Ann. sc. math. Québec, 1986, Vol. 10, No 1, pp. 5-15

RELATIONS DE DÉPENDANCE LINÉAIRE D'UNE FONCTION SPLINE AVEC PARTAGE UNIFORME DE LA DROITE RÉELLE

François Dubeau et Jean Savoie

Résumé

Nous utilisons les propriétés des B-splines pour établir des relations de dépendance linéaire entre des valeurs des dérivées et des intégrales définies d'une fonction spline lorsque la partition de la droite réelle est uniforme. Nous présentons une méthode générale pour établir de telles relations. Nous obtenons plusieurs relations déjà connues et en présentons de nouvelles.

1. Introduction

Soit $\Delta = \{ih\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ une partition *uniforme* de pas h de la droite réelle R. Une fonction spline $S(\cdot)$ de degré m définie sur R est une fonction telle que (i) $S(\cdot)$ est un polynôme de degré m sur chaque intervalle $[ih,(i+1)h]$, et (ii) $S(\cdot) \in C^{m-1}(R;R)$. Nous pouvons écrire ces fonctions sous la forme

$$S(x) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \alpha_s Q_{m+1}\left(\frac{x}{h} - s\right) \tag{1}$$

où $Q_{m+1}(\cdot)$ est une B-spline de degré m.

Pour les problèmes d'interpolation à l'aide des fonctions splines, il est très utile d'avoir des relations de dépendance linéaire entre des valeurs des dérivées et des intégrales définies d'une fonction spline. Ces relations sont utilisées pour établir des majorations d'erreur (cf. [1], [3], [5], [14]) et des développements asymptotiques (cf. [2], [7]). De telles relations ont été établies par

Fyfe [5], Hoskins et Meek [6], Meek [8] et Sakai [11] lorsqu'il y a des conditions de collocation aux extrémités ou aux points milieux des sous-intervalles. De même pour les problèmes d'histospline, problèmes pour lesquels les conditions s'expriment sous la forme d'intégrales définies de la fonction spline (cf. [9], [10]), Sakaï et Usmani [12] ont obtenu de telles relations. Ter Morsche [15] a également présenté de telles relations (voir Exemple 1).

Dans ce travail nous utilisons les propriétés des B-splines pour établir des relations de dépendance linéaire entre des valeurs des dérivées et des intégrales définies d'une fonction spline lorsque la partition de la droite réelle est uniforme. Nous prolongeons les travaux de Sakai [11], Sakaï et Usmani [12] et ter Morsche [15] et présentons une méthode générale pour établir de telles relations. Nous obtenons plusieurs relations déjà connues et en présentons de nouvelles.

Dans la suite nous utiliserons les notations suivantes: P_m est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à m, $g_w = g(wh)$ et

$$I^n_{\alpha,h}(f) = \frac{1}{h^n}\int_{\alpha h}^{(\alpha+1)h} dy_1 \int_{y_1}^{y_1+h} dy_2 \cdots \int_{y_{n-1}}^{y_{n-1}+h} f(y_n)dy_n .$$

2. Propriétés des B-splines

Rappelons qu'une B-spline de degré m est définie par

$$Q_{m+1}(x) = \frac{1}{m!}\sum_{i=0}^{m+1} (-1)^i \binom{m+1}{i} (x-i)^m_+ = \frac{1}{m!}\nabla^{m+1}(x)^m_+$$

où ∇ est l'opérateur aux différences finies régressives.

Notre travail est basé en partie sur différentes propriétés des B-splines que nous rappelons dans un lemme.

LEMME 1. *La B-spline* $Q_{m+1}(\cdot)$ *a les propriétés suivantes:*

(i) $Q_{m+1}|_{[j,j+1]}(\cdot) \in P_m[j,j+1]$ *pour* $j = 0,\dots,m$;

(ii) $Q_{m+1}(\cdot) \in C^{m-1}(R;R)$;

(iii) support $Q_{m+1}(\cdot) = [0,m+1]$;

(iv) $Q_{m+1}(x) = Q_m * \chi_{[0,1]}(x) = \underbrace{\chi_{[0,1]}*\chi_{[0,1]}*\cdots*\chi_{[0,1]}}_{m+1 \text{ fois}}(x)$;

(v) $Q_{m+1}^{(k)}(x) = (-1)^k Q_{m+1}^{(k)}(m+1-x)$ *pour* $k = 0,1,2,\ldots,m$;

(vi) $Q_{m+1}^{(k)}(x) = \nabla^k Q_{m+1-k}(x)$ *pour* $k = 0,1,\ldots,m$

$Q_{m+1}^{(m)}(x) = (-1)^j \binom{m}{j}$ *pour* $x \in (j,j+1)$ *et* $j = 0,\ldots,m$;

(vii) *pour tout* $\alpha,\beta \in R$ *et* $n \in N$, *nous avons*

$$\int_\alpha^{\alpha+1} dz_1 \int_{z_1}^{z_1+1} dz_2 \cdots \int_{z_{n-1}}^{z_{n-1}+1} Q_{m+1}^{(k)}(z_n+\beta)dz_n = Q_{m+n+1}^{(k)}(n+\alpha+\beta).$$

DÉMONSTRATION. Ces démonstrations sont directes et sont contenues dans l'excellent traité de L. L. Schumaker [13]. C.Q.F.D.

Nous utiliserons une famille de polynômes définis à partir des B-splines

$$P_m^{(k)}(t,z) = \sum_{\ell\geq 0} z^\ell Q_{m+1}^{(k)}(t-\ell)$$

pour tout $t,z \in R$ et $k = 0,1,\ldots,m$. Selon cette notation

$$P_m^{(k)}(t,z) = \frac{\partial k}{\partial t^k} P_m(t,z).$$

LEMME 2. *Les polynômes* $P_m^{(k)}(t,\cdot)$ *possèdent les propriétés suivantes:*

(i) *si* $t \leq 0$, *alors* $P_m^{(k)}(t,\cdot) \equiv 0$;

(ii) $P_m^{(k)}(t,1) = Q_m^{(k-1)}(t)$ *pour tout* $k = 1,\ldots,m$;

(iii) *s'il existe* $\tau \in [0,1]$ *et* $n \in N$ *tels que* $t = m+n+\tau$, *alors*

$$P_m^{(k)}(t,z) = z^n(z-1)^k P_{m-k}(m-k+\tau,z).$$

DÉMONSTRATION. Nous obtenons (i) et (ii) des propriétés (iii) et (vi) du Lemme 1. En utilisant les propriétés (iii), (v) et (vi) du Lemme 1, nous obtenons

$$\begin{aligned} P_m^{(k)}(m+n+\tau,z) &= (-1)^k z^n \sum_{\ell=0}^{m} z^\ell Q_{m+1}^{(k)}(1+\ell-\tau) \\ &= (-1)^k z^n (1-z)^k \sum_{\ell=0}^{m-k} z^\ell Q_{m+1-k}(1+\ell-\tau) \\ & z^n(z-1)^k P_{m-k}(m-k+\tau,z). \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Les polynômes $P_m(m+\tau,\cdot)$ ont déjà fait l'objet d'une étude détaillée lorsque le paramètre τ est dans l'intervalle $[0,1]$ (voir [4], Théorèmes 1 et 2). Nous terminons cette section en rappelant les principales propriétés de ces polynômes.

LEMME 3. *Les polynômes* $P_m(m+\tau,\cdot)$ *possèdent les propriétés suivantes:*

(i) $P_0(\tau,z) = 1$ *pour tout* $\tau \in [0,1]$ *et* $z \in R$;

(ii) *lorsque* $m \geq 1$ *nous avons* $P_m(m+1,z) = z\, P_m(m,z)$ *pour tout* $z \in R$;

(iii) *lorsque* $\tau \in (0,1]$, *le polynôme* $P_m(m+\tau,\cdot)$ *est de degré* m *et possède* m *racines distinctes négatives strictement croissantes par rapport au paramètre* τ;

(iv) $P_m(m+\tau,-1) = 0$ *si et seulement si* $\begin{cases} m \text{ est impair et } \tau = \frac{1}{2}, \\ m \text{ est pair et } \tau = 0 \text{ ou } 1. \end{cases}$

DÉMONSTRATION. Nous obtenons (i) et (ii) par définition de $P_m(t,\cdot)$. Les démonstrations de (iii) et (iv) apparaissent dans [4].

C.Q.F.D.

3. Relations de dépendance linéaire

La première étape est d'établir des relations de dépendance linéaire entre deux dérivées de la même B-spline $Q_{m+1}(\cdot)$.

THÉORÈME 4. *Soient* $m,n \in N$, $r,s \in Z$, $u,v,z \in R$ *et des entiers* p *et* q *tels que*

$$0 \leq p \leq m \quad et \quad 0 \leq q \leq m+n.$$

Alors

$$\sum_i Q_{m+n+1}^{(q)}(r-i+u)\, Q_{m+1}^{(p)}(i+v-s) = \sum_i Q_{m+1}^{(p)}(r-i+v)\, Q_{m+n+1}^{(q)}(i+u-s) \tag{2}$$

et

$$\sum_i P_{m+n}^{(q)}(r-i+u,z)\, Q_{m+1}^{(p)}(i+v-s) = \sum_i P_m^{(p)}(r-i+v,z)\, Q_{m+n+1}^{(q)}(i+u-s). \tag{3}$$

DÉMONSTRATION. Pour obtenir (2) il suffit de considérer le changement d'indice $r-i = i'-s$. En remplaçant u par $u-\ell$ dans (2), en multipliant par z^ℓ et en sommant pour $\ell \geq 0$, nous obtenons (3).

C.Q.F.D.

Les relations (2) et (3) relient bien $Q^{(p)}_{m+1}(\cdot)$ à $Q^{(q)}_{m+1}(\cdot)$ car, selon la propriété (vii) du Lemme 1, l'expression $Q^{(q)}_{m+n+1}(\cdot)$ est une intégrale définie de $Q^{(q)}_{m+1}(\cdot)$.

Lorsque $p = m$, ou $q = m+n$, les relations restent valides lorsque v, ou u, est entier en prenant des limites à gauche ou à droite.

En utilisant la propriété (ii) du Lemme 2, nous obtenons le corollaire suivant.

COROLLAIRE 5. *Soient* $m,n \in N$, $r,s \in Z$, $u,v,z \in R$ *et des entiers* p, q *et* j *tels que*

$$0 \le p \le m, \quad 0 \le q \le m+n \quad \textit{et} \quad 0 \le j \le \min\{p,q\}.$$

Alors

$$\sum_i Q^{(q-j)}_{m+n+1-j}(r-i+u)\; Q^{(p)}_{m+1}(i+v-s) = \sum_i Q^{(p-j)}_{m+1-j}(r-i+v)\; Q^{(q)}_{m+n+1}(i+u-s) \tag{4}$$

$$\sum_i P^{(q-j)}_{m+n-j}(r-i+u,z)\; Q^{(p)}_{m+1}(i+v-s) = \sum_i P^{(p-j)}_{m-j}(r-i+v,z)\; Q^{(q)}_{m+n+1}(i+u-s). \tag{5}$$

Si nous remplaçons u par $\ell+u$, v par $\ell+v$ et r par $m+n-j-\ell$ dans (4) et considérons alors u et v dans l'intervalle $[0,1]$, nous obtenons

$$\sum_{i=0}^{m+n-j} Q^{(q-j)}_{m+n+1-j}(m+n-j+u-i)\; Q^{(p)}_{m+1}(\ell+i+v-s) = \sum_{i=0}^{m-j} Q^{(p-j)}_{m+1-j}(m-j+v-i)\; Q^{(q)}_{m+n+1}(n+\ell+i+u-s)$$

ceci a pour effet de rendre les indices de sommation indépendants de s. En utilisant la propriété (vii) du Lemme 1, en transformant l'intégrale à l'aide du changement de variable $z_i = y_i/h$ $(i = 1,\dots,n)$ et en utilisant (1), nous obtenons le résultat suivant.

THÉORÈME 6. *Soient* $m,n \in N$, $u,v \in [0,1]$ *et des entiers* p, q *et* j *tels que*

$$0 \le p \le m, \quad 0 \le q \le m+n \quad \textit{et} \quad 0 \le j \le \min\{p,q\}.$$

Alors, pour tout $\ell \in Z$, *nous avons*

$$h^p \sum_{i=0}^{m+n-j} Q^{(q-j)}_{m+n+1-j}(m+n-j+u-i)\; S^{(p)}_{\ell+i+v} = h^q \sum_{i=0}^{m-j} Q^{(p-j)}_{m+1-j}(m-j+v-i)\; I^n_{\ell+i+u,h}(S^{(q)}). \tag{6}$$

Illustrons ce résultat à l'aide de quelques exemples.

EXEMPLE 1. Posons $n = 0$ et $j = q = 0$. Nous obtenons

$$h^p \sum_{i=0}^{m} Q_{m+1}(m+u-i)\ S^{(p)}_{\ell+i+v} = \sum_{i=0}^{m} Q^{(p)}_{m+1}(m+v-i)\ S_{\ell+i+u}$$

pour $p = 0,\dots,m$ et $u,v \in [0,1]$, ce sont les relations établies par ter Morsche [15].

(i) Pour $u = v = 0$, nous obtenons les relations établies par Fyfe [5]

$$h^p \sum_{i=0}^{m-1} Q_{m+1}(m-i)\ S^{(p)}_{\ell+i} = \sum_{i=0}^{m-1} Q^{(p)}_{m+1}(m-i)\ S_{\ell+i}.$$

(ii) Pour $u = v = \frac{1}{2}$, nous obtenons les relations établies par Hoskins et Meek [6]

$$h^p \sum_{i=0}^{m} Q_{m+1}(m+\tfrac{1}{2}-i)\ S^{(p)}_{\ell+i+\frac{1}{2}} = \sum_{i=0}^{m} Q^{(p)}_{m+1}(m+\tfrac{1}{2}-i)\ S_{\ell+i+\frac{1}{2}}.$$

(iii) Sakaï [11] a obtenu (6) pour $j = 0$, $n = 0$, $u = \frac{1}{2}$, et $v = 0$. En particulier il obtient

$$h^p \sum_{i=0}^{m-1} Q_{m+1}(m-i)\ S^{(p)}_{\ell+i+\frac{1}{2}} = \sum_{i=0}^{m} Q^{(p)}_{m+1}(m+\tfrac{1}{2}-i)\ S_{\ell+i}$$

et

$$h^p \sum_{i=0}^{m} Q_{m+1}(m+\tfrac{1}{2}-i)\ S^{(p)}_{\ell+i} = \sum_{i=0}^{m-1} Q^{(p)}_{m+1}(m-i)\ S_{\ell+i+\frac{1}{2}}.$$

EXEMPLE 2. Posons $n = 1$ et $j = q = 0$. Nous obtenons

$$h^p \sum_{i=0}^{m+1} Q_{m+2}(m+1+u-i)\ S^{(p)}_{\ell+i+v} = h^{-1} \sum_{i=0}^{m} Q^{(p)}_{m+1}(m+v-i) \int_{(\ell+i+u)h}^{(\ell+i+u+1)h} S(x)\ dx,$$

pour $p = 0,\dots,m$ et $u,v \in [0,1]$.

(i) Pour $u = 0$ et $v = 0$, nous avons

$$h^p \sum_{i=0}^{m} Q_{m+2}(m+1-i)\ S^{(p)}_{\ell+i} = h^{-1} \sum_{i=0}^{m-1} Q^{(p)}_{m+1}(m-i) \int_{(\ell+i)h}^{(\ell+i+1)h} S(x)\ dx$$

et pour $u = 0$ et $v = \frac{1}{2}$, nous obtenons

$$h^p \sum_{i=0}^{m} Q_{m+2}(m+1-i)\ S^{(p)}_{\ell+i+\frac{1}{2}} = h^{-1} \sum_{i=0}^{m} Q^{(p)}_{m+1}(m+\tfrac{1}{2}-i) \int_{(\ell+i)h}^{(\ell+i+1)h} S(x)\ dx.$$

Ce sont les relations établies par Sakaï et Usmani [11].

(ii) Pour $u = \frac{1}{2}$ et $v = 0$, nous avons

$$h^p \sum_{i=0}^{m+1} Q_{m+2}(m+3/2-i)\ S_{\ell+i}^{(p)} = h^{-1} \sum_{i=0}^{m-1} Q_{m+1}^{(p)}(m-i) \int_{(\ell+i+\frac{1}{2})h}^{(\ell+i+3/2)h} S(x)\ dx$$

et pour $u = \frac{1}{2}$ et $v = \frac{1}{2}$, nous obtenons

$$h^p \sum_{i=0}^{m+1} Q_{m+2}(m+3/2-i)\ S_{\ell+i+\frac{1}{2}}^{(p)} = h^{-1} \sum_{i=0}^{m} Q_{m+1}^{(p)}(m+\tfrac{1}{2}-i) \int_{(\ell+i+\frac{1}{2})h}^{(\ell+i+3/2)h} S(x)\ dx.$$

Les relations du Théorème 6 contiennent en général $m+n-j+1$ termes dans le membre de gauche et $m-j+1$ termes dans le membre de droite. Il est possible d'obtenir des relations comportant un terme de moins à gauche et à droite.

Pour y arriver, utilisons (5) et remplaçons u par $\ell+u$, v par $\ell+v$, r par $m+n-j-\ell-1$ et considérons u et $v \in [0,1]$. Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} &\sum_{i=-\ell+s}^{m+n-j-1} P_{m+n-j}^{(q-j)}(m+n-j-1-i+u,z)\ Q_{m+1}^{(p)}(\ell+i+v-s) \\ &\qquad = \sum_{i=-n-\ell+s}^{m-j-1} P_{m-j}^{(p-j)}(m-j-1-i+v,z)\ Q_{m+n+1}^{(q)}(n+\ell+i+u-s). \end{aligned} \tag{7}$$

Dans cette identité, les bornes inférieures des indices de sommation dépendent de s. Le problème est donc de trouver z tel que ces bornes inférieures ne dépendent pas de s et soient nulles.

Considérons les indices i strictement négatifs dans (7). Selon la propriété (iii) du Lemme 2, nous obtenons

$$P_{m+n-j}^{(q-j)}(m+n-j-1-i+u,z) = z^{-(i+1)}(z-1)^{q-j}\ P_{m+n-q}(m+n-q+u,z)$$

et

$$P_{m-j}^{(p-j)}(m-j-1-i+v,z) = z^{-(i+1)}(z-1)^{p-j}\ P_{m-p}(m-p+v,z).$$

Nous avons alors le résultat suivant.

THÉORÈME 7. *Soient* $m,n \in N$, $u,v \in [0,1]$, *et des entiers* p, q *et* j *tels que*

$$0 \le p \le m, \quad 0 \le q \le m+n \quad \textit{et} \quad 0 \le j \le \min\{p,q\}.$$

Si z *est une racine des polynômes* $P_{m+n-q}(m+n-q+u,\cdot)$ *et* $P_{m-p}(m-p+v,\cdot)$, *alors*

$$h^p \sum_{i=0}^{m+n-j-1} P_{m+n-j}^{(q-j)}(m+n-j-1-i+u,z)\ S_{\ell+i+v}^{(p)} = h^q \sum_{i=0}^{m-j-1} P_{m-j}^{(p-j)}(m-j-1-i+v,z)\ I_{\ell+i+u,h}^{n}(S^{(q)}). \tag{8}$$

Nous pouvons conclure du comportement des racines des polynômes $P_m(m+\tau,\cdot)$ par rapport au paramètre τ (voir [4]) qu'il est possible de trouver, pour tout nombre $\bar{z}$ strictement négatif, un u et un v dans l'intervalle $[0,1]$ tels que $P_{m+n-q}(m+n-q+u,\bar{z}) = 0$ et $P_{m-p}(m-p+v,\bar{z}) = 0$. En particulier, pour $\bar{z} = -1$, en utilisant la propriété (iv) du Lemme 3, nous obtenons le résultat suivant.

COROLLAIRE 8. *Soient* $m,n \in N$ *et des entiers* p, q *et* j *tels que*

$$0 \le p < m, \quad 0 \le q < m+n \quad \textit{et} \quad 0 \le j \le \min\{p,q\}.$$

Si

$$m+n-q \ \textit{est} \begin{cases} \textit{pair et} & u = 0 \ \textit{ou} \ 1, \\ \textit{impair et} & u = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

et

$$m-p \ \textit{est} \begin{cases} \textit{pair et} & v = 0 \ \textit{ou} \ 1, \\ \textit{impair et} & v = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

alors, pour tout $\ell \in Z$,

$$h^p \sum_{i=0}^{m+n-j-1} P_{m+n-j}^{(q-j)}(m+n-j-1-i+u,-1)\ S_{\ell+i+v}^{(p)} = h^q \sum_{i=0}^{m-j-1} P_{m-j}^{(p-j)}(m-j-1-i+v,-1)\ I_{\ell+i+u,h}^{n}(S^{(q)}). \tag{9}$$

EXEMPLE 3. Posons $n = 0$ et $j = q = 0$. Nous obtenons

$$h^p \sum_{i=0}^{m-1} P_m(m-1+u-i,-1)\ S_{\ell+i+v}^{(p)} = \sum_{i=0}^{m-1} P_m^{(p)}(m-1+v-i,-1)\ S_{\ell+i+u}$$

pour p, u et v appropriés.

(i) Pour m et p pairs et $u = v = 0$, nous obtenons les relations établies par Meek [8]

$$h^p \sum_{i=0}^{m-2} P_m(m-1-i,-1)\ S_{\ell+i}^{(p)} = \sum_{i=0}^{m-2} P_m^{(p)}(m-1-i,-1)\ S_{\ell+i}.$$

(ii) Pour m pair, $u = 0$ et p impair, $v = \frac{1}{2}$, nous obtenons

$$h^p \sum_{i=0}^{m-2} P_m(m-1-i,-1)\ S^{(p)}_{\ell+i+\frac{1}{2}} = \sum_{i=0}^{m-1} P^{(p)}_m(m-\tfrac{1}{2}-i,-1)\ S_{\ell+i}.$$

(iii) Pour m impair, $u = \frac{1}{2}$ et p impair, $v = 0$, nous obtenons

$$h^p \sum_{i=0}^{m-1} P_m(m-\tfrac{1}{2}-i,-1)\ S^{(p)}_{\ell+i} = \sum_{i=0}^{m-2} P^{(p)}_m(m-1-i,-1)\ S_{\ell+i+\frac{1}{2}}.$$

(iv) Pour m impair, $u = \frac{1}{2}$ et p pair, $v = \frac{1}{2}$, nous avons

$$h^p \sum_{i=0}^{m-1} P_m(m-\tfrac{1}{2}-i,-1)\ S^{(p)}_{\ell+i} = \sum_{i=0}^{m-1} P^{(p)}_m(m-\tfrac{1}{2}-i,-1)\ S_{\ell+i+\frac{1}{2}}.$$

EXEMPLE 4. Posons $n = 1$ et $j = q = 0$. Nous obtenons

$$h^p \sum_{i=0}^{m} P_{m+1}(m+u-i,-1)\ S^{(p)}_{\ell+i+v} = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^{m-1} P^{(p)}_m(m-1+v-i,-1) \int_{(\ell+i+u)h}^{(\ell+i+u+1)h} S(x)\ dx.$$

(i) Pour m impair, $u = 0$ et p impair, $v = 0$, nous avons

$$h^p \sum_{i=0}^{m-1} P_{m+1}(m-i,-1)\ S^{(p)}_{\ell+i} = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^{m-2} P^{(p)}_m(m-1-i,-1) \int_{(\ell+i)h}^{(\ell+i+1)h} S(x)\ dx.$$

(ii) Pour m impair, $u = 0$ et p pair, $v = \frac{1}{2}$, nous avons

$$h^p \sum_{i=0}^{m-1} P_{m+1}(m-i,-1)\ S^{(p)}_{\ell+i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^{m-1} P^{(p)}_m(m-\tfrac{1}{2}-i,-1) \int_{(\ell+i)h}^{(\ell+i+1)h} S(x)\ dx.$$

(iii) Pour m pair, $u = \frac{1}{2}$ et p pair, $v = 0$, nous avons

$$h^p \sum_{i=0}^{m} P_{m+1}(m+\tfrac{1}{2}-i,-1)\ S^{(p)}_{\ell+i} = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^{m-2} P^{(p)}_m(m-1-i,-1) \int_{(\ell+i+\frac{1}{2})h}^{(\ell+i+3/2)h} S(x)\ dx.$$

(iv) Pour m pair, $u = \frac{1}{2}$ et p impair, $v = \frac{1}{2}$, nous avons

$$h^p \sum_{i=0}^{m} P_{m+1}(m+\tfrac{1}{2}-i,-1)\ S^{(p)}_{\ell+i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^{m-1} P^{(p)}_m(m-\tfrac{1}{2}-i,-1) \int_{(\ell+i+\frac{1}{2})h}^{(\ell+i+3/2)h} S(x)\ dx.$$

Nous avons obtenu des relations de dépendance linéaire (6), (8) et (9) entre des valeurs des dérivées et des intégrales définies d'une fonction spline lorsque la partition est uniforme. Ces relations générales englobent les relations déjà connues et en contiennent de nouvelles. Ces résultats seront utiles pour obtenir des majorations d'erreur et des développements asymptotiques. Nous pouvons également obtenir des résultats semblables pour des fonctions splines à deux variables (voir Sakaï [11], et Sakaï et Usmani [12]).

Bibliographie

[1] ALBASINY, E.L. et HOSKINS, W.K., *Explicit error bounds for periodic splines of odd order on a uniform mesh*, J. Inst. Maths Applics 12(1973), 303-318.

[2] DIKSHIT, H.P., SHARMA, A. et TZIMBALARIO, J., *Asymptotic error expansions for spline interpolation*, Canad. Math. Bull. 27(1984), 337-344.

[3] DUBEAU, F. et SAVOIE, J., *Periodic even degree spline interpolation on a uniform partition*, J. of Approx. Theory 44(1985), 43-54.

[4] DUBEAU, F. et SAVOIE, J., *Généralisation de la série géométrique et applications*, Février 1985 (à paraître, Ann. sc. math. Québec).

[5] FYFE, D.J., *Linear dependance relations connecting equal interval* N-*th degree splines and their derivatives*, J. Inst. Maths Applics 7(1971), 398-406.

[6] HOSKINS, W.D. et MEEK, D., *Linear dependance relations for polynomial splines at midknots*, BIT 15(1975), 272-276.

[7] LUCAS, T.R., *Asymptotic expansions for interpolating periodic splines*, SIAM J. Numer. Anal. 19(1982), 1051-1066.

[8] MEEK, D., *Some new linear relations for even degree polynomial splines on a uniform mesh*, BIT 20(1980), 382-384.

[9] NEWMAN, E., *Determination of a quadratic spline function with given values of the integrals in subintervals*, Zastos. Mat. 16(1980), 681-689.

[10] NEWMAN, E., *Quadratic splines and histospline projections*, J. Approx. Theory 29(1980), 297-304.

[11] SAKAÏ, M., *Some new consistency relations connecting spline values at mesh and midpoints*, BIT 23(1983), 543-546.

[12] SAKAÏ, M. et USMANI, R.A., *Some new consistency relations connecting spline values and integrals of the spline*, BIT 23(1983), 399-402.

[13] SCHUMAKER, L.L., *Spline Functions: Basic Theory*, John Wiley & Sons, 1981.

[14] SWARTZ, B., $0(h^{2n+2-\ell})$ *bounds on some spline interpolation errors*, Bull. Amer. Math. Soc. 74(1968), 1072-1078.

[15] ter MORSCHE, H., *On the relations between finite differences and derivatives of cardinal spline functions*, Spline Functions Karlsruhe 1975, Böhmer, K., Meinardus, G. et Schempp, W. (eds), Springer-Verlag, 1976, 210-219.

Département de mathématiques
Collège militaire royal de St-Jean
St-Jean-sur-Richelieu, Québec
Canada J0J 1R0

Manuscrit reçu le 30 mai 1985.