

## MESURE DE HAUSDORFF D'UN FRACTAL À SIMILITUDE INTERNE

Jacques Marion

### Résumé

Dans un espace euclidien, un ensemble compact  $E$  est appelé compact à *similitude interne* s'il admet une décomposition de la forme  $E = \bigcup_{i=1}^{\nu} \varphi_i(E)$  pour un certain ensemble fini  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{\nu}\}$  de similitudes ou anti-similitudes de l'espace. Si la dimension de Hausdorff d'un tel compact est non entière ou simplement diffère de sa dimension topologique, il s'agit d'un *fractal* à similitude interne, un terme dû à Mandelbrot ([6], [7]). L'ensemble triadique de Cantor, dont la dimension de Hausdorff est  $\log 2/\log 3$ , en est l'exemple classique sur la droite. Nous construisons une méthode permettant le calcul de la mesure de Hausdorff (c'est-à-dire de la mesure dans la dimension de Hausdorff de l'ensemble considéré) de fractals à similitude interne, pour ensuite en tirer une application à l'étude de certaines courbes fractales du plan appelées courbes circulaires simples de Von Koch (cf. [9]). L'article se termine par la démonstration, pour une classe importante de fractals linéaires à similitude interne nommés *parfaits isotypiques* (cf. [8]), d'une condition (géométrique) nécessaire et suffisante pour que la mesure de Hausdorff d'un tel fractal soit égale à son diamètre porté à la puissance de sa dimension de Hausdorff. Ceci généralise, de fait, un résultat de Hausdorff [3] concernant l'ensemble de Cantor et certains fractals de même type obtenus par dissections successives d'un intervalle compact initial.

### 1. Introduction

Dans [5], Kahane et Salem décrivent quelques classes d'ensembles parfaits (compacts sans point isolé) sur la droite, notamment celle des parfaits homogènes dont fait partie l'ensemble triadique de Cantor. Le procédé de dissection proposé pour la construction d'un parfait homogène à partir d'un intervalle compact  $K = [a, b]$  se reformule aisément comme suit: on considère  $\nu$  transformations  $\varphi_1, \dots, \varphi_\nu$  de  $\mathbb{R}$  s'écrivant  $\varphi_i(x) = \xi x + \eta_i$ , où  $0 < \xi < \frac{1}{\nu}$ , telles que  $\varphi_i(K) \subset K$  pour  $i = 1, \dots, \nu$  et  $\varphi_i(K) \cap \varphi_j(K) = \emptyset$  si  $i \neq j$ ; les compacts  $\varphi_i(K)$  sont les intervalles "blancs" d'ordre 1 qui restent après une première dissection effectuée sur  $K$ ; on refait une dissection du même type sur chaque intervalle blanc  $\varphi_i(K)$ , pour ne conserver de  $[a, b]$  que les  $\nu^2$  intervalles blancs (d'ordre 2)  $\varphi_i \circ \varphi_j(K)$ , et ainsi de suite, de telle sorte qu'à la  $n$ -ième étape du processus il ne reste de  $[a, b]$  que les  $\nu^n$  intervalles blancs (d'ordre  $n$ )  $\varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_n}(K)$ , deux à deux disjoints, dont la réunion est un compact noté  $E_n$ ; de cette façon  $E_n \supset E_{n+1}$  et le parfait homogène  $E$  de type  $(\nu, \xi)$  est défini par  $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ .

D'autre part, comme on le démontre dans [5], un parfait homogène sur la droite peut aussi se définir de façon intrinsèque puisqu'il possède la propriété caractéristique suivante: "un parfait homogène  $E$  de type  $(\nu, \xi)$  est constitué de  $\nu$  portions disjointes qui lui sont homothétiques (à une translation près) dans le rapport  $\xi$ ", une portion de  $E$  étant l'intersection de  $E$  avec un intervalle ouvert dont  $E$  ne contient pas les extrémités. Ceci nous conduit à définir les parfaits homogènes de  $\mathbb{R}^N$  ( $N \geq 2$ ) de manière analogue.

**DÉFINITION 1.** Un parfait homogène  $E$  de type  $(\nu, \xi)$  dans  $\mathbb{R}^N$  ( $N \geq 2$ ) est un parfait constitué de  $\nu \geq 2$  portions deux à deux disjointes semblables à  $E$  dans le rapport  $\xi$ .

Ici, "semblables à  $E$ " signifie "homothétiques de  $E$ , à une isométrie près", et une portion de  $E$  est l'intersection de  $E$  avec un ouvert dont  $E$  ne rencontre pas la frontière.

Si nous enlevons de la Définition 1 la restriction que les  $\nu$  portions semblables à  $E$  doivent l'être dans le même rapport, nous obtenons une classe plus générale encore de parfaits, les parfaits isotypiques de  $\mathbb{R}^N$ .

DÉFINITION 2. Un parfait isotypique de  $\mathbb{R}^N$  est un parfait  $E$  constitué d'un nombre ( $\geq 2$ ) fini de portions deux à deux disjointes semblables à  $E$ .

Pour  $N = 1$ , si les portions de  $E$  semblables à  $E$  sont des images de  $E$  par des transformations affines  $x \mapsto \xi_1 x + \eta_1$  où  $\xi_1 > 0$ , le parfait isotypique  $E$  peut s'obtenir par essentiellement le même genre de processus de dissection que celui qui détermine les parfaits homogènes linéaires de [5].

Généralisant davantage, on pose

DÉFINITION 3. Un parfait  $E \subset \mathbb{R}^N$  est appelé parfait à similitude interne si  $E$  est une réunion finie d'au moins deux parties semblables à  $E$ .

Plusieurs parfaits à similitude interne, dont les parfaits isotypiques, sont d'intérieur vide et de "profil" très "accidenté". L'ensemble triadique de Cantor  $C$  (ou "poussière de Cantor" dans la terminologie de Mandelbrot [6]) est de cette nature. Certains parfaits homogènes sur  $[0,1]$  (dont  $C$ ) peuvent se définir comme ensemble de nombres réels dont le développement dans une base donnée  $q$  ne comporte pas certains chiffres. Hausdorff [3] définit le concept de dimension fractionnaire et de mesure en dimension fractionnaire. Il démontre que la dimension de  $C$  est  $\log 2 / \log 3$  et que sa "mesure en cette dimension" est 1. Plus généralement, il démontre qu'un parfait homogène de type  $(2, \xi)$  construit par dissection d'un intervalle est de dimension  $\log 2 / \log \xi^{-1}$ , et que la "mesure du parfait dans cette dimension" est 1 lorsque son diamètre est 1.

Suivirent dans cette direction les travaux de Best [1], Gierl [2] et Wegmann [12], qui toutefois ne traitent que de cas particuliers de parfaits homogènes pouvant se définir (comme  $C$ ) à partir d'une caractéristique du développement  $q$ -adique de leurs éléments.

Les résultats du présent article constituent un prolongement du travail de Hausdorff cité plus haut (cf. [3]) en ce sens qu'ils portent sur le calcul de la mesure en dimension fractionnaire d'ensembles "fractals" (néologisme de Mandelbrot [6] désignant un ensemble dont la dimension au sens de Hausdorff diffère de sa dimension topologique) tels les parfaits homogènes, les parfaits isotypiques et d'autres parfaits à similitude interne. Les énoncés (sans démonstration) de certains de ces résultats ont été publiés par l'auteur dans [8].

## 2. Remarques préliminaires

Si un parfait  $E \subset \mathbb{R}^N$  est à similitude interne, il existe  $\nu \geq 2$  similitudes ou anti-similitudes de  $\mathbb{R}^N$ ,  $\varphi_1, \dots, \varphi_\nu$ , de rapports  $\xi_1, \dots, \xi_\nu$  (tous  $< 1$ ) telles que

$$\begin{aligned} E &= \bigcup_{i=1}^{\nu} \varphi_i(E) = \bigcup_{i=1}^{\nu} \varphi_i \left( \bigcup_{j=1}^{\nu} \varphi_j(E) \right) \\ &= \bigcup_{i,j=1}^{\nu} \varphi_i \circ \varphi_j(E) = \bigcup_{i_1, \dots, i_n=1}^{\nu} \varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_n}(E) \end{aligned}$$

quel que soit  $n \geq 1$ . Donc  $E$  est aussi une réunion de  $\nu^n$  parties semblables à  $E$ . Les  $\nu^n$  similitudes ou anti-similitudes  $\varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_n}$  sont respectivement de rapport  $\xi_{i_1} \dots \xi_{i_n} < 1$  et ont chacune leur unique point fixe situé dans  $\varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_n}(E)$ . Puisque tout point  $x$  de  $E$  appartient, pour une infinité de valeurs de  $n$ , à un des compacts  $\varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_n}(E)$ , et puisque le diamètre de ces derniers tend uniformément vers 0 lorsque  $n \rightarrow \infty$ ,  $x$  est dans l'adhérence de l'ensemble des points fixes des contractions  $\varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_n}$  ( $n \geq 1$ ). Mais ces points fixes sont dans  $E$  et  $E$  est compact, donc  $E$  est l'adhérence de cet ensemble de points fixes. Par conséquent, tout parfait à similitude interne est entièrement déterminé par un certain ensemble fini de similitudes ou anti-similitudes de  $\mathbb{R}^N$ .

Réciproquement, soient  $\varphi_1, \dots, \varphi_\nu$  ( $\nu \geq 2$ ) des similitudes ou anti-similitudes de  $\mathbb{R}^N$  de rapports  $\xi_1, \dots, \xi_\nu$  (tous  $< 1$ ), que l'on représente par  $\varphi_i(X) = \xi_i A_i X + B_i$ , où  $A_i$  est une matrice orthogonale (de déterminant 1 si  $\varphi_i$

est une similitude et  $-1$  si  $\varphi_i$  est une anti-similitude) et  $B_i$  une matrice-colonne. Le point fixe de  $\varphi_i$  est  $C_i = -(\xi_i A_i - I)^{-1} B_i$ . Par un calcul direct, on obtient

$$\varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_n}(X) = \xi_{i_1} \dots \xi_{i_n} A_{i_1} \dots A_{i_n} X + \varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_{n-1}}(B_{i_n}),$$

de sorte que  $\varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_n}$  a comme point fixe

$$C_{i_1 \dots i_n} = -(\xi_{i_1} \dots \xi_{i_n} A_{i_1} \dots A_{i_n} - I)^{-1} \varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_{n-1}}(B_{i_n}).$$

Puisque la matrice  $\xi_{i_1} \dots \xi_{i_n} A_{i_1} \dots A_{i_n}$  converge uniformément vers 0 lorsque  $n \rightarrow \infty$  (car  $\|A_{i_1} \dots A_{i_n}\| \leq 1$ ), un point limite d'une suite de points  $C_{i_1 \dots i_n}$  est un point limite d'une suite de points  $\varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_{n-1}}(B_{i_n})$ , et réciproquement. Soit  $E$  l'adhérence de l'ensemble des  $C_{i_1 \dots i_n}$  ( $n \geq 1$ ). On constate que  $E$  n'a pas de point isolé. En effet, pour  $i_1, \dots, i_n$  fixés, si l'on pose  $\psi = \varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_n}$  et  $\psi^k$  la  $k$ -ième itérée de  $\psi$ , le point fixe de  $\psi^k \circ \varphi_1$  est de la forme  $M_k \psi^k(B_1)$  où  $M_k \rightarrow I$ , et par conséquent ce point fixe tend vers  $C_{i_1 \dots i_n}$  lorsque  $k \rightarrow \infty$ . Soit  $x \in E$ . Les indices  $i_1, i_2, \dots$ , ne pouvant prendre qu'un nombre fini de valeurs distinctes, il existe, pour un certain  $j$  fixé, une suite  $\{p_m\}$  de points de la forme  $\varphi_j \circ \varphi_{i_2} \circ \dots \circ \varphi_{i_{n-1}}(B_{i_n})$  qui converge vers  $x$ . Alors  $\varphi_j^{-1}(p_m)$ , qui est de la forme  $\varphi_{i_2} \circ \dots \circ \varphi_{i_{n-1}}(B_{i_n})$ , converge vers un point de  $E$ , d'où  $x \in \varphi_j(E)$ . Donc  $E \subset \bigcup_{j=1}^{\nu} \varphi_j(E)$ . D'autre part, pour tout  $x \in E$  et  $i \in \{1, \dots, \nu\}$ ,  $\varphi_i(x)$  est la limite d'une suite de points de la forme  $\varphi_i \circ \varphi_{i_2} \circ \dots \circ \varphi_{i_{n-1}}(B_{i_n})$ , d'où  $\varphi_i(x) \in E$ . Ceci démontre que  $E = \bigcup_{j=1}^{\nu} \varphi_j(E)$ , c'est-à-dire que  $E$  est un parfait à similitude interne.

En somme, tout ensemble fini de similitudes ou anti-similitudes  $\varphi_i(X) = \xi_i A_i X + B_i$  de  $\mathbb{R}^N$  de rapport  $\xi_i < 1$  détermine un unique parfait  $E$  à similitude interne, soit l'adhérence des points fixes des composées  $\varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_n}$  ( $n \geq 1$ ). Ce parfait coïncide avec l'ensemble des valeurs d'adhérence de suites de points de la forme  $\varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_{n-1}}(B_{i_n})$ . Toutefois on constate aisément que des ensembles différents de similitudes ou anti-similitudes peuvent déterminer le même parfait.

Dans [4], Hutchinson démontre plus généralement (et par une approche différente) qu'un ensemble fini  $\{S_1, \dots, S_\nu\}$  de contractions d'un espace métrique complet détermine un unique ensemble fermé et borné  $E$  vérifiant  $E = \bigcup_{i=1}^{\nu} S_i(E)$ , cet ensemble étant précisément l'adhérence des points fixes des composées

$$S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_n} \quad (n \geq 1).$$

Par ailleurs, tout parfait à similitude interne peut se construire par un "processus de dissection généralisé" appliqué à un compact d'intérieur non-vidé. En effet, selon [4], pour tout ensemble  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_\nu\}$  de similitude ou anti-similitudes de  $\mathbb{R}^N$  de rapports  $< 1$  on peut définir un compact  $C$  d'intérieur non-vidé tel que  $\bigcup_{i=1}^{\nu} \varphi_i(C) \subset C$ , et d'autre part, le parfait  $E$  à similitude interne associé à  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_\nu\}$  peut s'écrire

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i_1, \dots, i_n=1}^{\nu} \varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_n}(K)$$

quel que soit le compact  $K$  vérifiant  $\bigcup_{i=1}^{\nu} \varphi_i(K) \subset K$  (en particulier pour  $K = C$ ).

Plus généralement encore, Hutchinson [4] démontre que pour tout ensemble non-vidé borné  $A \subset \mathbb{R}^N$

$$E = \lim_{n \rightarrow \infty} \bigcup_{i_1, \dots, i_n=1}^{\nu} \varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_n}(A)$$

où  $E$  est le parfait associé à  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_\nu\}$ , la convergence s'effectuant par rapport à la métrique de Hausdorff.

### 3. Mesure et dimension de Hausdorff; définitions

Notons par  $|\Delta|$  le diamètre d'un ensemble  $\Delta \subset \mathbb{R}^N$ . Pour tout nombre  $\rho > 0$ , soit  $\mathcal{R}_\rho(S)$  la famille des recouvrements dénombrables  $\{\Delta_i\}$  d'un ensemble  $S \subset \mathbb{R}^N$  par des ensembles  $\Delta_i$  tels que  $|\Delta_i| < \rho$ . Pour tout nombre  $r > 0$ , posons

$$H_\rho^r(S) = \inf \left\{ \sum_i |\Delta_i|^r : \{\Delta_i\} \in \mathcal{R}_\rho(S) \right\}$$

et

$$H^r(S) = \lim_{\rho \rightarrow 0} H_\rho^r(S).$$

Cette dernière limite (possiblement infinie) existe toujours car  $H_{\rho_1}^r(S) \geq H_{\rho_2}^r(S)$  si  $\rho_1 < \rho_2$ . La quantité  $H^r(S)$  est la *r-mesure de Hausdorff* de l'ensemble  $S$ , ou encore, la *mesure de Hausdorff en dimension  $r$*  de l'ensemble  $S$ .

On vérifie aisément que

$$\inf\{r: H^r(S) = 0\} = \sup\{r: H^r(S) = \infty\},$$

et cette valeur commune est par définition la *dimension de Hausdorff* de  $S$ , notée  $\dim S$ . De plus, si l'on pose  $\alpha = \dim S$ , nous dirons que  $H^\alpha(S)$  est la *mesure de Hausdorff* de  $S$ . Cette dernière peut être infinie, nulle ou finie et non nulle (ce sera le cas de plusieurs fractals) selon les ensembles  $S$ . Notamment, on démontre dans [5] que si  $E$  est un parfait homogène de type  $(\nu, \xi)$  sur  $\mathbb{R}$ , on a  $0 < H^\alpha(E) < \infty$  pour  $\alpha = \log \nu / \log \xi^{-1}$ , cette valeur de  $H^\alpha(E)$  n'étant toutefois pas calculée. Il est visible que si  $0 < H^r_0(S) < \infty$  alors  $\dim S = r_0$ . On détermine souvent de cette façon la dimension de Hausdorff de plusieurs ensembles. Celle des parfaits homogènes de type  $(\nu, \xi)$  sur la droite est donc égale à  $\log \nu / \log \xi^{-1}$ .

Moran [10] détermine ainsi la dimension des parfaits isotypiques et de certains parfaits à similitude interne "très proches" des parfaits isotypiques, sans toutefois tenter d'évaluer les mesures de Hausdorff correspondantes. Nous nous proposons de faire ces calculs de mesures dans plusieurs cas généraux.

REMARQUE 1. Dans la définition de  $H^r_0(S)$  les recouvrements  $\{\Delta_i\}$  peuvent être supposés ouverts sans que cela n'influe sur la valeur de  $\lim_{\rho \rightarrow 0} H^r_\rho(S)$ , c'est-à-dire de  $H^r(S)$  (cf. [11], p. 51). Si en plus  $S$  est compact, alors les recouvrements peuvent être supposés ouverts et finis.

#### 4. Coincidence de la dimension de Hausdorff avec la dimension d'homothétie

Soit  $E$  le parfait à similitude interne déterminé par un ensemble  $\{\phi_1, \dots, \phi_\nu\}$  de  $\nu$  similitudes ou anti-similitudes de  $\mathbb{R}^N$  de rapports  $\xi_1, \dots, \xi_\nu$  respectivement, et notons  $\alpha$  le nombre réel positif défini par l'équation

$\xi_1^\alpha + \dots + \xi_\nu^\alpha = 1$ . Ce nombre, appelé *dimension d'homothétie* de  $E$  par Mandelbrot (cf. [7]), est donc complètement déterminé, à l'instar de  $E$ , par les contractions  $\varphi_1, \dots, \varphi_\nu$ . Si dans certaines conditions l' $\alpha$ -mesure de  $E$  est finie et non nulle, alors  $\alpha$  devient la dimension de Hausdorff de  $E$ .

PROPOSITION 4.1.  $H_0^\alpha(E) = H^\alpha(E)$ , pour tout  $\rho > 0$ .

DÉMONSTRATION. Soit  $\{\Delta_i\} \in \mathcal{R}_\rho(E)$ . Alors  $\{\varphi_j(\Delta_i)\} \in \mathcal{R}_{\xi\rho}(E)$  où  $\xi = \max\{\xi_j : 1 \leq j \leq \nu\}$  car  $E = \bigcup_{j=1}^{\nu} \varphi_j(E)$ . De plus,

$$\sum_{j=1}^{\nu} |\varphi_j(\Delta_i)|^\alpha = \sum_{j=1}^{\nu} \xi_j^\alpha |\Delta_i|^\alpha = |\Delta_i|^\alpha.$$

Donc

$$\sum_{i,j} |\varphi_j(\Delta_i)|^\alpha = \sum_i |\Delta_i|^\alpha,$$

et par conséquent

$$H_{\xi\rho}^\alpha(E) = H_\rho^\alpha(E)$$

bien que  $\xi\rho < \rho$ . En d'autres termes,  $H_\rho^\alpha(E)$  demeure constant lorsque  $\rho \downarrow 0$ , d'où le résultat.

COROLLAIRE 4.2.  $H^\alpha(E) \leq |E|^\alpha < \infty$ , d'où  $\dim E \leq \alpha$ .

Nous proposons maintenant une condition de "séparation" des parties  $\varphi_i(E)$  suffisante pour que  $H^\alpha(E) > 0$ .

DÉFINITION 4. L'ensemble  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_\nu\}$  déterminant le parfait  $E$  vérifie la condition (notée  $*$ ) de *séparation par des ouverts semblables* s'il existe un ouvert borné  $O \subset \mathbb{R}^N$  tel que  $\bar{O} \supset E$  et tel que si  $n' \geq n$ , alors

$$[\varphi_{j_1} \circ \dots \circ \varphi_{j_{n'}}(O)] \cap [\varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_n}(O)] = \emptyset$$

lorsque  $(i_1, \dots, i_n) \neq (j_1, \dots, j_{n'})$ .

REMARQUE 2. Moran [10] pose une condition un peu plus forte (c'est celle que Hutchinson [4] appelle "open sets condition") à savoir l'existence d'un ouvert



borné  $O$  tel que  $\bigcup_{i=1}^{\nu} \varphi_i(O) \subset O$  avec  $\varphi_i(O) \cap \varphi_j(O) = \emptyset$  si  $i \neq j$ . Mais cette condition de Moran serait trop restrictive dans l'étude des "courbes fractales" au paragraphe 5.

Dans ce qui suit, nous supposons donc que  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{\nu}\}$  vérifie la condition (\*) de séparation par des ouverts semblables, et  $O$  désignera un ouvert borné de par lequel cette condition est satisfaite. Les  $\nu^n$  ouverts (deux à deux disjoints)  $\varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_n}(O)$  seront appelés *ouverts fondamentaux d'ordre n*. Posons

$$O_n = \bigcup_{i_1, \dots, i_n=1}^{\nu} \varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_n}(O).$$

Appelons *partie simple de  $O_n$*  toute réunion d'ouverts fondamentaux d'ordre  $n$ . Vu l'hypothèse  $E \subset \bar{O}$ , on a

$$E \subset \bar{O}_n = \bigcup_{i_1, \dots, i_n=1}^{\nu} \varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_n}(\bar{O}).$$

Notons par  $G_n$  la famille des parties simples d'ordre  $n$ , et par  $L_n$  la famille des recouvrements finis de  $O_n$  par des parties simples d'ordre  $n$ .

PROPOSITION 4.3.  $H^{\alpha}(E) = \inf\{ \sum_{P \in \Gamma} |P|^{\alpha} : \Gamma \in L_n, n \geq 1 \}$ .

DÉMONSTRATION. Soit  $\Omega$  un recouvrement fini de  $E$  par des ouverts. Puisque  $\bar{O}_n \rightarrow E$  (dans la métrique de Hausdorff) il existe un entier  $n_0 \geq 1$  et un compact  $A$  recouvert par  $\Omega$  tel que  $A \supset \bigcup_{n \geq n_0} \bar{O}_n$ . Il existe aussi un nombre de Lebesgue  $\epsilon > 0$  associé à  $\Omega$  et à  $A$  tel que tout ensemble contenu dans  $A$  et de diamètre  $\leq \epsilon$  soit contenu dans au moins un des ouverts de  $\Omega$ . Pour  $n \geq n_0$  suffisamment grand, le diamètre de chacun des  $\nu^n$  ouverts fondamentaux d'ordre  $n$  est inférieur à  $\epsilon$ . Donc si l'on fait correspondre à chaque ouvert  $G \in \Omega$  la réunion de tous les ouverts fondamentaux contenus dans  $G$ , on obtient un recouvrement fini  $\Gamma$  de  $O_n$  par des parties simples d'un ordre commun  $n$  tel que

$$\sum_{P \in \Gamma} |P|^{\alpha} \leq \sum_{G \in \Omega} |G|^{\alpha}.$$

Alors, en vertu de la Remarque 1 et de la Proposition 4.1, le résultat est démontré.

Nous introduisons maintenant les notations suivantes: pour  $P \in G_n$

$$\Phi_n(P) = \{(i_1, \dots, i_n) : \varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_n}(\emptyset) \subset P\}$$

et

$$h_n(P) = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \Phi_n(P)} (\xi_{i_1} \dots \xi_{i_n})^\alpha.$$

REMARQUE 3. On vérifie aisément que pour tout  $P \in G_n$  et  $k \geq 1$

$$h_n(P) \leq \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^{\nu} (\xi_{i_1} \dots \xi_{i_n})^\alpha = (\xi_1^\alpha + \dots + \xi_\nu^\alpha)^n = 1^n = 1$$

$$h_{n+k}(\varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_k}(P)) = (\xi_{i_1} \dots \xi_{i_k})^\alpha h_n(P).$$

De plus,

$$h_n(P) = 1 \iff P = \emptyset_n.$$

Compte tenu de ces notations et de l'hypothèse de séparation (\*), on a

PROPOSITION 4.4.  $H^\alpha(E) \geq \inf\{|P|^\alpha/h_n(P) : P \in G_n \text{ et } n \geq 1\} > 0$ , et  $\dim E = \alpha$ .

DÉMONSTRATION. Posons  $\delta = \inf\{|P|^\alpha/h_n(P) : P \in G_n \text{ et } n \geq 1\}$ . Si  $\Gamma \in L_n$  pour un certain  $n \geq 1$ , on a

$$\sum_{P \in \Gamma} |P|^\alpha \geq \delta \sum_{P \in \Gamma} h_n(P) \geq \delta \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^{\nu} (\xi_{i_1} \dots \xi_{i_n})^\alpha = \delta,$$

et par conséquent, en vertu de 4.3

$$H^\alpha(E) \geq \delta.$$

Pour la suite nous empruntons essentiellement la démarche de Moran [10].

Arrangeons en ordre décroissant tous les rapports  $(\xi_{i_1} \dots \xi_{i_n})$  (les  $i_k$  et  $n$  varient) pour former la suite infinie

$$\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \gamma_3 \geq \dots$$

Soit  $m \geq 2$  et  $P \in G_m$  une partie simple telle que

$$|P| < |O| \left( \max_{1 \leq i \leq v} \xi_i \right).$$

Posons  $d = |P|/|O|$ , et soit  $r$  un indice vérifiant

$$\gamma_r > d \geq \gamma_{r+1}.$$

Soit  $B$  une boule centrée en un point quelconque de  $P$  et de rayon  $2d|O|$ . Posons

$$\xi = \min_{1 \leq i \leq v} \xi_i.$$

Considérons la famille  $U$  des ouverts fondamentaux  $\varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_n}(O)$  d'ordre  $\geq 2$  contenus dans  $B$  pour lesquels les indices  $i_1, \dots, i_n$  vérifient

$$\xi_{i_1} \dots \xi_{i_{n-1}} \geq \gamma_{r+1} \geq \xi_{i_1} \dots \xi_{i_n} \geq \gamma_{r+1} \xi.$$

Soit  $(j_1, \dots, j_m) \in \Phi_m(P)$ . On a

$$\xi_{j_1} \dots \xi_{j_m} = |\varphi_{j_1} \circ \dots \circ \varphi_{j_m}(O)|/|O| \leq |P|/|O| = d < \gamma_r,$$

et puisque  $\xi_{j_1} \dots \xi_{j_m}$  est un élément de la suite  $\{\gamma_j\}$ , il en résulte que

$$\xi_{j_1} \dots \xi_{j_m} \leq \gamma_{r+1}. \text{ Si } \xi_{j_1} \dots \xi_{j_m} \leq \gamma_{r+1} \xi, \text{ alors pour un certain } p$$

$$\xi_{j_1} \dots \xi_{j_{m-p}} \geq \gamma_{r+1} \xi \geq \xi_{j_1} \dots \xi_{j_{m-p+1}}$$

d'où

$$\gamma_{r+1} \geq \gamma_{r+1} \xi \xi_{j_{m-p+1}}^{-1} \geq \xi_{j_1} \dots \xi_{j_{m-p}}$$

car  $\xi \leq \xi_{j_{m-p+1}}$ . Donc

$$\gamma_{r+1} \geq \xi_{j_1} \dots \xi_{j_{m-p}} \geq \gamma_{r+1} \xi.$$

Par conséquent, quel que soit  $(j_1, \dots, j_m) \in \Phi_m(P)$ , il existe un entier  $q \geq 0$

tel que

$$\xi_{j_1} \dots \xi_{j_{m-q-1}} \geq \gamma_{r+1} \geq \xi_{j_1} \dots \xi_{j_{m-q}} \geq \gamma_{r+1} \xi.$$

De plus, on vérifie que  $\varphi_{j_1} \circ \dots \circ \varphi_{j_{m-q}}(O) \subset B$  car

$$\begin{aligned} & \{\varphi_{j_1} \circ \dots \circ \varphi_{j_{m-q}}(\overline{O}) \cap \varphi_{j_1} \circ \dots \circ \varphi_{j_m}(\overline{O})\} \\ & \supset \{\varphi_{j_1} \circ \dots \circ \varphi_{j_{m-q}}(E) \cap \varphi_{j_1} \circ \dots \circ \varphi_{j_m}(E)\} = \varphi_{j_1} \circ \dots \circ \varphi_{j_m}(E) \end{aligned}$$

d'où

$$\varphi_{j_1} \circ \dots \circ \varphi_{j_{m-q}}(\overline{O}) \cap \overline{P} \neq \emptyset,$$

et d'autre part

$$|\varphi_{j_1} \circ \dots \circ \varphi_{j_{m-q}}(\overline{O})| = \xi_{j_1} \dots \xi_{j_{m-q}} |O| \leq \gamma_{r+1} |O| \leq d|O|,$$

où  $d|O| = |P|$  est le demi-rayon de la boule  $B$  centrée en un point de  $P$ . Par conséquent  $\varphi_{j_1} \circ \dots \circ \varphi_{j_{m-q}}(O) \in U$ . Ecrivons  $U = \{G_i\}_{i=1}^k$ . Ces ouverts  $G_i$  sont deux à deux disjoints en vertu de l'hypothèse de séparation (\*). De plus, si  $\text{mes}_N(S)$  désigne la mesure de Lebesgue de l'ensemble  $S$  dans  $\mathbb{R}^N$ , on a

$$\text{mes}_N(G_i) = (|G_i|/|O|)^N \text{mes}_N(O) \geq (\gamma_{r+1} \xi)^N \text{mes}_N(O),$$

et alors

$$\text{mes}_N(B) \geq \text{mes}_N\left(\bigcup_{i=1}^k G_i\right) = \sum_{i=1}^k \text{mes}_N(G_i) \geq k(\gamma_{r+1} \xi)^N \text{mes}_N(O),$$

d'où

$$k \leq \text{mes}_N(B) / (\gamma_{r+1} \xi)^N \text{mes}_N(O) = \kappa_N (2d|O|)^N / (\gamma_{r+1} \xi)^N \text{mes}_N(O),$$

où  $\kappa_N$  est la mesure de Lebesgue dans  $\mathbb{R}^N$  de la boule de rayon 1. Par définition de la suite  $\{\gamma_j\}$  on a  $\gamma_{r+1} \geq \xi \gamma_r$ . Donc

$$d/\gamma_{r+1} \leq \gamma_r/\gamma_{r+1} \leq \xi^{-1},$$

et par conséquent

$$k \leq \kappa_N 2^N |O|^N / (\xi^{2N} \text{mes}_N(O)).$$

Soit  $G = \varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_n}(O) \in U$ , où  $n \leq m$ . Posons

$$R_G = U\{\varphi_{j_1} \circ \dots \circ \varphi_{j_m}(0) : j_1 = i_1, \dots, j_n = i_n \text{ et } (j_1, \dots, j_m) \in \Phi_m(P)\}.$$

Si  $R_G \neq \emptyset$ , alors  $R_G \in G_m$  avec  $\Phi_m(R_G) \subset \Phi_m(P)$  et

$$h_m(R_G) \leq \sum_{j_{n+1}, \dots, j_m=1}^{\nu} (\xi_{i_1} \dots \xi_{i_n} \xi_{j_{n+1}} \dots \xi_{j_m})^\alpha = (\xi_{i_1} \dots \xi_{i_n})^\alpha \leq \gamma_{r+1}^\alpha.$$

D'autre part, pour tout  $m$ -tuplet  $(j_1, \dots, j_m) \in \Phi_m(P)$  il existe  $G = \varphi_{j_1} \circ \dots \circ \varphi_{j_{m-q}}(0) \in U$  tel que  $(j_1, \dots, j_m) \in \Phi_m(R_G)$ . Donc

$$\Phi_m(P) = \bigcup_{i=1}^k \Phi_m(R_{G_i}),$$

d'où

$$h_m(P) \leq \sum_{i=1}^k h_m(R_{G_i}) \leq k \gamma_{r+1}^\alpha \leq k d^\alpha = k |P|^\alpha / |\mathcal{O}|^\alpha.$$

Par conséquent

$$|P|^\alpha / h_m(P) \geq |\mathcal{O}|^\alpha / k \geq |\mathcal{O}|^\alpha \xi_{\text{mes}_N}^{2N}(\mathcal{O}) / (\kappa_N 2^N |\mathcal{O}|^N) > 0,$$

d'où

$$\delta > 0.$$

Puisque (selon 4.2)  $H^\alpha(E) \leq |E|^\alpha$ , on obtient

$$0 < H^\alpha(E) < \infty$$

d'où

$$\dim E = \alpha,$$

ce qui termine la démonstration.

REMARQUE 4. Si  $E$  est un parfait isotypique, c'est-à-dire si les réductions  $\varphi_i(E)$  sont deux à deux disjointes, alors en posant

$$\tau = \min_{i \neq j} \text{dist}(\varphi_i(E), \varphi_j(E))$$

et

$$\mathcal{O} = \{x \in \mathbb{R}^N : \text{dist}(x, E) < \tau/3\},$$

les ouverts  $\varphi_i(O)$  deviennent deux à deux disjoints et contenus dans  $O$ . Les hypothèses de 4.4 étant alors satisfaites, on obtient

COROLLAIRE 4.5 (Moran). *Si  $E$  est un parfait isotypique,*

$$0 < H^\alpha(E) < \infty \text{ et } \dim E = \alpha.$$

## 5. Courbes fractales

Considérons un segment  $I = P_0P$  dans  $\mathbb{R}^N$ . Le parfait  $E$  à similitude interne associé à l'ensemble  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_\nu\}$  de similitudes ou anti-similitudes de  $\mathbb{R}^N$  devient la trace d'une courbe continue d'extrémités  $P_0$  et  $P$  si les images  $\varphi_1(I), \dots, \varphi_\nu(I)$  forment une ligne polygonale continue, que l'on notera  $L_1$ , joignant  $P_0$  à  $P$ . En effet, dans cette hypothèse pour tout entier  $n \geq 1$  la réunion de  $\nu^n$  segments fondamentaux  $\varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_n}(I)$  d'ordre  $n$  constitue un chemin polygonal continu  $L_n$  de  $P_0$  à  $P$  tel que

$$E = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n,$$

la convergence s'effectuant par rapport à la métrique de Hausdorff. De plus, si l'on donne aux lignes polygonales  $L_n$  leur paramétrisation naturelle (linéaire par morceaux), ces courbes convergent uniformément vers la courbe fractale  $E$  (par abus de langage,  $E$  désignera aussi bien la courbe que la trace de celle-ci).

Par sa construction, la courbe  $E$  est simple (sans point multiple) si et seulement si elle est contenue, à l'exception de ses extrémités  $P_0$  et  $P$ , dans un ensemble  $S$  dont les images  $\varphi_1(S), \dots, \varphi_\nu(S)$  sont deux à deux disjointes. Dans le cas où  $E$  est simple, on démontre (cf. [9]) que sa dimension de Hausdorff coïncide avec sa dimension d'homothétie  $\alpha$ , mais la méthode utilisée dans [9] ne permet pas d'établir si  $H^\alpha(E) > 0$ . Toutefois, lorsque la courbe est plane, on a le résultat suivant:

PROPOSITION 5.1. *Avec les notations introduites ci-dessus, supposons que  $E \cup I$  soit la frontière d'un ouvert borné du plan (ce qui est toujours le cas lorsque  $E$  est simple). Si tout chemin polygonal de  $P_0$  à  $P$  construit avec des*

segments fondamentaux (pas nécessairement tous du même ordre) est simple, alors

$$H^{\alpha}(E) > 0.$$

DÉMONSTRATION. La réunion de  $E$  avec le segment  $I = P_0P$  constitue la frontière d'un ouvert borné  $O$  du plan. Alors, l'arc de courbe  $\varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_n}(E)$  et sa corde  $\varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_n}(I)$  délimitent l'ouvert  $\varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_n}(O)$ .

Considérons des indices  $r_1, \dots, r_n$  et  $s_1, \dots, s_{n'}$ , (où  $n' \geq n$ ) tels que  $(s_1, \dots, s_{n'}) \neq (r_1, \dots, r_n)$ . Pour tout entier  $k \geq 1$ , soit  $G_k$  l'ouvert délimité par la ligne polygonale  $\varphi_{r_1} \circ \dots \circ \varphi_{r_n}(L_k)$  et le segment  $\varphi_{r_1} \circ \dots \circ \varphi_{r_n}(I)$ , et soit  $G'_k$  l'ouvert délimité par  $\varphi_{s_1} \circ \dots \circ \varphi_{s_{n'}}(L_k)$  et  $\varphi_{s_1} \circ \dots \circ \varphi_{s_{n'}}(I)$ . Etant donné les hypothèses de la proposition, les ouverts  $G_{k_1}$  et  $G'_{k_2}$  (où  $k_1$  et  $k_2$  sont des entiers positifs quelconques) ne peuvent être emboîtés, et de plus, leurs frontières respectives sont connexes et possèdent au plus 1 point commun. Par conséquent,

$$G_{k_1} \cap G'_{k_2} = \emptyset$$

quels que soient les entiers positifs  $k_1$  et  $k_2$ .

Désignons par  $\text{fr}(A)$  la frontière d'un ensemble  $A$ . Puisque  $L_k \rightarrow E$  (dans la métrique de Hausdorff), on a

$$\text{fr}(G_k) \rightarrow \text{fr}(\varphi_{r_1} \circ \dots \circ \varphi_{r_n}(O)) \quad \text{et} \quad \text{fr}(G'_k) \rightarrow \text{fr}(\varphi_{s_1} \circ \dots \circ \varphi_{s_{n'}}(O))$$

lorsque  $k \rightarrow \infty$ . Alors si  $x \in \varphi_{r_1} \circ \dots \circ \varphi_{r_n}(O)$ , il existe un entier positif  $m$  (qui dépend de  $x$ ) tel que  $x \in G_k$  pour tout  $k \geq m$ , d'où

$$\varphi_{r_1} \circ \dots \circ \varphi_{r_n}(O) \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=m}^{\infty} G_k.$$

De même

$$\varphi_{s_1} \circ \dots \circ \varphi_{s_{n'}}(O) \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=m}^{\infty} G'_k.$$

Alors, puisque  $G_{k_1} \cap G'_{k_2} = \emptyset$  pour tout  $k_1$  et  $k_2$ , on obtient

$$\varphi_{r_1} \circ \dots \circ \varphi_{r_n}(0) \cap \varphi_{s_1} \circ \dots \circ \varphi_{s_n}(0) = \emptyset.$$

L'ensemble  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_\nu\}$  vérifie donc la condition de séparation (\*), d'où le résultat.

REMARQUE 5. Il n'est pas nécessaire que la courbe fractale  $E$  soit simple pour que  $\dim E = \alpha$  ou même pour que  $H^\alpha(E) > 0$ , comme en témoigne l'exemple d'une courbe (due à Sierpinski) qui vérifie les hypothèses de 5.1 mais dont tout point est un point de ramification (cf. [6], p. 142).

COROLLAIRE 5.2. Si  $E \setminus \{P_0, P\}$  est contenu dans un ensemble convexe  $A$  du plan tel que les images  $\varphi_i(A)$  soient deux à deux disjointes, alors  $H^\alpha(E) > 0$ .

REMARQUE 6. Un exemple classique d'une courbe fractale qui vérifie les hypothèses de 5.2 est celui de la courbe triadique de Von Koch (cf. [6], p. 44).

## 6. Sur le calcul de $H^\alpha(E)$

Au cours de ce paragraphe,  $E$  désignera un parfait à similitude interne déterminé par un ensemble  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_\nu\}$  de similitudes ou anti-similitudes de  $\mathbb{R}^N$  vérifiant la condition de séparation (\*).

Reprenant les notations relatives aux définitions du paragraphe 4, et faisant suite à la Proposition 4.4 on a

$$\text{THÉORÈME 6.1. } H^\alpha(E) = \inf\{|P|^\alpha/h_n(P) : P \in G_n \text{ et } n \geq 1\}.$$

DÉMONSTRATION. Soient  $m$  un entier positif et  $Q \in G_m$ . Montrons que

$$H^\alpha(E) \leq |Q|^\alpha/h_m(Q).$$

Selon les notations adoptées,

$$Q = \cup\{\varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_m}(0) : (i_1, \dots, i_m) \in \Phi_m(Q)\}.$$

Posons, quels que soient les indices  $i_1, \dots, i_{(r-1)m}$  (où  $r \geq 2$ )



$$P_{i_1 \dots i_{(r-1)m}} = \varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_{(r-1)m}}(Q),$$

de sorte que

$$P_{i_1 \dots i_{(r-1)m}} = \cup \{ \varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_{rm}}(\emptyset) : (i_{(r-1)m+1}, \dots, i_{rm}) \in \Phi_m(Q) \} \in G_{rm}.$$

Puisque les familles  $G_n$  sont deux à deux disjointes, on peut définir sur

$G = \cup_{n \geq 1} G_n$  la fonction d'ensemble  $h$  comme suit:

$$h(P) = h_n(P) \text{ si } P \in G_n.$$

Alors, en vertu de la définition de  $P_{i_1 \dots i_{(r-1)m}}$ ,

$$h(P_{i_1 \dots i_{(r-1)m}}) = (\xi_{i_1} \dots \xi_{i_{(r-1)m}})^\alpha h(Q)$$

et

$$|P_{i_1 \dots i_{(r-1)m}}| = \xi_{i_1} \dots \xi_{i_{(r-1)m}} |Q|,$$

d'où

$$h(P_{i_1 \dots i_{(r-1)m}}) = \frac{1}{\gamma} |P_{i_1 \dots i_{(r-1)m}}|^\alpha \tag{1}$$

où  $\gamma = |Q|^\alpha / h(Q)$ .

Définissons les familles suivantes de parties simples:

$$\Gamma_1''' = \{Q\}$$

$$\Gamma_r''' = \{P_{i_1 \dots i_{(r-1)m}} : (i_{km+1}, \dots, i_{(k+1)m}) \notin \Phi(Q) \text{ pour } k = 0, 1, \dots, r-2\}, \text{ où } r \geq 2$$

$$\Gamma_p'' = \bigcup_{r=1}^p \Gamma_r'''$$

$$\Gamma_p' = \{\varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_{pm}}(\emptyset) : (i_{(k-1)m+1}, \dots, i_{km}) \notin \Phi_m(Q) \text{ pour } k = 1, \dots, p\}$$

$$\Gamma_p = \Gamma_p' \cup \Gamma_p'', \text{ où } p \geq 1.$$

De cette façon,  $\Gamma_p$  est une famille de parties simples (non toutes du même ordre), deux à deux disjointes, semblables à  $Q$  ou à  $O$ .

Nous dirons qu'un ouvert fondamental  $\varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_n}(O)$  "provient" de la partie simple  $P \in G_{n-k}$  (où  $k \geq 1$ ) si  $(i_1, \dots, i_{n-k}) \in \Phi_{n-k}(P)$ . Alors par construction de  $\Gamma_p$ , tout ouvert fondamental d'ordre  $pm$  qui n'appartient pas à  $\Gamma_p$  "provient" d'une unique partie simple  $P \in \Gamma_p$ . Il s'ensuit que

$$\sum_{P \in \Gamma_p} h(P) = \sum_{i_1, \dots, i_{pm}=1}^{\nu} (\xi_{i_1} \dots \xi_{i_{pm}})^\alpha$$

car, par un regroupement approprié des termes de la somme de droite et l'utilisation de l'identité  $\xi_1^\alpha + \dots + \xi_\nu^\alpha = 1$ , on obtient exactement les termes de la somme de gauche. De plus

$$\sum_{i_1, \dots, i_{pm}=1}^{\nu} (\xi_{i_1} \dots \xi_{i_{pm}})^\alpha = (\xi_1^\alpha + \dots + \xi_\nu^\alpha)^{pm} = 1^{pm} = 1,$$

d'où

$$\sum_{P \in \Gamma_p} h(P) = 1.$$

Puisque  $\Gamma_p = \Gamma'_p \cup \Gamma''_p$  avec  $\Gamma'_p \cap \Gamma''_p = \emptyset$ , on a

$$1 = \sum_{P \in \Gamma_p} h(P) = \sum_{P \in \Gamma'_p} h(P) + \sum_{P \in \Gamma''_p} h(P). \tag{2}$$

Si  $P \in \Gamma'_p$ ,  $P$  est un ouvert fondamental d'ordre  $pm$ , d'où

$$\sum_{P \in \Gamma'_p} h(P) = \sum_{P \in \Gamma'_p} (|P|/|O|)^\alpha = |O|^{-\alpha} \left( \sum_{(i_1, \dots, i_m) \in \Phi_m(Q)} (\xi_{i_1} \dots \xi_{i_m})^\alpha \right)^p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$$

car

$$\sum_{(i_1, \dots, i_m) \in \Phi_m(Q)} (\xi_{i_1} \dots \xi_{i_m})^\alpha < \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^{\nu} (\xi_{i_1} \dots \xi_{i_m})^\alpha = 1.$$

D'autre part, en vertu de (1)

$$\sum_{P \in \Gamma''_p} h(P) = \frac{1}{\gamma} \sum_{P \in \Gamma''_p} |P|^\alpha.$$

On déduit donc de (2) que

$$\sum_{P \in \Gamma''_p} |P|^\alpha \rightarrow \gamma.$$

Par construction de  $\Gamma_p$  et en vertu de l'identité  $E = \bigcup_{i=1}^v \phi_i(E)$ , on a  $E = \bigcup \{ \phi_{i_1} \circ \dots \circ \phi_{i_n}(E) : (i_1, \dots, i_n) \in \Phi_n(P), P \in \Gamma_p \text{ et } n = \text{ordre de } P \}$ , d'où

$$E \subset \bigcup \{ \bar{P} : P \in \Gamma_p \}$$

car  $E \subset \bar{O}$ . Alors, compte tenu de 4.1,

$$\sum_{P \in \Gamma_p} |P|^\alpha \geq H^\alpha(E),$$

c'est-à-dire

$$\sum_{P \in \Gamma'_p} |P|^\alpha + \sum_{P \in \Gamma''_p} |P|^\alpha \geq H^\alpha(E).$$

Puisque

$$\sum_{P \in \Gamma'_p} |P|^\alpha \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0 \text{ et } \sum_{P \in \Gamma''_p} |P|^\alpha \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \gamma = |Q|^\alpha/h(Q),$$

on obtient

$$|Q|^\alpha/h(Q) \geq H^\alpha(E),$$

ce qui, compte tenu de 4.4, termine la démonstration.

Par ailleurs, il est évident que la valeur de  $H^\alpha(E)$  doit être indépendante du choix de l'ouvert  $O$  de par lequel la condition de séparation (\*) est satisfaite et qu'on utilise pour définir les parties simples  $P$ . Montrons alors que le nombre

$$\inf\{ |P|^\alpha/h_n(P) : n \geq 1 \text{ et } P \in G_n \}$$

ne dépend pas du choix de  $O$ .

**THÉORÈME 6.2.** Soit  $\Lambda = \{1, 2, \dots, v\}$ . Pour tout entier  $n \geq 1$  et tout ensemble non vide de  $n$ -tuplets  $\lambda \subset \Lambda^n$  définissons

$$A_\lambda = \bigcup_{(i_1, \dots, i_n) \in \lambda} \varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_n}(E) \quad \text{et} \quad f_n(\lambda) = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \lambda} (\xi_{i_1} \dots \xi_{i_n})^\alpha.$$

Alors

$$H^\alpha(E) = \inf\{|A_\lambda|^\alpha / f_n(\lambda) : n \geq 1 \quad \text{et} \quad \lambda \subset \Lambda^n\}.$$

DÉMONSTRATION. Utilisant les notations du paragraphe 4 et du Théorème 6, soit  $P \in \mathcal{G}_n$ . Posons

$$P_k = \bigcup \{\varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_n}(O_k) : (i_1, \dots, i_n) \in \Phi_n(P)\},$$

où

$$O_k = \bigcup_{j_1, \dots, j_k=1}^v \varphi_{j_1} \circ \dots \circ \varphi_{j_k}(O),$$

de sorte que  $P_k \in \mathcal{G}_{n+k}$ . Puisque  $O_k \rightarrow E$ , alors

$$P_k \rightarrow \bigcup \{\varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_n}(E) : (i_1, \dots, i_n) \in \Phi_n(P)\},$$

où  $\Phi_n(P) \subset \Lambda^n$ . Si l'on pose  $\lambda = \Phi_n(P)$ ,  $A_\lambda \subset \bar{P}$  car  $E \subset \bar{O}$  et

$$P = \bigcup \{\varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_n}(O) : (i_1, \dots, i_n) \in \lambda\},$$

d'où

$$|A_\lambda| \leq |P|.$$

De plus

$$h_{n+k}(P_k) = h_n(P) = f_n(\lambda) = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \lambda} (\xi_{i_1} \dots \xi_{i_n})^\alpha.$$

Donc

$$|A_\lambda|^\alpha / f_n(\lambda) \leq |P|^\alpha / h_n(P).$$

Par conséquent

$$\inf\{|A_\lambda|^\alpha / f_n(\lambda) : n \geq 1 \quad \text{et} \quad \lambda \subset \Lambda^n\} \leq \inf\{|P|^\alpha / h_n(P) : n \geq 1 \quad \text{et} \quad P \in \mathcal{G}_n\}.$$

D'autre part, pour  $n \geq 1$  soit  $\lambda \subset \Lambda^n$  ( $\lambda \neq \emptyset$ ). Posons

$$P = \bigcup \{\varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_n}(O) : (i_1, \dots, i_n) \in \lambda\}.$$

Définissons  $P_k \in G_{n+k}$  comme ci-haut de sorte que  $P_k \rightarrow A_\lambda$ , d'où

$$|P_k|^\alpha / h_{n+k}(P_k) \rightarrow |A_\lambda|^\alpha / f_n(\lambda).$$

Il s'ensuit que

$$\inf\{|A_\lambda|^\alpha / f_n(\lambda) : n \geq 1 \text{ et } \lambda \in \Lambda^n\} = \inf\{|P|^\alpha / h_n(P) : n \geq 1 \text{ et } P \in G_n\}$$

et donc, en vertu de 6.1, le résultat est démontré.

COROLLAIRE 6.3. Si  $E$  est un parfait isotypique

$$H^\alpha(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \min_{\lambda \in \Lambda^n} |A_\lambda|^\alpha / f_n(\lambda) \geq \tau^\alpha,$$

où  $\tau = \min_{i \neq j} \text{dist}(\varphi_i(E), \varphi_j(E))$ .

DÉMONSTRATION. Par hypothèse,

$$\varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_n}(E) \cap \varphi_{j_1} \circ \dots \circ \varphi_{j_{n+k}}(E) = \emptyset$$

pour  $k \geq 0$  et  $(j_1, \dots, j_n) \neq (i_1, \dots, i_n)$ . Alors en posant

$$F_n = \{A_\lambda : \lambda \in \Lambda^n\}$$

on a  $F_n \subset F_{n+1}$  car pour tout  $\lambda \in \Lambda^n$

$$\bigcup_{(i_1, \dots, i_n) \in \lambda} \varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_n}(E) = \bigcup_{(j_1, \dots, j_{n+1}) \in \lambda'} \varphi_{j_1} \circ \dots \circ \varphi_{j_{n+1}}(E),$$

où  $\lambda' = \{(j_1, \dots, j_{n+1}) : (j_1, \dots, j_n) \in \lambda \text{ et } j_{n+1} \in \Lambda\}$  vérifie  $f_{n+1}(\lambda') = f_n(\lambda)$ .

Par conséquent  $\min_{\lambda \in \Lambda^n} |A_\lambda|^\alpha / f_n(\lambda)$  décroît lorsque  $n \rightarrow \infty$ , d'où, en vertu de 6.2,

$$H^\alpha(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \min_{\lambda \in \Lambda^n} |A_\lambda|^\alpha / f_n(\lambda).$$

Soit  $A_{\lambda_0} \in F_n$  tel que  $A_{\lambda_0} \subset \varphi_i(E)$  pour un certain  $i \in \Lambda$ . Alors,

$A_{\lambda_1} = \varphi_i^{-1}(A_{\lambda_0}) \in F_{n-1}$  et  $|A_{\lambda_1}| = \xi_i^{-1} |A_{\lambda_0}|$  avec  $f_{n-1}(\lambda_1) = \xi_i^{-\alpha} f_n(\lambda_0)$ , de sorte que  $|A_{\lambda_1}|^\alpha / f_{n-1}(\lambda_1) = |A_{\lambda_0}|^\alpha / f_n(\lambda_0)$ . De même, si  $A_{\lambda_1}$  est contenu dans une des

images  $\varphi_i(E)$ , il existe  $A_{\lambda_2} \in F_{n-2}$  tel que

$$|A_{\lambda_2}|^{\alpha/f_{n-2}(\lambda_2)} = |A_{\lambda_1}|^{\alpha/f_{n-1}(\lambda_1)} = |A_{\lambda_0}|^{\alpha/f_n(\lambda_0)}.$$

De proche en proche on obtient finalement un ensemble  $A_{\lambda_r} \in F_{n-r}$  qui n'est pas contenu dans aucune des images  $\varphi_i(E)$  et qui rencontre donc au moins deux de ces images, d'où

$$|A_{\lambda_r}| \geq \tau \quad \text{avec} \quad |A_{\lambda_r}|^{\alpha/f_{n-r}(\lambda_r)} = |A_{\lambda_0}|^{\alpha/f_n(\lambda_0)}.$$

Puisque  $f_{n-r}(\lambda) \leq 1$  (tout  $\lambda$ ), on obtient en vertu de 6.2

$$H^\alpha(E) \geq \tau^\alpha$$

ce qui termine la démonstration.

N.B.: L'inégalité  $H^\alpha(E) \geq \tau^\alpha$  est démontré dans [5] pour le cas particulier où  $E$  est un parfait homogène linéaire.

Dans certains cas la mesure de Hausdorff d'un parfait isotypique s'obtient sans "passage à la limite". Ainsi,

**COROLLAIRE 6.4.** Si  $E \subset \mathbb{R}^N$  est un parfait isotypique de dimension  $\alpha < 1$ , alors (conservant les notations de 6.2 et 6.3) on a

$$H^\alpha(E) = \min_{\lambda \in \Lambda_{n_0}} |A_\lambda|^{\alpha/f_{n_0}(\lambda)},$$

où

$$n_0 = \min\{n \geq 1: |E| \leq \tau \xi_{\min} \xi_{\max}^{n(\alpha-1)}\}$$

avec

$$\xi_{\min} = \min_{1 \leq i \leq \nu} \xi_i \quad \text{et} \quad \xi_{\max} = \max_{1 \leq i \leq \nu} \xi_i.$$

**DÉMONSTRATION.** On procède par récurrence.

Hypothèse de récurrence: Pour un certain entier  $k \geq n_0 + 1$  on a

$$\min_{\lambda \in \Lambda_{n_0}} |A_\lambda|^{\alpha/f_{n_0}(\lambda)} = \min_{\lambda \in \Lambda_{k-1}} |A_\lambda|^{\alpha/f_{k-1}(\lambda)}.$$

Etape de récurrence: (1) Soit  $\lambda_0 \in \Lambda^k$  un ensemble de k-tuples tel que  $|A_{\lambda_0}| \geq \tau$  et tel que pour un certain k-tuple  $(r_1, \dots, r_k) \in \Lambda^k \setminus \lambda_0$  l'on ait

$$A_{\lambda_0} \cup [\varphi_{r_1} \circ \dots \circ \varphi_{r_k}(E)] \in F_{k-1} .$$

Alors

$$A_{\lambda_0} \cap [\varphi_{r_1} \circ \dots \circ \varphi_{r_{k-1}}(E)] \neq \emptyset$$

car

$$[\varphi_{r_1} \circ \dots \circ \varphi_{r_{k-1}}(E) \setminus \varphi_{r_1} \circ \dots \circ \varphi_{r_k}(E)] \subset A_{\lambda_0} .$$

De plus

$$A_{\lambda_0} \cup [\varphi_{r_1} \circ \dots \circ \varphi_{r_k}(E)] = A_{\lambda_0} \cup [\varphi_{r_1} \circ \dots \circ \varphi_{r_{k-1}}(E)] .$$

Par conséquent, en posant  $y = \xi_{r_1} \dots \xi_{r_k}$ ,

$$\begin{aligned} |A_{\lambda_0} \cup [\varphi_{r_1} \circ \dots \circ \varphi_{r_k}(E)]| &\leq |A_{\lambda_0}| + \xi_{r_1} \dots \xi_{r_{k-1}} |E| \\ &= |A_{\lambda_0}| + y \xi_{r_k}^{-1} |E| \\ &\leq |A_{\lambda_0}| + y \xi_{\min}^{-1} |E| , \end{aligned}$$

d'où

$$(i) \quad \frac{|A_{\lambda_0} \cup [\varphi_{r_1} \circ \dots \circ \varphi_{r_k}(E)]|^\alpha}{h_{k-1}(A_{\lambda_0} \cup [\varphi_{r_1} \circ \dots \circ \varphi_{r_k}(E)])} \leq \frac{(|A_{\lambda_0}| + y \xi_{\min}^{-1} |E|)^\alpha}{f_k(\lambda_0) + y^\alpha} .$$

Posons

$$\psi(t) = \frac{(|A_{\lambda_0}| + t \xi_{\min}^{-1} |E|)^\alpha}{f_k(\lambda_0) + t^\alpha} , \quad \text{où } t \in [0, y] .$$

Alors, la dérivée  $\psi'(t) \leq 0$  si et seulement si

$$\alpha (|A_{\lambda_0}| + t \xi_{\min}^{-1} |E|)^{\alpha-1} (f_k(\lambda_0) + t^\alpha) |E|_{\min}^{\xi-1} \leq \alpha t^{\alpha-1} (|A_{\lambda_0}| + t |E|_{\min}^{\xi-1})^\alpha ,$$

c'est-à-dire

$$|E| f_k(\lambda_0) \xi_{\min}^{-1} |A_{\lambda_0}|^{-1} \leq t^{\alpha-1} ,$$

ce qui est immédiatement vérifié car, en vertu de la définition de  $n_0$ ,

$$|E| f_k(\lambda_0) \xi_{\min}^{-1} |A_{\lambda_0}|^{-1} \leq |E| \xi_{\min}^{-1} \tau^{-1} \leq \xi_{\max}^{n_0(\alpha-1)} \leq y^{\alpha-1} \leq t^{\alpha-1}.$$

Par conséquent,  $\psi(y) \leq \psi(0)$ , c'est-à-dire

$$(ii) \quad \frac{(|A_{\lambda_0}| + y \xi_{\min}^{-1} |E|)^{\alpha}}{f_k(\lambda_0) + y^{\alpha}} \leq \frac{|A_{\lambda_0}|^{\alpha}}{f_k(\lambda_0)}.$$

En combinant (i) et (ii) avec l'hypothèse de récurrence, on obtient

$$\min_{\lambda \in \Lambda} |A_{\lambda}|^{\alpha} / f_{n_0}(\lambda) \leq |A_{\lambda_0}|^{\alpha} / f_k(\lambda_0).$$

(2) Pour compléter l'étape de récurrence il suffit de considérer la situation suivante: Soit  $\lambda_1 \in \Lambda^k$  tel que  $|A_{\lambda_1}| \geq \tau$  et

$$\frac{|A_{\lambda_1}|}{f_k(\lambda_1)} \geq \min_{\lambda \in \Lambda} \frac{|A_{\lambda}|^{\alpha}}{f_{n_0}(\lambda)}$$

et aussi tel qu'il existe des indices  $r_1, \dots, r_{k-1}$ ,  $j_k$  et  $i_k$  avec  $j_k \neq i_k$  pour lesquels  $[\varphi_{r_1} \circ \dots \circ \varphi_{r_{k-1}} \circ \varphi_{j_k}(E)] \cup [\varphi_{r_1} \circ \dots \circ \varphi_{r_{k-1}} \circ \varphi_{i_k}(E)] \subset A_{\lambda_1}$ .  
Posons

$$\lambda_1' = \lambda_1 \setminus \{(r_1, \dots, r_{k-1}, j_k)\}$$

pour que

$$A_{\lambda_1} = A_{\lambda_1'} \cup [\varphi_{r_1} \circ \dots \circ \varphi_{r_{k-1}} \circ \varphi_{j_k}(E)] \text{ et } A_{\lambda_1'} \cap [\varphi_{r_1} \circ \dots \circ \varphi_{r_{k-1}} \circ \varphi_{j_k}(E)] = \emptyset.$$

Nous pouvons considérer qu'en une première étape,  $\lambda_1$  coïncide avec  $\lambda_0$  décrit en (1) ci-haut. En montrant que

$$(iii) \quad |A_{\lambda_1}|^{\alpha} / f_k(\lambda_1) \leq |A_{\lambda_1'}|^{\alpha} / f_k(\lambda_1'),$$

puis, dans une seconde étape, considérant  $\lambda_1'$  comme nouveau  $\lambda_1$  qui engendre à



son tour un nouveau  $\lambda_1'$ , et ainsi de suite, nous obtiendrons de proche en proche que pour tout  $\lambda'' \in \Lambda^k$  tel que  $|A_{\lambda''}| \geq \tau$

$$|A_{\lambda''}|^\alpha / f_k(\lambda'') \geq \min_{\lambda \in \Lambda^{n_0}} |A_\lambda|^\alpha / f_{n_0}(\lambda).$$

De ce fait, nous obtiendrons, compte tenu de la remarque faite au cours de la démonstration de 6.3, que

$$\min_{\lambda \in \Lambda^k} |A_\lambda|^\alpha / f_k(\lambda) = \min_{\lambda \in \Lambda^{n_0}} |A_\lambda|^\alpha / f_{n_0}(\lambda).$$

Pour démontrer (iii), on a

$$\begin{aligned} \frac{|A_{\lambda_1}|^\alpha}{f_k(\lambda_1)} &= \frac{|A_{\lambda_1'} \cup [\varphi_{r_1} \circ \dots \circ \varphi_{r_{k-1}} \circ \varphi_{j_k}(E)]|^\alpha}{f_k(\lambda_1') + (\xi_{r_1} \dots \xi_{r_{k-1}} \xi_{j_k})^\alpha} \leq \frac{|A_{\lambda_1'} \cup [\varphi_{r_1} \circ \dots \circ \varphi_{r_{k-1}}(E)]|^\alpha}{f_k(\lambda_1') + (\xi_{r_1} \dots \xi_{r_{k-1}} \xi_{j_k})^\alpha} \\ &\leq \frac{(|A_{\lambda_1'}| + (\xi_{r_1} \dots \xi_{r_{k-1}}) |E|)^\alpha}{f_k(\lambda_1') + (\xi_{r_1} \dots \xi_{r_{k-1}} \xi_{j_k})^\alpha} \end{aligned}$$

car

$$A_{\lambda_1'} \cap [\varphi_{r_1} \circ \dots \circ \varphi_{r_{k-1}}(E)] \supset \varphi_{r_1} \circ \dots \circ \varphi_{r_{k-1}} \circ \varphi_{i_k}(E) \neq \emptyset.$$

En posant  $y = \xi_{r_1} \dots \xi_{r_{k-1}} \xi_{j_k}$  on obtient

$$\begin{aligned} \frac{|A_{\lambda_1}|^\alpha}{f_k(\lambda_1)} &\leq \frac{(|A_{\lambda_1'}|^\alpha + y \xi_{j_k}^{-1} |E|)^\alpha}{f_k(\lambda_1') + y^\alpha} \\ &\leq \frac{(|A_{\lambda_1'}|^\alpha + y \xi_{\min}^{-1} |E|)^\alpha}{f_k(\lambda_1') + y^\alpha}. \end{aligned}$$

Comme en (1), puisque  $y \leq \xi_{\max}^k < \xi_{\max}^{n_0}$  et  $|A_{\lambda_1'}| \geq \tau$ , on obtient

$$|A_{\lambda_1}|^\alpha / f_k(\lambda_1) \leq |A_{\lambda_1'}|^\alpha / f_k(\lambda_1').$$

Par conséquent

$$\min_{\lambda < \Lambda} |A_\lambda|^\alpha / f_{n_0}(\lambda) \leq \min_{\lambda < \Lambda^k} |A_\lambda|^\alpha / f_k(\lambda)$$

ce qui complète l'étape de récurrence et termine la démonstration.

### 7. Généralisation d'un résultat de Hausdorff

Le Corollaire 4.2 établit que pour tout parfait  $E$  à similitude interne,  $H^\alpha(E) \leq |E|^\alpha$ , où  $\alpha$  est la dimension d'homothétie de  $E$ . Pour certains parfaits isotypiques linéaires on a l'égalité  $H^\alpha(E) = |E|^\alpha$ , comme par exemple pour les parfaits homogènes de type  $(2, \xi)$  et de diamètre 1 construits par dissection de l'intervalle  $[0, 1]$  (cf. Hausdorff [3]).

Pour généraliser le résultat de Hausdorff, considérons un parfait isotypique linéaire  $E$  défini par un ensemble de  $\nu$  similitudes de  $\mathbb{R}$  s'écrivant

$$\varphi_i(x) = \xi_i x + \eta_i, \quad \text{où } 0 < \xi_i < \frac{1}{\nu}$$

pour  $i = 1, \dots, \nu$ . Soit  $K = [a, b]$  l'enveloppe convexe de  $E$ . Alors

$$\bigcup_{i=1}^{\nu} \varphi_i(K) \subset K \quad \text{et} \quad \varphi_i(K) \cap \varphi_j(K) = \emptyset \quad \text{si } i \neq j.$$

En d'autres termes,  $E$  s'obtient par dissection de  $[a, b]$ .

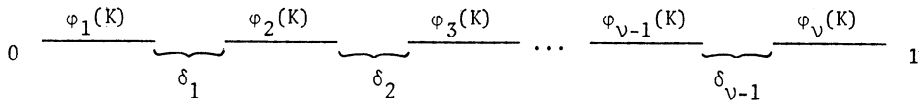
Notons toujours par  $\alpha$  la dimension d'homothétie de  $E$ , c'est-à-dire le nombre vérifiant la relation  $\xi_1^\alpha + \dots + \xi_\nu^\alpha = 1$ . Conservant les notations du paragraphe 6, pour un parfait isotypique  $E \subset \mathbb{R}^1$ , on a

THÉORÈME 7.1.  $H^\alpha(E) = |E|^\alpha$  si et seulement si

$$\min_{\lambda < \Lambda} |A_\lambda|^\alpha / f_1(\lambda) = |E|^\alpha.$$

DÉMONSTRATION. Sans perte de généralité, on peut supposer que  $[a, b] = [0, 1]$  et  $|E| = 1$  car, pour toute similitude  $\varphi$  de rapport  $\xi$ , on a  $H^\alpha(\varphi(E)) = \xi^\alpha H^\alpha(E)$  et  $|\varphi(E)|^\alpha = \xi^\alpha |E|^\alpha$ .

Après la première étape de dissection de  $K = [0,1]$ , la position des intervalles "blancs"  $\varphi_1(K), \dots, \varphi_\nu(K)$  est donnée par le diagramme suivant :



où  $\delta_1, \dots, \delta_{\nu-1}$  sont les longueurs respectives des intervalles "noirs" contigus à  $E_1$ , et  $|\varphi_i(K)| = \xi_i$  pour  $i = 1, \dots, \nu$ .

L'énoncé du théorème peut donc être reformulé comme suit:  $H^\alpha(E) = |E|^\alpha$  si et seulement si

$$(*) \quad \frac{(\xi_j + \dots + \xi_{j+k} + \delta_j + \dots + \delta_{j+k-1})^\alpha}{\xi_j^\alpha + \dots + \xi_{j+k}^\alpha} \geq 1$$

quels que soient les indices  $j$  et  $k$  vérifiant  $j + k \leq \nu$ .

En vertu de 6.3, si  $(*)$  n'est pas satisfait pour un certain choix d'indices  $j$  et  $k$  vérifiant  $j + k \leq \nu$ , alors  $H^\alpha(E) < 1 = |E|^\alpha$ .

Réciproquement, supposons que  $(*)$  soit satisfait pour tous  $j$  et  $k$  vérifiant  $j + k \leq \nu$ . Montrons par récurrence que  $H^\alpha(E) = 1$ .

Hypothèse de récurrence: Il existe un entier  $m \geq 1$  tel que pour tout  $n \leq m$  l'on ait

$$|A_\lambda|^\alpha / f_n(\lambda) \geq 1$$

quel que soit  $\lambda \in \Lambda^n$ .

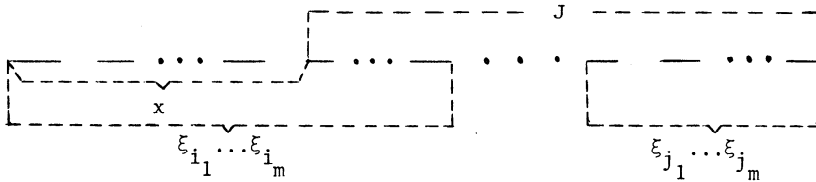
Etape de récurrence: Montrons que

$$|A_\lambda|^\alpha / f_{m+1}(\lambda) \geq 1$$

quel que soit  $\lambda \in \Lambda^{m+1}$  tel que  $A_\lambda \in F_{m+1} \setminus F_m$ .

Soit  $J$  l'enveloppe convexe de  $A_\lambda$ . Alors  $J = A_{\lambda'}$ , pour un certain  $\lambda' \in \Lambda^{m+1}$ . Pour la position de l'intervalle  $J$ , deux situations sont à considérer:

(1°) Une seule des deux extrémités de  $J$  est une extrémité d'intervalle blanc d'ordre  $m$  (c.-à-d. un intervalle  $\phi_{j_1} \circ \dots \circ \phi_{j_m}(K)$ ), comme sur le diagramme suivant:



où

$$x = (\xi_{i_1} \dots \xi_{i_m}) (\xi_1 + \dots + \xi_p + \delta_1 + \dots + \delta_p)$$

pour un certain  $p \in \{1, 2, \dots, v-1\}$ . Posons

$$y = (\xi_{i_1} \dots \xi_{i_m})^\alpha (\xi_1^\alpha + \dots + \xi_p^\alpha)$$

$$V = |J| = |A_\lambda| = |A_\lambda|$$

$$v = f_{m+1}(\lambda').$$

Par construction,

$$V + x = |A_{\lambda''}|$$

pour un certain  $\lambda'' \in \Lambda^m$ , et

$$f_m(\lambda'') = v + y.$$

Alors par hypothèse de récurrence

$$\frac{(V+x)^\alpha}{v+y} \geq 1,$$

c'est-à-dire

$$(1) \quad V \geq (v+y)^{1/\alpha} - x.$$

Il nous faut vérifier que  $V^\alpha \geq v$ . En vertu de (1), il sera suffisant de démontrer que

$$(v+y)^{1/\alpha} - x \geq v^{1/\alpha}$$

c'est-à-dire

$$(2) \quad (v+y)^{1/\alpha} - v^{1/\alpha} \geq x.$$

Puisque  $J$  contient les intervalles blancs de longueurs

$(\xi_{i_1} \dots \xi_{i_m}) \xi_{p+1}, \dots, (\xi_{i_1} \dots \xi_{i_m}) \xi_v$ , on a

$$v = f_{m+1}(\lambda') \geq (\xi_{i_1} \dots \xi_{i_m})^\alpha (\xi_{p+1}^\alpha + \dots + \xi_v^\alpha)$$

c'est-à-dire

$$(3) \quad v / (\xi_{i_1} \dots \xi_{i_m})^\alpha \geq \xi_{p+1}^\alpha + \dots + \xi_v^\alpha.$$

D'autre part, l'inégalité (2) s'écrit sous la forme équivalente

$$(4) \quad \left( \frac{v}{(\xi_{i_1} \dots \xi_{i_m})^\alpha} + \xi_{p+1}^\alpha + \dots + \xi_p^\alpha \right)^{1/\alpha} - \left( \frac{v}{(\xi_{i_1} \dots \xi_{i_m})^\alpha} \right)^{1/\alpha} \geq \xi_1 + \dots + \xi_p + \delta_1 + \dots + \delta_p.$$

Par ailleurs, on observe que pour toute constante  $C > 0$ , la fonction  $\psi(t) = (t+C)^{1/\alpha} - t^{1/\alpha}$  est croissante sur  $[0, \infty[$  puisque  $\psi'(t) > 0$  si et seulement si  $(t+C)^{(1/\alpha)-1} > t^{(1/\alpha)-1}$ , ce qui est vérifié car  $\frac{1}{\alpha} - 1 > 0$ . Donc pour démontrer

(4) il suffit, en vertu de (3), de vérifier l'inégalité

$$(\xi_{p+1}^\alpha + \dots + \xi_v^\alpha + \xi_{p+1}^\alpha + \dots + \xi_p^\alpha)^{1/\alpha} - (\xi_{p+1}^\alpha + \dots + \xi_v^\alpha)^{1/\alpha} \geq \xi_1 + \dots + \xi_p + \delta_1 + \dots + \delta_p$$

c'est-à-dire

$$(5) \quad 1 - (\xi_{p+1}^\alpha + \dots + \xi_v^\alpha)^{1/\alpha} \geq \xi_1 + \dots + \xi_p + \delta_1 + \dots + \delta_p$$

car  $\xi_1^\alpha + \dots + \xi_v^\alpha = 1$ . De plus, par hypothèse

$$\frac{(\xi_{p+1} + \dots + \xi_v + \delta_{p+1} + \dots + \delta_{v-1})^\alpha}{\xi_{p+1}^\alpha + \dots + \xi_v^\alpha} \geq 1,$$

c'est-à-dire

$$(6) \quad -(\xi_{p+1}^\alpha + \dots + \xi_v^\alpha)^{1/\alpha} \geq -(\xi_{p+1} + \dots + \xi_v + \delta_{p+1} + \dots + \delta_{v-1}).$$

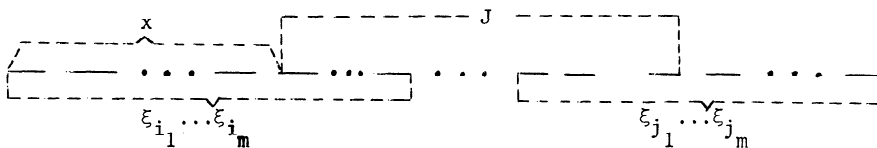
Compte tenu de (6), pour démontrer (5), il suffit de vérifier que

$$1 - (\xi_{p+1} + \dots + \xi_v + \delta_{p+1} + \dots + \delta_{v-1}) \geq \xi_1 + \dots + \xi_p + \delta_1 + \dots + \delta_p,$$

ce qui est immédiat car  $1 = \xi_1 + \dots + \xi_v + \delta_1 + \dots + \delta_{v-1}$ . Ceci démontre donc que  $V^\alpha/v \geq 1$ .

Si c'est l'extrémité gauche de  $J$  qui est commune avec une extrémité (gauche) d'intervalle blanc d'ordre  $m$ , il suffit de changer l'ordre d'indexation des  $\xi_j$  et  $\delta_j$ , et le raisonnement fait ci-dessus s'applique tel quel.

(2°) Aucune des deux extrémités de  $J$  n'est une extrémité d'intervalle blanc d'ordre  $m$ , comme sur le diagramme suivant:



où

$$x = (\xi_{i_1} \dots \xi_{i_m})(\xi_1 + \dots + \xi_p + \delta_1 + \dots + \delta_p)$$

pour un certain  $p = \{1, 2, \dots, v-1\}$ . Posons comme précédemment

$$y = (\xi_{i_1} \dots \xi_{i_m})^\alpha (\xi_1^\alpha + \dots + \xi_p^\alpha)$$

$$v = |J|$$

$$v = f_{m+1}(\lambda').$$

Par construction,

$$v + x = |A_{\lambda''}|$$

pour un certain  $\lambda'' \in \Lambda^{m+1}$ ; de plus, l'enveloppe convexe de  $A_{\lambda''}$  est un intervalle dont la position correspond à la situation (1°). Par conséquent

$$|A_{\lambda''}|^\alpha / f_{m+1}(\lambda'') = (v+x)^\alpha / (v+y) \geq 1.$$

Par un raisonnement identique à celui décrit en (1°), on en déduit que

$$V^\alpha/v \geq 1,$$

ce qui complète l'étape de récurrence et termine la démonstration.

**DÉFINITION 5.** Un parfait isotypique linéaire (construit par dissection d'un intervalle) est de type  $(v, \xi_1, \dots, \xi_v)$  s'il est déterminé par un ensemble  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_v\}$  de similitudes de  $\mathbb{R}^1$  de rapports respectifs  $\xi_1, \dots, \xi_v$  (en d'autres termes, si les  $v$  intervalles blancs d'ordre 1 sont de longueurs  $\xi_1, \dots, \xi_v$  respectivement).

**COROLLAIRE 7.2.** Pour tout parfait isotypique  $E$  de type  $(2, \xi_1, \xi_2)$  de diamètre 1 construit sur  $[0, 1]$ , on a

$$H^\alpha(E) = 1,$$

où  $\alpha$  est le nombre défini par  $\xi_1^\alpha + \xi_2^\alpha = 1$ .

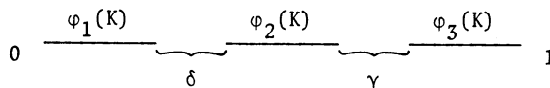
**COROLLAIRE 7.3 (Hausdorff).** Pour tout parfait homogène de type  $(2, \xi)$  de diamètre 1 construit sur  $[0, 1]$ , on a

$$H^\alpha(E) = 1,$$

où  $\alpha = -\log 2 / \log \xi$ .

**EXEMPLE.** En terminant, nous illustrons à l'aide de l'exemple des parfaits homogènes linéaires de type  $(3, \xi)$  les deux situations suivantes: le cas  $H^\alpha(E) = |E|^\alpha$  et le cas  $H^\alpha(E) < |E|^\alpha$ .

Soit  $E$  un parfait homogène linéaire de type  $(3, \xi)$  et de diamètre 1 construit sur l'intervalle  $K = [0, 1]$ . Il existe des similitudes de  $\mathbb{R}^1$ ,  $\varphi_1, \varphi_2$  et  $\varphi_3$  telles que  $E = \bigcup_{i=1}^3 \varphi_i(E)$ . Rapportons-nous au procédé de dissection de Kahane et Salem. Le diagramme suivant indique la position des intervalles "blancs" initiaux  $\varphi_i(K)$  ( $i = 1, 2$  et  $3$ ):



où  $\delta$  et  $\gamma$  sont les longueurs respectives des intervalles "noirs" contigus à  $\phi_2(K)$ . Par construction  $\gamma = 1 - 3\xi - \delta$  et  $|\phi_1(K)| = \xi$ . Posons  $\lambda_1 = \{1,2\}$  et  $\lambda_2 = \{2,3\}$ . Alors

$$A_{\lambda_1} = \phi_1(E) \cup \phi_2(E) \quad \text{et} \quad A_{\lambda_2} = \phi_2(E) \cup \phi_3(E),$$

et

$$|A_{\lambda_1}|^{\alpha/f_1(\lambda_1)} = (2\xi + \delta)^\alpha / (2\xi^\alpha),$$

où  $\alpha = \dim E = \log 3 / \log \xi^{-1}$ , d'où

$$|A_{\lambda_1}|^{\alpha/f_1(\lambda_1)} < 1 \iff \delta < \xi(2^{1/\alpha} - 2).$$

De même,

$$|A_{\lambda_2}|^{\alpha/f_1(\lambda_2)} < 1 \iff \gamma < \xi(2^{1/\alpha} - 2).$$

D'autre part, pour  $i = 1, 2$  et  $3$  on a

$$|\phi_i(E)|^{\alpha/f_1(\{i\})} = \xi^\alpha / \xi^\alpha = 1,$$

et

$$|E|^{\alpha/f_1(\{1,2,3\})} = 1 / (3\xi^\alpha) = 1/1 = 1.$$

Par conséquent, en vertu du Théorème 7.1, on obtient

$$H^\alpha(E) < 1 = |E|^\alpha \iff 0 < \min\{\delta, \gamma\} < \xi(2^{1/\alpha} - 2),$$

ou encore

$$H^\alpha(E) = 1 = |E|^\alpha \iff \xi(2^{1/\alpha} - 2) \leq \min\{\delta, \gamma\} \leq (1-3\xi)/2.$$

De plus, lorsque  $H^\alpha(E) < |E|^\alpha$ , il s'avère que dans la plupart des cas

$$H^\alpha(E) < \min_{\lambda \in \{1,2,3\}} |A_\lambda|^{\alpha/f_1(\lambda)} < |E|^\alpha.$$

D'ailleurs, nous espérons publier prochainement une suite au présent article qui contiendra le calcul explicite de  $H^\alpha(E)$  en fonction de  $\xi$  et  $\delta$ .



Bibliographie

- [ 1 ] BEST, E., *On sets of fractional dimensions III*, Proc. Lond. Math. Soc. (2), [47], 436-454, 1942.
- [ 2 ] GIERL, A., *Über das Hausdorffsche Mass gewisser Punktmengen in der Zifferntheorie*, J. Reine angew. Math. [202], 1959.
- [ 3 ] HAUSDORFF, F., *Dimension und äusseres Mass*, Math. Ann. [79], 157-179, 1919.
- [ 4 ] HUTCHINSON, J.E., *Fractals and self similarity*, Indiana University Math. J., Vol. 30, No. 5, 713-747, 1981.
- [ 5 ] KAHANE, J.P. et SALEM, R., *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*, Paris, Hermann, 1963.
- [ 6 ] MANDELBROT, B., *The Fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman, San Francisco, 1982.
- [ 7 ] MANDELBROT, B., *Les objets fractals, forme, hasard et dimension*, Flammarion, Paris, 1975.
- [ 8 ] MARION, J., *Calcul de la mesure de Hausdorff des sous-ensembles parfaits isotypiques de  $\mathbb{R}^m$* , C.R. Acad. Sc. Paris, 289 Série A, 65-68, 1979.
- [ 9 ] MARION, J. *Dimension de Hausdorff d'une courbe circulaire simple de Von Koch*, C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, Vol. VI, No 1, 21-24, 1984.
- [10] MORAN, P.A.P., *Additive functions of intervals and Hausdorff measure*, Proc. Camb. phil. Soc. [42], 15-23, 1946.
- [11] ROGERS, C.A., *Hausdorff Measures*, Cambridge University Press, 1970.
- [12] WEGMANN, H., *Das Hausdorff-Maß von Cantormengen*, Math. Ann. [193], 7-20, 1971.

Jacques Marion  
690, rue Filiatrault  
Ste-Dorothée, Laval (Qué.)  
H7X 2J4

Manuscrit reçu le 10 juillet 1985.  
Revision le 8 octobre 1985.