Ann. sc. math. Québec, 1985, vol. 9, no 2, pp. 199-202

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE $\sum_{n\leq x} n^a \{f(\frac{x}{n})\}$

Armel Mercier[1]

Dans [2], nous avons étudié l'ordre de grandeur de $\sum_{n\leq x} n^a\{\frac{x}{n}\}^k$ où a est un nombre réel plus grand que -1, k est un entier positif et $\{x\}$ désigne la partie fractionnaire de x. De nouveaux résultats concernant ce problème ont été obtenus par S. Kanemitsu et M. Ishibashi [1] et récemment l'auteur et N.M. Nowak [3] ont généralisé ce problème en étudiant le comportement asymptotique de $\sum_{n\leq x} g(n)\{\frac{x}{n}\}^k$ où $g(t)$ est une fonction positive et non décroissante pour $t \geq 1$.

Le but de la présente note est d'établir une formule asymptotique pour l'expression en titre dans le cas où a est un nombre réel > -1 et $f(t)$ est une fonction positive, continue, strictement croissante pour $t \geq 1$ et satisfaisant $\lim_{t\to\infty} f(t) = \infty$.

THÉORÈME 1. *Avec les hypothèses décrites ci-dessus, on a*

$$\sum_{n\leq x} n^a\{f(\frac{x}{n})\} = Cx^{a+1} + 0(x^a h(x))$$

où $C = \int_1^\infty \frac{\{f(u)\}}{u^{2+a}}\,du$ *et* $h(x)$ *est la solution unique de l'équation* $y = f(\frac{x}{y})$, $0 < h(x) < x$.

Puisque

[1] Travail fait dans le cadre de la subvention C.R.S.N.G. A-3508.

$$\sum_{n\le x} n^a\{f(\tfrac{x}{n})\} = \int_1^x t^a\{f(\tfrac{x}{t})\}dt = \int_0^1 \sum_{n\le x-1} (n^a\{f(\tfrac{x}{n})\} - (n+t)^a\{f(\tfrac{x}{n+t})\})\ dt$$

$$= Cx^{a+1} + 0\left(\frac{1}{x^{a+1}}\right) + \int_0^1 \sum_{n\le x-1} (n^a\{f(\tfrac{x}{n})\} - (n+t)^a\{f(\tfrac{x}{n+t})\})\ dt$$

alors notre résultat sera obtenu par l'intermédiaire du théorème suivant.

THÉORÈME 2. *Sous les hypothèses du Théorème* 1,

$$S(x) = \sum_{n\le x-1} (n^a\{f(\tfrac{x}{n})\} - (n+t)^a\{f(\tfrac{x}{n+t})\}) = 0(x^a h(x))$$

uniformément pour $0 \le t \le 1$.

DÉMONSTRATION. Pour $0 \le t \le 1$, nous avons

$$(1)\qquad S(x) = \sum_{n\le x-1} (n^a - (n+t)^a)\{f(\tfrac{x}{n+t})\} + \sum_{n\le x-1} n^a(\{f(\tfrac{x}{n})\} - \{f(\tfrac{x}{n+t})\}).$$

D'une part, on obtient

$$\Big|\sum_{n\le x-1} (n^a - (n+t)^a)\{f(\tfrac{x}{n+t})\}\Big| \ll \sum_{n\le x-1} |n^a - (n+t)^a| \ll \sum_{n\le x-1} ((n+1)^a - n^a) \ll x^a$$

et d'autre part, en appliquant la sommation par parties, on a

$$\sum_{n\le x-1} n^a(\{f(\tfrac{x}{n})\} - \{f(\tfrac{x}{n+t})\}) = \sum_{u\le x-1} (u^a - (u+1)^a)G_u(x) + [x]^a G_{x-1}(x)$$

où

$$G_u(x) = \sum_{n\le u} (\{f(\tfrac{x}{n})\} - \{f(\tfrac{x}{n+t})\}).$$

Soit $M_x = \max_{u\le x} |G_u(x)|$. Alors on obtient

$$\sum_{n\le x} n^a(\{f(\tfrac{x}{n})\} - \{f(\tfrac{x}{n+t})\}) \ll M_x x^a.$$

En substituant ces deux ordres de grandeur dans (1), nous avons

$$S(x) \ll x^a(M_x+1).$$

Il suffit maintenant d'établir l'ordre de grandeur de M_x. Puisque $f(\frac{x}{y})$ est une fonction continue et décroissante de y, alors pour x suffisamment grand, il existe une solution unique $y = h(x)$, satisfaisant $0 < h(x) < x$, de l'équation $y = f(\frac{x}{y})$. Donc

$$\begin{aligned} G_u(x) &= \sum_{n\le u} (\{f(\tfrac{x}{n})\} - \{f(\tfrac{x}{n+t})\}) \\ &= \sum_{n\le h(x)} (\{f(\tfrac{x}{n})\} - \{f(\tfrac{x}{n+t})\}) + \sum_{h(x)<n\le u} (\{f(\tfrac{x}{n})\} - \{f(\tfrac{x}{n+t})\}) \\ &= O(h(x)) + \sum_{h(x)<n\le u} (f(\tfrac{x}{n}) - f(\tfrac{x}{n+t})) - \sum_{h(x)<n\le u} ([f(\tfrac{x}{n})] - [f(\tfrac{x}{n+t})]). \end{aligned}$$

Or f est croissante, d'où

$$\Big|\sum_{h(x)<n\le u} (f(\tfrac{x}{n}) - f(\tfrac{x}{n+t}))\Big| \le \Big|\sum_{h(x)<n\le u} (f(\tfrac{x}{n}) - f(\tfrac{x}{n+1}))\Big| \ll f(\tfrac{x}{h(x)}) = h(x)$$

et aussi

$$\sum_{h(x)<n\le u} ([f(\tfrac{x}{n})] - [f(\tfrac{x}{n+t})]) \ll h(x).$$

Ainsi, on a

$$G_u(x) \ll h(x) \quad \text{pour} \quad h(x) < u \le x.$$

Mais pour $u \le h(x)$, il est immédiat que $G_u(x) \ll h(x)$ d'où

$$G_u(x) \ll h(x), \qquad 1 \le u \le x,$$

et ceci termine la preuve de notre résultat.

A titre d'exemple, on a:

Soit a et b des nombres réels tels que $a > -1$, $b > 0$. Alors

$$\sum_{n\le x} n^a\{(\tfrac{x}{n})^b\} = Cx^{a+1} + O\left(x^{a+\frac{a}{b+1}}\right)$$

où

$$C = \int_1^\infty \frac{\{u^b\}}{u^{2+a}}\,du = \begin{cases} \dfrac{1}{a+1-b} - \dfrac{\zeta(\frac{a+1}{b})}{a+1} & \text{si } a > b-1 \\[2ex] \dfrac{1}{b}(1-\gamma) & \text{si } a = b-1 \end{cases}$$

où ζ désigne la fonction zêta de Riemann et γ désigne la constante d'Euler.

Bibliographie

[1] KANEMITSU, S. et ISHIBASHI, M., *On fractional part sums and divisor functions*, à paraître dans Proceedings of the Conference on Number Theory, Okayama, Japan.

[2] MERCIER, A., *Sums containing the fractional parts of numbers*, à paraître dans Rocky Mountain Journal of Mathematics.

[3] MERCIER, A. et NOWAK, N.W., *On the asymptotic behaviour of sums* $\sum g(n)\{\frac{x}{n}\}^k$, Monatshefte für Mathematik 99(1985), 213-221.

Département des sciences fondamentales
Université du Québec à Chicoutimi
Chicoutimi, Québec
Canada G7H 2B1

Manuscrit reçu le 27 février 1985.