Ann. sc. math. Québec, 1986, Vol. 10, No 1, pp. 17-26

UNE FORMULE DE QUADRATURE POUR LES FONCTIONS ENTIÈRES DE TYPE EXPONENTIEL

C. Frappier et Q.I. Rahman

1. Introduction

Nous utilisons $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ pour dénoter l'intégrale de Lebesgue d'une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sur $(-\infty,\infty)$ ce qui implique que l'intégrale est absolument convergente, i.e. que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$ existe aussi. Si f est intégrable sur $(0,X)$ pour tout X et

$$\lim_{X\to\infty} \int_0^X f(x)\,dx$$

existe, alors nous dénotons la limite par

$$\int_0^{\to\infty} f(x)\,dx. \tag{1}$$

Une telle intégrale est appelée une *intégrale de Cauchy*. L'intégrale de Cauchy

$$\int_{\to-\infty}^{0} f(x)\,dx \tag{2}$$

est définie d'une manière analogue. Si (1), (2) sont convergentes et ont respectivement les valeurs I_1, I_2, alors nous disons que

$$\int_{\to-\infty}^{\to\infty} f(x)\,dx \tag{3}$$

est convergente et a la valeur $I_1 + I_2$. Si $f \in L^1(-\infty,\infty)$, alors (3) est *convergente* et

$$\int_{\to-\infty}^{\to\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Cependant, il existe des fonctions f pour lesquelles (3) est convergente et qui n'appartiennent pas à $L^1(-\infty,\infty)$. Un exemple d'une telle fonction est $(\sin z)/z$.

Le but de cet article est de démontrer la formule (4) ci-dessous, laquelle est l'analogue d'une formule de quadrature classique de Gauss [4, Théorème 3.4.1].

THÉORÈME 1. *Supposons* $0 < \sigma < \infty$. *Pour toute fonction entière* f *de type exponentiel* $\tau < 2\sigma$ *nous avons*

$$\int_{\to -\infty}^{\to \infty} f(x)\,dx = \frac{\pi}{\sigma} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right) \tag{4}$$

pourvu que l'intégrale et la série, dans (4), *soient convergentes.*

Si $f(z) := \frac{\sin(2\sigma z)}{z}$, alors $\int_{\to -\infty}^{\to \infty} f(x)\,dx = \pi$ et $\frac{\pi}{\sigma} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right) = \frac{\pi}{\sigma} f(0) = 2\pi$, de sorte que $\int_{\to -\infty}^{\to \infty} f(x)\,dx \neq \frac{\pi}{\sigma} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right)$. Donc $\tau = 2\sigma$ n'est pas admissible au Théorème 1.

La formule (4) est aussi valide pour les fonctions f d'ordre 1, de type 2σ, qui satisfont la condition

$$f(x) = O(|x|^{-\delta}), \qquad (\delta > 1, \quad x \to \pm\infty). \tag{5}$$

En d'autres termes, nous avons le

THÉORÈME 2. *La formule* (4) *est valide pour toutes les fonctions entières* f *de type exponentiel* 2σ *qui satisfont* (5).

Ici encore, l'exemple $f(z) := \frac{\sin(2\sigma z)}{z}$ montre que $\delta = 1$ est inadmissible dans (5).

Le Théorème 2 est *essentiellement* connu; le Théorème 1 l'est aussi *pour les fonctions appartenant à* $L^1(-\infty,\infty)$. Ils peuvent être déduits (voir [2]) de la formule de Poisson [5, p. 60] en conjonction avec un théorème de Paley et Wiener [1, Théorème 6.8.1]. Notre méthode de preuve est nouvelle et nous la présentons dans l'espoir qu'elle suggèrera quelques extensions intéressantes de la formule de quadrature en question.

2. Résultats auxiliaires

2.1. En utilisant certaines propriétés bien connues des racines de l'unité, il est facile de voir que, *pour tout polynôme trigonométrique* $t(\theta) := \sum_{\nu=-(2n-1)}^{2n-1} a_\nu e^{i\nu\theta}$ *de degré* $< 2n$ *nous avons,*

$$\int_{-\pi}^{\pi} t(\theta)\, d\theta = \frac{\pi}{n} \sum_{\nu=-n+1}^{n} t\left(\frac{(2\nu-1)\pi}{2n}\right). \tag{6}$$

2.2. Nous voulons maintenant discuter quelques conséquences de la convergence de (3) pour une fonction entière de type exponentiel.

Une condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale (1) soit convergente est que

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx\right| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad x_2 > x_1 \geq X_\varepsilon. \tag{7}$$

Soit f une fonction holomorphe et de type exponentiel τ (> 0) dans le demi-plan droit fermé H. Ecrivons $f = g + ih$ où $g(z) := \frac{1}{2}(f(z)+\overline{f(\bar{z})})$ et $h(z) := \frac{1}{2i}(f(z)-\overline{f(\bar{z})})$. Les fonctions g, h sont aussi holomorphes et de type exponentiel τ dans H. De plus, elles sont réelles sur l'axe réel (positif) et les intégrales

$$\int_0^{\to\infty} g(x)\, dx, \quad \int_0^{\to\infty} h(x)\, dx$$

sont convergentes. En particulier, (7) est valide non seulement pour f mais aussi pour g et h. Ainsi

$$\left|\int_{\frac{\pi}{2\tau}(\nu-\frac{1}{4})}^{\frac{\pi}{2\tau}(\nu+\frac{1}{4})} g(x)\, dx\right| < \varepsilon, \quad \left|\int_{\frac{\pi}{2\tau}(\nu-\frac{1}{4})}^{\frac{\pi}{2\tau}(\nu+\frac{1}{4})} h(x)\, dx\right| < \varepsilon \quad \text{pour tous les entiers} \quad \nu \geq \tfrac{1}{4} + \tfrac{2\tau}{\pi} X_\varepsilon.$$

Il suit de là que dans chacun des intervalles $(\frac{\pi}{2\tau}(\nu-\frac{1}{4}), \frac{\pi}{2\tau}(\nu+\frac{1}{4}))$, il existe des nombres $\lambda_{1,\nu}$, $\lambda_{2,\nu}$ tels que

$$|g(\lambda_{1,\nu})| < \frac{4\tau}{\pi}\varepsilon, \quad |h(\lambda_{2,\nu})| < \frac{4\tau}{\pi}\varepsilon \quad \text{pour} \quad \nu \geq \tfrac{1}{4} + \tfrac{2\tau}{\pi} X_\varepsilon. \tag{8}$$

D'après un théorème de Duffin et Schaeffer [1, Théorème 10.5.1], $g(x) \to 0$,

$h(x) \to 0$ lorsque $x \to \infty$. Conséquemment $f(x) \to 0$ lorsque $x \to \infty$ et $f(x)$ est bornée pour $x \geq 0$. *La convergence de* (3) *pour une fonction entière* f *de type exponentiel implique que* "$f(x) \to 0$ *lorsque* $x \to \pm\infty$" *et* "$f(x)$ *est bornée sur l'axe réel*".

2.3. Nous démontrons les deux théorèmes en utilisant une méthode d'approximation développée par Hörmander dans [3]. Pour les besoins immédiats, nous devons rappeler quelques détails.

Dénotons par R_τ l'ensemble des fonctions f de type exponentiel τ telles que $f(x)$ est réelle et $-1 \leq f(x) \leq 1$ lorsque x est réel. Soit la fonction $\varphi(x) := (\frac{\sin \pi x}{\pi x})^2$. Etant donnée une fonction f dans R_τ posons, pour x réel et $h > 0$,

$$f_h(x) := \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \varphi(hx+\nu)\ f(x+\frac{\nu}{h}). \tag{9}$$

La fonction f_h est continue et

$$-1 \leq f_h(x) \leq 1. \tag{10}$$

De plus, $f_h(x)$ a la période $1/h$ et ses coefficients de Fourier

$$c_\nu(h) := h \int_{-\frac{1}{2h}}^{\frac{1}{2h}} f_h(x)\ e^{-2\pi i\nu hx}\, dx = h \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(hx)\ f(x)\ e^{-2\pi i\nu hx}\, dx \tag{11}$$

s'annulent si $|\nu| \geq \frac{\tau}{2\pi h} + 1$, i.e. que $f_h(x)$ est de la forme

$$f_h(x) = \sum_{\nu=-N}^{N} a_\nu e^{2\pi i\nu hx}, \qquad (N := [\frac{\tau}{2\pi h}]+1).$$

Finalement, pour x réel nous avons

$$|f_h(x) - f(x)| \leq 2(1-\varphi(hx)) \tag{12}$$

et $f_h(z) \to f(z)$ uniformément sur tout ensemble borné du plan complexe.

2.4. Les deux lemmes qui suivent nous aident à simplifier la présentation de la preuve des deux théorèmes.

LEMME 1. *Si, pour une fonction* f *donnée, l'intégrale* (1) *est convergente, alors* $\int_0^{\to\infty} (\frac{\sin hx}{hx})^2 f(x)\, dx$ *converge pour tout* $h > 0$. *De plus,*

$$\lim_{h\to 0} \int_0^{\to\infty} (\frac{\sin hx}{hx})^2 f(x)\, dx = \int_0^{\to\infty} f(x)\, dx \tag{13}$$

pourvu que f *soit bornée sur* $[0,\infty)$.

PREUVE. Posons $w_h(z) := (\frac{\sin hz}{hz})^2$. Alors w_h est une fonction entière de type exponentiel $2h$ appartenant à $L^1(-\infty,\infty)$ et donc [1, Théorème 11.3.3]

$$\int_{-\infty}^{\infty} |w_h'(x)|\, dx \le 2h \int_{-\infty}^{\infty} w_h(x)\, dx = 2 \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{\sin x}{x})^2\, dx = 2\pi. \tag{14}$$

Il suit alors de (7) que si $F(x) := \int_{X_\varepsilon}^{x} f(t)\, dt \quad (x \ge X_\varepsilon)$, alors

$$|F(x)| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad x \ge X_\varepsilon. \tag{15}$$

Soit maintenant $x_2 > x_1 \ge X_\varepsilon$. En intégrant par parties, nous obtenons

$$\int_{x_1}^{x_2} w_h(x)\, f(x)\, dx = w_h(x_2)\, F(x_2) - w_h(x_1)\, F(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} w_h'(x)\, F(x)\, dx$$

d'où, en vertu de (14) et (15),

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} w_h(x)\, f(x)\, dx\right| \le 2(1+\pi)\varepsilon \quad \text{pour} \quad x_2 > x_1 \ge X_\varepsilon, \tag{16}$$

i.e. que $\int_0^{\to\infty} (\frac{\sin hx}{hx})^2 f(x)\, dx$ est convergente.

Etant donné $\varepsilon > 0$, nous pouvons trouver un nombre positif h_ε tel que $0 \le 1 - w_h(x) \le \varepsilon/X_\varepsilon$ pour $0 < h < h_\varepsilon$ et pour tout $x \in [0,X_\varepsilon]$. Donc, pour $0 < h < h_\varepsilon$, nous avons

$$\left|\int_0^{\to\infty} w_h(x)\, f(x)\, dx - \int_0^{\to\infty} f(x)\, dx\right| \le \varepsilon \sup_{0\le x<\infty} |f(x)| + 2(1+\pi)\varepsilon + \varepsilon$$

ce qui démontre (13) pour f bornée.

LEMME 2. *Si* $w_h(z)$ *est définie comme ci-dessus, alors pour chaque* $\sigma > 0$,

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \left| w_h\left(\frac{(\nu+1)\pi}{\sigma}\right) - w_h\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right)\right| \le 2\pi. \tag{17}$$

PREUVE. C'est, en fait, une conséquence immédiate de (14).

Pour la preuve du Théorème 2, nous aurons aussi besoin du

LEMME 3. *Soit* f *une fonction de* R_τ *satisfaisant* (5). *Si* f_h *est définie comme dans* (9), *alors il existe une constante* c *telle que*

$$|f_h(x)| < c|x|^{-\delta} \quad \textit{pour} \quad 0 < |x| < \frac{1}{2h}. \tag{18}$$

PREUVE. Par hypothèse, il existe une constante $c_1 > 0$ telle que

$$|f(x)| < c_1|x|^{-\delta} \quad \text{pour} \quad 0 < |x| < \infty.$$

En utilisant le fait que $|\varphi(t)| \le 1$ pour $t \in \mathbb{R}$, nous obtenons

$$|f_h(x)| \le \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \left|\varphi(hx+\nu)\ f\left(x+\frac{\nu}{h}\right)\right| < c_1 \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \left|x+\frac{\nu}{h}\right|^{-\delta}.$$

Maintenant, si $0 < x < \frac{1}{2h}$, alors pour $\nu \ge 0$, $|x+\frac{\nu}{h}| \ge (2\nu+1)x$, alors que pour $\nu < 0$, $|x+\frac{\nu}{h}| > (2|\nu|-1)x$; il suit de là que

$$|f_h(x)| < c_1|x|^{-\delta}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^\delta} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(2\nu-1)^\delta}\right) = c|x|^{-\delta},$$

où $c := 2c_1 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^\delta}$, ce qui démontre (18) pour $0 < x < \frac{1}{2h}$. Par symétrie, la même estimation doit être aussi valide pour $-\frac{1}{2h} < x < 0$.

3. Preuves des Théorèmes 1 et 2

Nous pouvons évidemment nous restreindre aux fonctions qui sont réelles sur l'axe réel.

3.1. Soit f une fonction entière de type exponentiel $\tau > 0$ telle que (3) est convergente. Il a été observé à la section 2.2 que la fonction f doit être bornée sur l'axe réel. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que

$$\|f\|_\infty := \sup_{-\infty<x<\infty} |f(x)| = 1.$$

De (11), nous tirons que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_h(\frac{x}{2\pi h})\, dx = 2\pi c_o = 2\pi h \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(hx)\, f(x)\, dx.$$

Maintenant, d'après le Lemme 1, nous obtenons

$$\int_{\to-\infty}^{\to\infty} f(x)\, dx = \lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(hx)\, f(x)\, dx = \lim_{h\to 0} \frac{1}{2\pi h} \int_{-\pi}^{\pi} f_h(\frac{x}{2\pi h})\, dx.$$

Dans ce qui suit, nous supposerons que $\frac{\tau}{4\pi h}$ *est un entier positif.* Si $h := \frac{\tau}{4\pi(n-1)}$, alors la fonction $f_h(\frac{x}{2\pi h})$ est un polynôme trigonométrique de degré $2n-1$ donc, d'après la formule (6),

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_h(\frac{x}{2\pi h})\, dx = \frac{\pi}{n} \sum_{\nu=-n+1}^{n} f_h(\frac{(2\nu-1)\pi}{\tau+4\pi h}).$$

Ainsi, nous obtenons

$$\int_{\to-\infty}^{\to\infty} f(x)\, dx = \lim_{h\to 0} \frac{2\pi}{\tau+4\pi h} \sum_{\nu=-n+1}^{n} f_h(\frac{(2\nu-1)\pi}{\tau+4\pi h}). \tag{19}$$

3.2. Supposons maintenant que f satisfasse (5). Alors, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n_1 = n_1(\varepsilon)$ tel que

$$\sum_{|\nu|>n_1} |f(\frac{(2\nu-1)\pi}{\tau})| < \varepsilon. \tag{20}$$

D'après le Lemme 3,

$$|f_h(\frac{(2\nu-1)\pi}{\tau+4\pi h})| < (\frac{\tau+4\pi h}{\pi})^\delta \frac{c}{(2\nu-1)^\delta}, \qquad (-n+1 \le \nu \le n).$$

Il existe donc un entier $n_2 > n_1$, dépendant de ε mais *non de* h tel que

$$(\sum_{\nu=-n+1}^{-n_2} + \sum_{\nu=n_2}^{n}) |f_h(\frac{(2\nu-1)\pi}{\tau+4\pi h})| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad 0 < h < h_\varepsilon. \tag{21}$$

L'inégalité de Bernstein pour la dérivée d'un polynôme trigonométrique, en conjonction avec (10), peut être utilisée pour conclure que

$$|\sum_{\nu=-n_2}^{n_2} \{f_h(\frac{(2\nu-1)\pi}{\tau+4\pi h}) - f_h(\frac{(2\nu-1)\pi}{\tau})\}| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad 0 < h < h'_\varepsilon. \tag{22}$$

De plus, puisque $f_h(z) \to f(z)$ lorsque $h \to 0$,

(23) $$\left|\sum_{\nu=-n_2}^{n_2} \left\{f_h\left(\frac{(2\nu-1)\pi}{\tau}\right) - f\left(\frac{(2\nu-1)\pi}{\tau}\right)\right\}\right| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad 0 < h < h''_\varepsilon.$$

Il suit de (19) - (23) que si f est une fonction entière de type exponentiel $\tau > 0$ satisfaisant (5), alors

$$\int_{\to -\infty}^{\to \infty} f(x)\, dx = \frac{2\pi}{\tau} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} f\left(-\frac{\pi}{\tau} + \frac{2\pi\nu}{\tau}\right)$$

ce qui est évidemment équivalent au Théorème 2. La seconde partie de la preuve aurait aussi pu être complétée à l'aide du théorème de la convergence dominée de Lebesgue.

3.3. Complétion de la preuve du Théorème 1. Nous n'assumons plus que f satisfait (5) mais nous supposons que $\tau < 2\sigma$. Pour $0 < h < (2\sigma-\tau)/2$, la fonction

$$g_h(z) := \left(\frac{\sin hz}{hz}\right)^2 f(z) =: w_h(z)\, f(z)$$

satisfait la condition du Théorème 2 avec $\delta = 2$, d'où

(24) $$\int_{-\infty}^{\infty} g_h(x)\, dx = \frac{\pi}{\sigma} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} g_h\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right).$$

D'après le Lemme 1,

(25) $$\lim_{h \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} g_h(x)\, dx = \int_{\to -\infty}^{\to \infty} f(x)\, dx.$$

Il suffit donc de montrer que le membre de droite de (24) tend vers $\frac{\pi}{\sigma} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right)$ lorsque $h \to 0$. Soit N_ε le plus petit entier positif tel que

(26) $$\left|\sum_{\nu=-N_\varepsilon}^{n} f\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right)\right| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad n \geq N_\varepsilon;$$

posons $s_{N_\varepsilon - 1} := 0$, $s_m := \sum_{\nu=N_\varepsilon}^{m} f\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right)$ pour $m \geq N_\varepsilon$. Alors, pour tout $n \geq N_\varepsilon$,

$$
\begin{aligned}
\Big|\sum_{\nu=N_\varepsilon}^{n} g_h(\tfrac{\nu\pi}{\sigma})\Big| &= \Big|\sum_{\nu=N_\varepsilon}^{n} w_h(\tfrac{\nu\pi}{\sigma})(s_\nu - s_{\nu-1})\Big| \\
&= \Big|w_h(\tfrac{n\pi}{\sigma})s_n + \sum_{\nu=N_\varepsilon}^{n-1} \{w_h(\tfrac{\nu\pi}{\sigma}) - w_h(\tfrac{(\nu+1)\pi}{\sigma})\}s_\nu\Big| \\
&< (1+2\pi)\varepsilon
\end{aligned}
$$

en vertu de (17) et (26). De plus, il existe un nombre positif h_1 tel que

$$\Big|\sum_{\nu=0}^{N_\varepsilon-1} g_h(\tfrac{\nu\pi}{\sigma}) - \sum_{\nu=0}^{N_\varepsilon-1} f(\tfrac{\nu\pi}{\sigma})\Big| = \Big|\sum_{\nu=0}^{N_\varepsilon-1} (1 - w_h(\tfrac{\nu\pi}{\sigma}))\, f(\tfrac{\nu\pi}{\sigma})\Big| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad 0 < h < h_1.$$

Ainsi,

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} g_h(\tfrac{\nu\pi}{\sigma}) \to \sum_{\nu=0}^{\infty} f(\tfrac{\nu\pi}{\sigma}) \quad \text{lorsque} \quad h \to 0. \tag{27}$$

D'une manière analogue,

$$\sum_{\nu=-\infty}^{-1} g_h(\tfrac{\nu\pi}{\sigma}) \to \sum_{\nu=-\infty}^{-1} f(\tfrac{\nu\pi}{\sigma}) \quad \text{lorsque} \quad h \to 0. \tag{28}$$

Ceci complète la preuve du Théorème 1.

Références

[1] BOAS, R.P. Jr., *Entire Functions*, Academic Press, New York, 1954.

[2] BOAS, R.P. Jr., *Summation formulas and band-limited signals*, Tôhoku Math. J. (2) 24(1972), 121-125.

[3] HÖRMANDER, L., *Some inequalities for functions of exponential type*, Math. Scand. 3(1955), 21-27.

[4] SZEGÖ, G., *Orthogonal Polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, Vol. XXIII, Third edition, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1967.

[5] TITCHMARSH, E.C., *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, Oxford, 1937.

Département de mathématiques et de statistique
Université de Montréal
C.P. 6128, Succ. "A"
Montréal, Qué. H3C 3J7

Manuscrit reçu le 9 mai 1985.