alpha q(x_\alpha) = y_0$.

Prenons maintenant une autre suite généralisée $\{\omega(x_\rho)\}$ dans $\omega(X)$ telle que $F = \lim_\rho \omega(x_\rho)$. Pour chaque g dans un sous-ensemble dense de $C_r(Y)$ tel que $g \circ g \in L$, nous avons $\lim_\alpha (g \circ q(x_\alpha)) = g \circ q(F) = \lim_\rho (g \circ q(x_\rho))$ et puisque $C_r(Y)$ sépare les points de Y, on en déduit que $\lim_\rho q(x_\rho) = \lim_\alpha q(x_\alpha)$. La démonstration est terminée.

EXEMPLE 1. a) Soit L l'algèbre des fonctions continues réelles bornées définies sur un espace topologique X, et soit q une fonction continue sur X à valeurs dans un espace compact séparé Y. Par le Théorème 1, il existe une unique fonction continue $Q: W(L) \to Y$ telle que $Q \circ \omega = q$ sur X.

b) Supposons que L est aussi une algèbre et soit $T: X \to X$ tel que $f \circ T \in L$ pour tout $f \in L$. Définissons $q: X \to W(L)$ par $q = \omega \circ T$. Par la Remarque 2a, on a que $\mathcal{f} \circ q \in L$ pour tout $\mathcal{f}$ dans un sous-ensemble dense de $C_r(W(L))$. Alors, par le Théorème 1, il existe une unique transformation continue $Q: W(L) \to W(L)$ telle que $Q \circ \omega = \omega \circ T$ sur X. Puisque $f \circ T = \mathcal{f} \circ Q \circ \omega$ pour tout $f \in L$, ce résultat deviendra un cas particulier du Théorème 2.

PROPOSITION 6. *Si* L *sépare les points de* X, *alors* ω *est injective.*

DÉMONSTRATION. Si $x, y \in X$ sont deux points distincts, alors il existe $f \in L^+$ tel que $f(x) \neq f(y)$. Supposons, sans perte de généralité, que $f(x) < f(y)$, et posons $g = (f - f(x)) \vee 0$. Alors, g est élément de L_0^+ avec $g(x) = 0$ et

$g(y) > 0$. Ainsi donc, $\omega(x) \neq \omega(y)$. Nous avons démontré la Proposition 6.

PROPOSITION 7. *Si X est un espace topologique sur lequel chaque fonction de L est continue, alors ω est continue. Si, en plus, X est complètement régulier par rapport à L, alors ω est aussi une fonction fermée de X vers $\omega(X)$.*

DÉMONSTRATION. Pour montrer la première partie de cette proposition, remarquons que, pour tout $f \in L_o^+$ nous avons $\omega^{-1}(W(f) \cap \omega(X))$ égal à l'ensemble fermé $f^{-1}(0)$. Pour la seconde partie, soit E un sous-ensemble propre fermé de X et pour $x \in X \backslash E$ donné, soit $g_x \in L_o^+$ une fonction telle que $g_x(x) > 0$ et $g_x(y) = 0$ pour tout $y \in E$. Alors $\omega(E)$ est évidemment égal à l'ensemble (relativement) fermé $\cap\{W(g_x) \cap \omega(X) : x \notin E\}$. La démonstration de la Proposition 7 est complète.

REMARQUE 3. a) Lorsque L sépare les points de X et X est complètement régulier par rapport à L, on en déduit de la Proposition 6 et de la Proposition 7 que ω est un homéomorphisme. Donc, par la Remarque 2b, si X est un espace topologique compact séparé et si L est la classe des fonctions réelles continues sur X, alors X peut être identifié à $W(L)$.

b) Si X est un espace de Tychonoff, on en déduit de la partie a) et du Théorème 1 (avec Y un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}$) que $(\omega, W(L))$ est topologiquement équivalent au compactifié Stone-Čech de X (voir, par exemple, [7, p. 166]).

c) S. Kakutani a montré dans [6] que sous certaines conditions, un espace de Banach qui est en plus un treillis vectoriel, peut être concrètement représenté (isomorphiquement et isométriquement) par un sous-espace de la classe des fonctions réelles continues définies sur un espace compact séparé. Sa méthode, aussi bien que celle de Stone pour obtenir le compactifié Stone-Čech et celle de Gelfand et Shilov pour obtenir l'espace compact des idéaux maximaux associés à une algèbre de Banach commutative, diffère de la nôtre du fait qu'on ne s'est pas servi de la boule faiblement compact de l'espace dual d'un espace vectoriel normé. Aussi, par notre méthode nous obtenons la propriété additionnelle que $\omega(X)$ est dense dans $W(L)$.

EXEMPLE 2. Soit X l'espace topologique $\mathbb{R}$ (avec topologie usuelle) et, pour $c > 0$ donné, soit L la classe des fonctions continues réelles bornées dont le graphe est une suite de segments de droite enchaînés de pente 0 ou $\pm c$. Alors, L sépare les points de X, et X est complètement régulier par rapport à L. Ainsi donc $(\omega, W(L))$ est un compactifié séparé de X. On remarque que, par rapport à la norme uniforme, L n'est pas un sous-ensemble dense dans la classe des fonctions continues réelles bornées sur X.

Moyennant la Remarque 2a, la Proposition 3, le théorème d'extension de Hahn-Banach, et le théorème de représentation de Riesz, nous obtenons le résultat suivant.

PROPOSITION 8. *Si L est en plus une algèbre, alors à chaque fonctionnelle linéaire positive M définie sur L, il correspond une unique mesure de Borel positive régulière m sur $W(L)$ telle que $Mf = \int_{W(L)} f \, dm$ pour tout $f \in L$.*

REMARQUE 4. Si i) L est un treillis vectoriel de fonctions bornées réelles définies sur X, qui est fermé sous les produits et contient la fonction constante 1, ii) M est une fonctionnelle linéaire positive sur L, et iii) J_M est la classe des ensembles E (de Jordan) dans X (avec fonction indicatrice I_E) tels que

$$\inf\{M(f-g) : g \le I_E \le f; \ f,g \in L\} = 0$$

alors, comme l'a montré S. Bochner en 1939 (voir [3, pp. 773-775]), nous avons que

1) J_M est une algèbre d'ensembles dans X,

2) pour toute fonction $f \in L$, $\{z \in X : f(z) \ge r\}$ est élément de J_M pour tout r dans un sous-ensemble dense de $\mathbb{R}$, et

3) la fonction m_M définie sur J_M par

$$m_M(E) = \inf\{Mf : I_E \le f; \ f \in L\}$$

est une fonction positive et additive pour laquelle on a

$$Mf = \int_X f \, dm_M$$

où $f \in L$ et l'intégrale est définie au sens de Riemann. Ce résultat, que l'on peut obtenir à partir de principes élémentaires, a l'avantage que l'intégrale est sur X plutôt que sur $W(L)$. Cependant, l'algèbre J_M et le sous-ensemble dense de réels r, dépendent malheureusement de la fonctionnelle linéaire M.

EXEMPLE 3. Soit A une algèbre de sous-ensembles de X, et soit L l'algèbre des fonctions réelles simples A-mesurables définies sur X. Soit $m'\colon A \to [0,\infty)$ une fonction additive et $M\colon L \to \mathbb{R}$ la fonctionnelle linéaire positive définie par $Mf = \int_X f\, dm'$ pour tout $f \in L$. Alors, en vertu de la Proposition 8, il existe une unique mesure de Borel régulière positive m sur $W(L)$ pour laquelle $Mf = \int_{W(L)} \mathfrak{f}\, dm$ pour tout $f \in L$. On remarque que si f est la fonction caractéristique d'un ensemble $A \in A$, alors $\mathfrak{f}(W(L)) \subset \{0,1\}$ et ainsi, par la Proposition 4, $\mathfrak{f}^{-1}(\{1\})$ est un ensemble ouvert et fermé dans $W(L)$. Ainsi, pour $A \in A$ donné, il existe un ensemble ouvert et fermé $U \subset W(L)$ pour lequel $\omega(A) = U \cap \omega(X)$. Evidemment $\partial U = \emptyset$ et ainsi $m(\partial U) = 0$. Il est montré dans [2, p. 268] que si A' est la classe des ensembles $A \subset X$ avec $\omega(A) = V \cap \omega(X)$ où V est un ensemble de Borel dans $W(L)$ pour lequel $m(\partial V) = 0$, alors A' est une algèbre d'ensembles dans X (qui contient A) et la fonction $m''\colon A' \to [0,\infty)$ avec $m''(A) = m(V)$ est une fonction additive bornée bien définie (qui prolonge m' à A').

Lorsque L est en plus une algèbre, désignons par M la classe des fonctionnelles linéaires positives multiplicatives sur L (i.e. la classe des fonctionnelles linéaires positives M sur L telles que $M(fg) = (Mf)(Mg)$). Si L est aussi fermée sous les racines carrées (comme c'est le cas lorsque L est un espace complet par rapport à la norme uniforme), alors les fonctionnelles linéaires réelles multiplicatives sur L sont nécessairement positives.

PROPOSITION 9. *Si L est en plus une algèbre, alors $M\colon L \to \mathbb{R}$ est élément non nul de M si et seulement s'il existe une (unique) mesure de probabilité régulière sur les ensembles de Borel de $W(L)$, représentant M et ayant son support concentré en un point de $W(L)$.*

DÉMONSTRATION. Il est évident que s'il existe une mesure de probabilité sur les boréliens de $W(L)$, représentant M et ayant son support concentré en un point de $W(L)$, alors $M \in \mathcal{M}$. Inversement, supposons $M \in \mathcal{M}$ non nulle et soit m (l'unique) mesure régulière de Borel non nulle sur $W(L)$ représentant M (comme dans la Proposition 8). Puisque $Mf^2 = (Mf)^2$ pour tout $f \in L$, on a par la Remarque 2a que, pour chaque ouvert V dans $W(L)$ avec fonction indicatrice I_V,

$$\begin{aligned} m(V) &= \sup\{Mf: f \le I_V;\ f \in L\} \\ &= \sup\{Mg^2 : g^2 \le I_V;\ g \in L\} \\ &= m^2(V) \end{aligned}$$

et ainsi, par la régularité, $m(E) = m^2(E)$ pour tout borélien E dans $W(L)$. Ainsi donc, m ne prend que les valeurs 0 et 1. En fait, m est concentré en un point de $W(L)$. Pour justifier cela, soit Z l'ensemble (compact non vide) égal à l'intersection de la classe (ayant la propriété d'intersection finie) de tous les sous-ensembles compacts K de $W(L)$ tels que $m(K) = 1$. Si F est un point dans Z, alors c'est un borélien dans (l'espace T_1) $W(L)$ et ainsi $Z\setminus\{F\}$ est aussi un borélien. Ainsi, si $m(\{F\}) \neq 1$ (i.e. $m(\{F\}) = 0$) alors, par la régularité il existe un compact K' dans $Z\setminus\{F\}$ avec $m(K') = 1$. Cela contredit notre choix de Z. Donc nous avons $\{F\} = Z$, et la démonstration est terminée.

THÉORÈME 2. *Si* L *est en plus une algèbre et si* $U: L \to L$ *est un opérateur linéaire qui est positif (i.e.* $Uf \ge 0$ *lorsque* $f \ge 0$*) et multiplicatif (i.e.* $U(fg) = (Uf)(Ug)$ *pour tous* $f,g \in L$*) tel que* $U(1) = 1$, *alors il existe une unique transformation ponctuelle continue* $Q: W(L) \to W(L)$ *telle que* $Uf = f \circ Q \circ \omega$ *pour tout* $f \in L$. *Aussi, si* M *est une fonctionnelle linéaire positive sur* L *telle que* $M(Uf) = Mf$ *pour tout* $f \in L$, *alors il existe une unique mesure de Borel positive régulière* m *sur* $W(L)$ *par rapport à laquelle* Q *est invariante (i.e.* $m(Q^{-1}E) = m(E)$ *pour tout borélien* E *dans* $W(L)$*) et pour laquelle* $Mf = \int_{W(L)} f\, dm$ *pour tout* $f \in L$.

DÉMONSTRATION. Fixons un quelconque $x \in X$, et soit M la fonctionnelle linéaire positive non nulle sur L définie par $Mf = (Uf)(x)$. Alors $M \in \mathcal{M}$ et donc, par la

Proposition 9, il existe un unique $F \in W(L)$ avec $Mf = \hat{f}(F)$ (i.e. $(Uf)(x) = \hat{f}(F)$) pour tout $f \in L$. Désignons par $q\colon X \to W(L)$ la fonction pour laquelle $(Uf)(x) = \hat{f}(q(x))$ pour tout $f \in L$ et tout $x \in X$. Puisque $Uf \in L$ $(f \in L)$, nous avons que $\hat{f} \circ q \in L$ et comme $\{\hat{f}\colon f \in L\}$ est dense dans $C_r(W(L)))$, nous obtenons maintenant le résultat par le Théorème 1 avec $Y = W(L)$ et par la Proposition 8.

REMARQUE 5. a) Dans le contexte du Théorème 2, il est évident que Q admet un point fixe dans $W(L)$ si et seulement si, pour un $F \in W(L)$, on a $(U-I)f \in F$ pour tout $f \in L$.

b) S. Kwapień [9, p. 178] a montré que, si m désigne la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$, à une constante multiplicative près, la seule fonctionnelle linéaire sur $L_\infty([0,1],m)$ invariante par rapport à toute transformation inversible sur $[0,1]$ qui conserve la mesure m, est l'intégrale par rapport à m.

c) Les techniques employées dans la démonstration de la Proposition 8 et de la Proposition 9 sont bien connues et ont été utilisées par de nombreux auteurs pour obtenir des résultats semblables à ces deux propositions. (Voir, par exemple, [8] et [13].)

EXEMPLE 4. Soit X un groupe commutatif localement compact séparé avec groupe dual $\hat{X}$, $B(\hat{X})$ l'algèbre (fermée par rapport à la norme uniforme) de toutes les fonctions continues presque périodiques sur $\hat{X}$, $\theta_x\colon \hat{X} \to \mathbb{C}$ le caractère associé à $x \in X$, et $U\colon B(\hat{X}) \to B(\hat{X})$ un opérateur linéaire positif et multiplicatif tel que $U(1) = 1$. Si pour un quelconque $\hat{x} \in \hat{X}$ la fonction $x \to (U\theta_x)(\hat{x})$ est continue, alors il existe une unique transformation ponctuelle $T\colon \hat{X} \to \hat{X}$ telle que $(Uf)(\hat{x}) = f(T\hat{x})$ pour tout $f \in B(\hat{X})$. Pour montrer cela, soit L l'algèbre des fonctions réelles dans $B(\hat{X})$. Par le Théorème 2 il existe une unique transformation ponctuelle continue $Q\colon W(L) \to W(L)$ telle que $(Uf)(\hat{x}) = \hat{f}(Q \circ \omega(\hat{x}))$ pour tout $f \in L$ et tout $\hat{x} \in \hat{X}$. Ainsi, $|(U\theta_x)(\hat{x})| = 1$ et alors la fonction $x \to (U\theta_x)(\hat{x})$ est un caractère. Ainsi, pour un point $\hat{x} \in \hat{X}$ quelconque, désignons par $T\hat{x}$ l'unique élément de $\hat{X}$ pour lequel $(U\theta_x)(\hat{x}) = \theta_x(T\hat{x})$. Alors $T\colon \hat{X} \to \hat{X}$ est la fonction cherchée.

Pour un $F \in W(L)$ quelconque, désignons par M_F la fonctionnelle dans M dont la mesure de Borel qui la représente sur $W(L)$ est concentrée sur F. Alors, en particulier, on a que $M_{\omega(z)}f = f(z)$ pour tout $f \in L$ et tout $z \in X$. Nous munissons M de la topologie dont les fermés ont pour base les ensembles de la forme $\{M_F: F \in W(L);\ f \in F\}$ pour tout $f \in L_0^+$.

PROPOSITION 10. *Lorsque* L *est en plus une algèbre, on a que* $W(L)$ *est homéomorphe à* M. *De plus, la classe des ensembles* $\{M \in M: Mf = 0\}$ $(f \in L_0^+)$ *est une base pour les fermés de* M.

DÉMONSTRATION. Il est clair que la correspondance $F \to M_F$ est un homéomorphisme entre $W(L)$ et M. La seconde partie de la proposition est maintenant une conséquence de la définition de $W(f)$, du fait que $f(F) = 0$ pour tout f dans F, et de la Proposition 9.

REMARQUE 6. a) Il s'ensuit que, dans le contexte de la Proposition 10, la classe des ensembles $\{M \in M: Mf \leq \alpha\}$ (pour tout $f \in L$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$) est une base pour les fermés de M. Ainsi donc, pour tout $f \in L$ et tous réels α et α', $\{M \in M: \alpha < (M-N)f < \alpha'\}$ est un voisinage ouvert de $N \in M$.

b) Moyennant des méthodes bien connues utilisées dans la théorie des algèbres de Banach commutatives, nous avons les faits suivants lorsque L est en plus une algèbre. (Voir, par exemple, [10, p. 54] et [14, pp. 401, 406] pour prendre connaissance des idées derrière les démonstrations.)

i) Etant donné un espace compact K et un idéal maximal I dans $C_r(K)$, il existe un point (unique) $k \in K$ tel que $I = \{f \in C_r(K): f(k) = 0\}$. Ainsi, par la Remarque 2a, I est un idéal maximal dans $C_r(W(L))$ si et seulement s'il est la fermeture par rapport à la norme uniforme d'un (unique) point $F \in W(L)$. Donc chaque $F \in W(L)$ est un idéal maximal (propre) dans L.

ii) $f \in L$ n'est pas inversible si et seulement si l'ensemble $\{gf: g \in L\}$ est un idéal maximal (propre) contenant f.

iii) Si, en plus, L est une algèbre de Banach réelle par rapport à la norme uniforme, alors chaque $F \in W(L)$ est fermé par rapport à cette norme.

iv) Puisque $\mathbb{R}$ peut être vu comme étant l'ensemble des fonctions constantes dans L, alors, par le Théorème 2, nous obtenons qu'un quelconque homomorphisme positif $U: L \to \mathbb{R}$ est déterminé (uniquement) par un point $F \in W(L)$ de sorte que $Uf = \mathfrak{f}(F)$ pour tout $f \in L$. Donc, un quelconque idéal maximal (propre) dans $C_r(W(L))$ (et ainsi, dans L) est caractérisé comme étant l'ensemble des points où s'annule un homomorphisme positif sur L.

THÉORÈME 3. *Supposons que L soit en plus une algèbre de Banach réelle (par rapport à une norme donnée) telle que tous ses homomorphismes complexes sont positifs. Alors, chaque $f \in L$ qui est éloignée de zéro, est inversible.*

DÉMONSTRATION. $f \in L$ est inversible si et seulement si $Mf \neq 0$ pour tout homomorphisme complexe M sur L. (Voir par exemple, [12, pp. 265, 266].) Ainsi, en vertu des hypothèses, f est inversible si et seulement si $Mf \neq 0$ pour tout $M \in \mathcal{M}$. Mais, si f est éloignée de zéro, on a (par la Proposition 10) que $Mf \neq 0$ pour tout $M \in \mathcal{M}$. Le Théorème 3 est démontré.

EXEMPLE 5. Soit L la classe des fonctions sur $X = [0,\infty)$ de la forme $\sum a_i I_i$ où $i \in \mathbb{N}$, $\{a_i\}$ est une suite de nombres réels telle que $\sum |a_i| < \infty$, et chaque I_i est la fonction indicatrice d'un intervalle non borné $[b_i,\infty)$ avec $0 \le b_i < b_{i+1}$. Evidemment L est un treillis fermé sous les opérations $(\alpha\text{-}f) \vee 0$ et $(f\text{-}\alpha) \vee 0$. Par rapport à la norme $\|\sum a_i I_i\| = \sum |a_i|$, L est en plus une algèbre de Banach réelle. De plus, si M est un homomorphisme sur L, alors pour la fonction indicatrice I d'un intervalle quelconque dans X nous avons $M(I^2) = M(I)$, et alors $(M(I))^2 = M(I)$ (i.e. $M(I)$ est égal à 1 ou à 0). Ainsi donc, si I_1 et I_2 sont les fonctions indicatrices d'intervalles non bornés tels que $I_1 < I_2$, alors $M(I_1) \le M(I_2)$ et ainsi M est positif sur L. Il s'ensuit maintenant par le Théorème 3, qu'une fonction $f \in L$ quelconque éloignée de zéro est inversible dans L.

Supposons maintenant que X est un semigroupe (avec opération binaire écrite multiplicativement) et que L est en plus une algèbre telle que pour chaque $f \in L$ et tout $w \in X$, la fonction f_w définie par $z \to f(wz)$ et les fonctions

$w \to Mf_w$ pour tout $M \in \mathcal{M}$ sont dans L. La *convolution* $M_1 * M_2$ de deux fonctionnelles $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$, telle que définie pour la première fois par Hewitt et Zuckerman dans [4] et [5], est la fonctionnelle $M \in \mathcal{M}$ définie par $Mf = M_1(M_2 f_w)$ pour tout $f \in L$. Sous cette opération binaire, $\mathcal{M}$ est un semigroupe compact (voir la Proposition 10) tel que la fonction $M \to M * N$ est continue sur $\mathcal{M}$ (pour tout $N \in \mathcal{M}$). Ainsi donc, la fonction $(M,N) \to M * N$ est séparément continue sur $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ (i.e. $\mathcal{M}$ est un semigroupe topologique) lorsque $\mathcal{M}$ est commutatif.

THÉORÈME 4. *Soit* X *un semigroupe et supposons que* L *soit en plus une algèbre contenant les fonctions* $z \to f_w(z)$ *et* $z \to Mf_q$ $(z,w \in X)$ *pour tout* $f \in L$ *et tout* $M \in \mathcal{M}$. *Alors, il existe un homomorphisme bijectif* j *de* X *sur un sous-ensemble dense du semigroupe compact* $\mathcal{M}$ *tel que, pour chaque fonction* $f \in L$, *il existe une unique fonction* $f^{\#}$ *dans l'espace* $C_r(\mathcal{M})$ *des fonctions réelles continues sur* $\mathcal{M}$, *pour laquelle* $f = f^{\#} \circ j$ *sur* X. *En plus,* $\{f^{\#}: f \in L\}$ *est dense dans* $C_r(\mathcal{M})$ *et* $\mathcal{M}$ *est un semigroupe topologique lorsque les fonctions* $N \to f^{\#}(M*N)$ *sont dans* $C_r(\mathcal{M})$ *pour tout* $M \in \mathcal{M}$ *et tout* $f \in L$. *Si* X *est aussi un espace topologique sur lequel chaque fonction de* L *est continue, alors* j *est un homéomorphisme lorsque* L *sépare les points de* X *et* X *est complètement régulier par rapport à* L.

DÉMONSTRATION. Désignons par $t: W(L) \to \mathcal{M}$ l'homéomorphisme introduit dans la Proposition 10 et, employant la même notation que précédemment, soit $f^{\#}$ la fonction dans $C_r(\mathcal{M})$ pour laquelle $\mathfrak{f} = f^{\#} \circ t$. Posons $j = t \circ \omega$. Evidemment j est une bijection. Puisque pour tout $f \in L$ et tous $x,y \in X$ nous avons

$$M_{\omega(xy)} f = f(xy) = f_x(y) = M_{\omega(y)} f_x = (M_{\omega(x)} * M_{\omega(y)})(f)$$

il s'ensuit que j est aussi un homomorphisme. Nous obtenons maintenant le résultat en vertu de la Remarque 3a.

EXEMPLE 6. Nous donnons ici un exemple d'un groupe X commutatif pour lequel $\mathcal{M}$ n'est ni commutatif, ni un groupe. Posons $X = \mathbb{R}$ et soit L la classe des fonctions réelles bornées uniformément continues sur X. Evidemment L contient les fonctions $z \to f_x(z)$ et $z \to Mf_z$ pour tout $x \in X$, tout $f \in L$, et tout $M \in \mathcal{M}$.

En plus, L sépare les points de X et X est complètement régulier par rapport à L. Ainsi on a toutes les conclusions du Théorème 4. Cependant, M n'est pas un groupe car certains de ses éléments ne sont pas inversibles. Par exemple, soit $M \in M$ associé à un point $F \in W(L)\backslash\omega(X)$ et soit $f \in L$ à support borné sur X. Alors $f_x \in F$, et ainsi $Mf_x = 0$ pour tout $x \in X$ (i.e. M n'est pas inversible). M est également non commutatif. En effet, soit $g \in L$ tel que $g = 1$ sur $(-\infty,-1)$ et $g = 0$ sur $(1,\infty)$, et prenons $F \in W(L)\backslash\omega(X)$ avec $g \in F$. Soit $F' \in W(L)$ généré par $\{1-f\colon f \in F\}$ et soit M, M' deux éléments de M associés respectivement à F et F'. Alors $Mg_x = 0$ pour tout $x \in X$ (et ainsi $(M'*M)(g) = 0$) tandis que $M'g_x = 1$ pour tout $x \in X$ (et ainsi $(M*M')(g) = 1$).

Références

[1] BANASCHEWSKI, B., On Wallman's method of compactification, *Math. Nachr.* 27 (1963), 105-114.

[2] BELLEY, J.-M., A representation theorem and applications to topological groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* 260(1980), 267-279.

[3] BOCHNER, S., Additive set functions on groups, *Ann. Math.* 40(1939), 769-799.

[4] HEWITT, E., ZUCKERMAN, H.S., Finite dimensional convolution algebras, *Acta Math.* 93(1955), 67-119.

[5] HEWITT, E., ZUCKERMAN, H.S., On convolution algebras, *Proc. Int. Congr. Math.*, vol. 1, 1950, 455.

[6] KAKUTANI, S., Concrete representation of abstract (M)-spaces, *Ann. of Math.* 42(1941), 994-1024.

[7] KELLEY, J.L., *General Topology*, Van Nostrand, New York, 1955.

[8] KIRK, R., CRENSHAW, J., A generalized topological measure theory, *Trans. Amer. Math. Soc.* 207(1975), 190-217.

[99] KWAPIEŃ, S., Linear functionals invariant under measure preserving transformations, *Math. Nachr.* 119(1984), 175-179.

[10] LOOMIS, L.H., *An Introduction to Harmonic Analysis*, Van Nostrand, New York, 1953.

[11] POLLARD, D., TOPSØE, A unified approach to Riesz type representation theorems, *Studia Math.* LIV(1975), 173-190.

[12] RUDIN, W., *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1973.

[13] SULTAN, A., Measure compactification and representation, *Can. J. Math.* 30 (1978), 54-65.

[14] TAYLOR, A., LAY, D., *Introduction to Functional Analysis*, John Wilay & Sons, New York, 1980.

[15] TOPSØE, F., Further results on integral representations, *Studia Math.* LV (1976), 239-245.

Département de mathématiques
Université de Sherbrooke
Sherbrooke, Québec, Canada
J1K 2R1

Manuscrit reçu le 26 septembre 1986.
Revisé le 19 janvier 1987.