Ann. sc. math. Québec, 1987, vol. 11, no 2, pp. 245-252

THÉORÈMES DE STRUCTURE SUR CERTAINES ALGÈBRES DE FRÉCHET

M. Akkar, M. El Azhari et M. Oudadess

Summary

In this note we prove that every Fréchet algebra with a basis $(x_i)_{i\geq 1}$ satisfying: (1) $x_i x_j = x_j x_i = x_j$, $i \leq j$ and (2) $p_i(x_i) \neq 0$, $p_i(x_{i+1}) = 0$, is algebraically and topologically isomorphic to the algebra $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ of complex sequences ($(p_i)_{i\geq 1}$ is a sequence of semi-normes defining the topology of A). The same technical used to prove the latter theorem allows us to obtain a structure theorem for Fréchet algebras with finite carrier space.

Résumé

Nous montrons que toute algèbre de Fréchet à base $(x_i)_{i\geq 1}$ vérifiant: (1) $x_i x_j = x_j x_i = x_j$, $i \leq j$ et (2) $p_i(x_i) \neq 0$, $p_i(x_{i+1}) = 0$, est isomorphe algébriquement et topologiquement à l'algèbre $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ des suites complexes ($(p_i)_{i\geq 1}$ est la famille de semi-normes définissant la topologie de l'algèbre). Nous obtenons aussi un théorème de structure pour les algèbres de Fréchet à spectre global fini.

1. Introduction

Dans [2] T. Husain et J. Liang démontrent que toute algèbre de Fréchet à base $(x_i)_{i\geq 1}$ telle que (1) $x_i x_j = x_j x_i = x_j$, $i \leq j$; (2) $p_i(x_i) \neq 0$, $p_i(x_{i+1}) = 0$ est à caractères continus.

Ils donnent comme exemple de telles algèbres, l'algèbre des suites complexes notée $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Nous montrons (Proposition 3.7) que toute algèbre de Fréchet à base $(x_i)_{i\geq 1}$ telle que (1) et (2) soient vérifiées est isomorphe algébriquement et topologiquement à l'algèbre $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

La même méthode que celle utilisée pour trouver ce résultat nous permettra de montrer que toute algèbre de Fréchet commutative unitaire semi-simple telle que card $M(A) = n$ $(n \geq 1)$ est isomorphe algébriquement et topologiquement à l'algèbre $\mathbb{C}^n$ (Corollaire 4.4).

2. Préliminaires

Soit A une algèbre. A est dite une algèbre localement multiplicativement convexe (en abrégé a.l.m.c.) si A est munie d'une topologie définie par une famille $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de semi-normes d'espace vectoriel vérifiant en outre $p_\lambda(xy) \leq p_\lambda(x)p_\lambda(y)$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ et tous x,y de A.

Une a.l.m.c. complète métrisable est dite une algèbre de Fréchet.

On note par $M^*(A)$ l'ensemble des caractères algébriques (non nuls) de A et par $M(A)$ l'ensemble des caractères continus (non nuls) de A.

Soit E un espace vectoriel topologique (en abrégé e.v.t.). E est dit à base s'il existe une suite $(x_i)_{i\geq 1}$ d'éléments de E telle que pour tout x de E il existe une suite unique $(\alpha_i)_{i\geq 1}$ d'éléments de $\mathbb{C}$ tel que

$$x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i .$$

Soit A une algèbre commutative unitaire. On appelle radical de Jacobson de A (noté $\operatorname{Rad} A$) l'intersection des idéaux maximaux de A; on dit que A est semi-simple si $\operatorname{Rad} A = (0)$.

3. Structures des algèbres de Fréchet vérifiant (1) et (2)

PROPOSITION 3.1. *Soit* A *une a.l.m.c. commutative complète à base* $(x_i)_{i\geq 1}$ *vérifiant* (P): $x_i x_j = x_j$, $i \leq j$. *Alors pour tout* $n \geq 1$, $sp(x_n - x_{n+1}) = \{0,1\}$.

PREUVE. Remarquons d'abord que A est unitaire d'unité x_1. Pour tout $n \geq 1$, $(x_n - x_{n+1})^2 = x_n - x_{n+1}$, d'où $sp(x_n - x_{n+1}) \subset \{0,1\}$.

Si $n = 1$, on a $x_1 - (x_1 - x_2) = x_2$, d'où $1 \in sp(x_1 - x_2)$ car x_2 est non inversible d'après (P); on vérifie facilement que $x_1 - x_2$ est non inversible, d'où $0 \in sp(x_1 - x_2)$.

Si $n \geq 2$, $x_n - x_{n+1}$ n'est pas inversible d'après (P), ainsi $0 \in sp(x_n - x_{n+1})$. Supposons que $1 \notin sp(x_n - x_{n+1})$; il existe $y = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \in A$ tel que $(x_n - x_{n+1} - x_1)y = x_1$.

$$\begin{aligned}(x_n - x_{n+1} - x_1)\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i x_i &= \Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Big)x_n + \alpha_{n+1}x_{n+1} + \sum_{i=n+2}^{\infty}\alpha_i x_i - \Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Big)x_{n+1} \\ &\quad - \sum_{i=n+2}^{\infty}\alpha_i x_i - \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i x_i \\ &= \Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Big)x_n - \Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Big)x_{n+1} - \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i x_i \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\beta_i x_i\end{aligned}$$

avec $\beta_i = -\alpha_i$ pour $i \neq n, n+1$

$$\beta_n = \sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i$$

$$\beta_{n+1} = -\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i .$$

Comme $\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i x_i = x_1$, il s'ensuit que $\beta_1 = 1$, $\beta_i = 0$ pour $i \geq 2$. Si $n = 2$, on aura $\beta_1 = -\alpha_1 = 1$, $\beta_2 = \alpha_1 = 1 = 0$ ce qui est absurde. Si $n \geq 3$, on aura $\beta_1 = -\alpha_1 = 1$, $\beta_i = -\alpha_i = 0$ pour $2 \leq i \leq n-1$ et $\beta_n = \sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i = 0$, ce qui est absurde.

PROPOSITION 3.2. *Soit* $(A,(p_i)_{i\geq 1})$ *une algèbre de Fréchet à base* $(x_i)_{i\geq 1}$ *vérifiant*

(1) $x_i x_j = x_j x_i = x_j, \quad i \leq j$

(2) $p_i(x_i) \neq 0, \quad p_i(x_{i+1}) = 0.$

Alors card $M(A)$ = card $\mathbb{N}$.

PREUVE. (1) et (2) entraînent que $p_i(x_j) = 0$ pour $i < j$ d'où pour toute suite complexe $(\alpha_i)_{i\geq 1}$, $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \in A$ (cf. [1]).

Soit $f \in M(A)$, $f(x_i) \in \{0,1\}$ pour tout $i \geq 1$ car $x_i^2 = x_i$ d'après (1).

Soit $a = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \in A$, $f(a) = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)$ d'où l'existence d'un certain $m \geq 1$ tel que $f(x_j) = 0$ pour tout $j \geq m$. Comme $f(x_1) = 1$, soit $k+1$ le plus petit entier tel que $f(x_{k+1}) = 0$. En utilisant (1), on aura que:

$$f(x_i) = 0 \qquad i > k$$

$$f(x_i) = 1 \qquad 1 \leq i \leq k.$$

k étant unique, on définit l'application ψ par:

$$\psi : M(A) \to \mathbb{N}\setminus\{0\}$$

$$f \mapsto \psi(f) = k.$$

ψ est injective; en effet $\psi(f) = \psi(g)$ entraîne que $f(x_i) = g(x_i)$ pour tout $i \geq 1$, d'où $f = g$ car f et g sont continus. ψ est surjective; en effet, soit $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$; on considère l'élément $x_k - x_{k+1}$. D'après la Proposition 3.1, il existe $f \in M(A)$ tel que $f(x_k - x_{k+1}) = 1$. Il s'ensuit que $f(x_k) = 1$ et $f(x_{k+1}) = 0$ d'où $\psi(f) = k$.

PROPOSITION 3.3. *Soit* A *une algèbre de Fréchet à base* $(x_i)_{i\geq 1}$ *vérifiant* (1) *et* (2). *Alors* A *est semi-simple* (*i.e.* Rad $A = (0)$).

PREUVE. Soit $x \in$ Rad A, $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$. On écrit x sous la forme $x = \alpha_1 x_1 + x_2 \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_i x_i$. D'après la Proposition 3.1, il existe $f \in M(A)$ tel que $f(x_1) = 1$ et $f(x_2) = 0$. Comme $f(x) = \alpha_1$ et $x \in$ Rad A, on a $\alpha_1 = 0$. En répétant ceci jusqu'à l'ordre $n-1$, on aura $x = \alpha_n x_n + x_{n+1} \sum_{i=n+1}^{\infty} \alpha_i x_i$. Le même procédé entraîne que $\alpha_n = 0$, d'où $\mathrm{Rad}\, A = (0)$.

PROPOSITION 3.4. *Soit* A *une algèbre de Fréchet à base* $(x_i)_{i\geq 1}$ *vérifiant* (1) *et* (2). *Alors la topologie faible de* $M(A)$ *est la topologie discrète de* $M(A)$.

PREUVE. Soit $f \in M(A)$. D'après la Proposition 3.2, il existe k unique tel que $f(x_k - x_{k+1}) = 1$. Soit ε tel que $0 < \varepsilon < 1$ et considérons

$$U = \{\chi \in M(A) \mid |\chi(x_k - x_{k+1})| > \varepsilon\}.$$

U est un ouvert de $M(A)$ pour la topologie faible, et on remarque que $U = \{f\}$, d'où le résultat.

PROPOSITION 3.5. *Soit* A *une algèbre de Fréchet à base* $(x_i)_{i\geq 1}$ *vérifiant* (1) *et* (2). *Alors* $A = C(M(A))$ *(algébriquement).*

PREUVE. On considère l'application ϕ (transformation de Gelfand)

$$A \xrightarrow{\phi} C(M(A))$$

$$x \longmapsto \phi(x) \qquad \phi(x) : M(A) \to \mathbb{C}$$

$$f \mapsto f(x).$$

ϕ est un morphisme d'algèbres. ϕ est injective car A est semi-simple d'après la Proposition 3.3. Il reste à montrer que ϕ est surjective.

Soit $\Psi \in C(M(A))$, $M(A)$ est dénombrable. On pose $M(A) = (f_i)_{i\geq 1}$; f_i est telle que $f_i(x_i - x_{i+1}) = 1$. On définit la suite $(\alpha_i)_{i\geq 1}$ par $\alpha_1 = \Psi(f_1)$, $\alpha_2 = \Psi(f_2) - \Psi(f_1), \ldots, \alpha_n = \Psi(f_n) - \Psi(f_{n-1}), \ldots$

Soit $a = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \in A$. Montrons que $\Psi = \phi(a)$. Soit $f_k \in M(A)$. On a $\phi(a)(f_k) = f_k(a) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = \Psi(f_k)$ et ceci pour tout $k \geq 1$. Ainsi ϕ définit un isomorphisme algébrique entre A et $C(M(A))$, ce qui permet d'écrire $A = C(M(A))$ algébriquement.

PROPOSITION 3.6. *Soit* A *une algèbre de Fréchet à base* $(x_i)_{i\geq 1}$ *vérifiant* (1) *et* (2). *Alors* $A = C(M(A))$ *(algébriquement et topologiquement);* $C(M(A))$ *étant muni de la topologie de la convergence compacte.*

PREUVE. Soit τ la topologie de A. On a $A = C(M(A))$ (algébriquement) d'après la Proposition 3.5. En utilisant la Proposition 8.5 de [3], on a $\tau = \tau_o(A)$, $\tau_o(A)$ étant la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes de $M(A)$.

REMARQUE 3.1. $M(A)$ est dénombrable et muni de sa topologie discrète, donc toute partie compacte de $M(A)$ est finie.

PROPOSITION 3.7. *Soit* A *une algèbre de Fréchet à base* $(x_i)_{i\geq 1}$ *vérifiant* (1) *et* (2). *Alors* $A = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *(algébriquement et topologiquement).*

PREUVE. Soit $\mathbb{N}$ muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{C}$, i.e. la topologie discrète de $\mathbb{N}$. Alors $M(A)$ et $\mathbb{N}$ sont homéomorphes et l'on a d'après la Proposition 3.6, $A = C(\mathbb{N})$ (algébriquement et topologiquement). Or $C(\mathbb{N}) = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ (algébriquement).

$$\begin{array}{ll} \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to C(\mathbb{N}) & \\ (\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}} & \Psi : \mathbb{N} \to \mathbb{C} \\ & \quad i \mapsto \alpha_i \,. \end{array}$$

Il est clair que la topologie de la convergence compacte définie sur $C(\mathbb{N})$ coïncide avec la topologie naturelle de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, d'où le résultat.

4. Structure des a.l.m.c. à spectre global fini

PROPOSITION 4.1. *Soit* A *une algèbre topologique telle que* card $M(A) = n$ $(n \geq 1)$. *Alors la topologie faible induite par celle de* A' *sur* $M(A)$ *est la topologie discrète de* $M(A)$.

PREUVE. Soit $M(A) = \{f_1,\dots,f_n\}$. Soit $f_i \in M(A)$. Pour tout j, $1 \leq j \leq n$, $j \neq i$, il existe x_j tel que

$$f_i(x_j) \neq f_j(x_j).$$

On considère $V = \{f \in M(A) \mid |f(x_j))| \neq |f_j(x_j)|, \ 1 \leq j \leq n, \ j \neq i\}$. $V = \{f_i\}$ est ouvert pour la topologie faible.

LEMME 4.1. *Soit* A *une a.l.m.c. complète commutative unitaire semi-simple telle que* $M(A) = \{f_1,\dots,f_n\}$. *Alors pour tout* $1 \leq i \leq n$, $\bigcap_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \operatorname{Ker} f_j \neq (0)$.

PREUVE. $\operatorname{Rad} A = \operatorname{Ker} f_1 \cap \dots \cap \operatorname{Ker} f_n = (0)$. Soit $1 \leq i \leq n$. Supposons que $\bigcap_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \operatorname{Ker} f_j = (0)$. On a

$$\operatorname{Ker} f_1 \dots \operatorname{Ker} f_{i-1} \operatorname{Ker} f_{i+1} \dots \operatorname{Ker} f_n \subset \operatorname{Ker} f_1 \cap \dots \cap \operatorname{Ker} f_{i-1} \cap$$
$$\operatorname{Ker} f_{i+1} \cap \dots \cap \operatorname{Ker} f_n = (0) \subset \operatorname{Ker} f_i .$$

Comme $\operatorname{Ker} f_i$ est un idéal premier (car maximal), il existe $j \neq i$ tel que $\operatorname{Ker} f_j \subset \operatorname{Ker} f_i$ i.e. $\operatorname{Ker} f_i = \operatorname{Ker} f_j$, d'où $f_i = f_j$, ce qui est contradictoire.

PROPOSITION 4.2. *Soit* A *une a.l.m.c. complète commutative semi-simple telle que* card $M(A) = n$. *Alors* $A = C(M(A))$ *(algébriquement)*.

PREUVE. On considère ϕ (transformation de Gelfand)

$$\phi : A \to C(M(A))$$
$$x \mapsto \phi(x) \qquad \phi(x) : M(A) \to \mathbb{C}$$
$$f \mapsto f(x).$$

ϕ est un morphisme d'algèbres et ϕ est injective car A est semi-simple. Il reste à prouver que ϕ est surjective. Soit $\Psi \in C(M(A))$ où $M(A) = \{f_1,\dots,f_n\}$. Pour tout i, $1 \leq i \leq n$, $\bigcap_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \operatorname{Ker} f_j \neq (0)$ d'après le Lemme 4.1.

Soit $x_i \in \bigcap_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \operatorname{Ker} f_j$ $(x_i \neq 0)$. $x_i \notin \operatorname{Ker} f_i$ car A est semi-simple.

On considère

$$a = \sum_{i=1}^{n} \Psi(f_i) \frac{x_i}{f_i(x_i)} .$$

Montrons que $\phi(a) = \Psi$. Pour tout $1 \leq k \leq n$, $\phi(a)(f_k) = f_k(a) = \Psi(f_k)$. Ainsi, $A = C(M(A))$ (algébriquement).

PROPOSITION 4.3. *Soit* A *une a.l.m.c. complète commutative unitaire semi-simple telle que* card $M(A) = n$. *Alors* $A = \mathbb{C}^n$ *(algébriquement et topologiquement).*

PREUVE. On a $A = C(M(A))$ (algébriquement). $M(A)$ étant fini et muni de sa topologie discrète, il s'ensuit que $M(A)$ et $\{1,2,\ldots,n\}$ sont homéomorphes; ainsi $C(M(A)) = C(\{1,2,\ldots,n\})$ (algébriquement). Comme $\mathbb{C}^n = C(\{1,2,\ldots,n\})$ (algébriquement), on obtient $A = \mathbb{C}^n$ (algébriquement). A étant de dimension finie donc normable, A devient une algèbre A-normée complète; donc A est une algèbre de Banach et comme $\mathbb{C}^n$ possède une unique topologie d'algèbre de Banach, il en résulte que $A = \mathbb{C}^n$ (algébriquement et topologiquement).

COROLLAIRE 4.4. *Soit* A *une algèbre de Fréchet commutative unitaire semi-simple telle que* card $M(A) = n$. *Alors* $A = \mathbb{C}^n$ *(algébriquement et topologiquement).*

Références

[1] HUSAIN, T., LIANG, J., Multiplicative functionals on Fréchet algebras with bases, *Can. J. Math.*, vol. XXIX, no 2 (1977), 270-276.

[2] HUSAIN, T., LIANG, J., Continuity of multiplicative linear functionals on Fréchet algebras with bases, *Bull. Soc. Roy. Sc. Liège* 46(1977), 8-11.

[3] MICHAËL, E.A., Locally multiplicatively convex topological algebras, *Mem. Amer. Math. Soc.* 11(1952),

[4] SCHAEFER, H.H., *Topological Vector Spaces*, MacMillan, New York, 1964.

M. Akkar
1, boulevard Jourdan
75690 Paris-Cedex 14
France

M. El Azhari et M. Oudadess
Ecole Normale Supérieure
Avenue Oued Akreuch
Takaddoum, Rabat
B.P. 5118, Maroc

Manuscrit reçu le 4 avril 1986.
Revisé le 12 novembre 1986.