Ann. sc. math. Québec, 1985, vol. 9, no 2, pp. 185-197

ÉTUDE DE QUELQUES PROBLÈMES SPECTRAUX RELATIFS AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES NON LINÉAIRES*

Jamila Karrakchou

Résumé

Nous étudions le problème spectral

$$(1)\qquad \begin{cases} \lambda y'' + f(x,y,y') = 0 \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$

Sous certaines conditions sur f; on établit une correspondance biunivoque entre l'ensemble des valeurs propres λ et l'ensemble des zéros des solutions du problème de Cauchy

$$(2)\qquad \begin{cases} y'' + f(x,y,y') = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = \alpha. \end{cases}$$

Ceci nous a permis la caractérisation des fonctions f pour lesquelles le spectre du problème

$$\begin{cases} \lambda y'' + f(y) = 0 \\ y(0) = f(1) = 0 \end{cases}$$

est ponctuel.

0. Introduction

Le problème spectral

$$\begin{cases} \lambda y'' + f(x,y,y') = 0 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

a fait l'objet de plusieurs travaux suivant des optiques différentes; nous citerons entre autres Joyce R. McLaughlin [1], D.F. Mary [2], qui se sont intéressés plus particulièrement à l'équation de Sturm-Liouville.

Ici on va s'intéresser à une classe de fonctions bien particulières. On prend:

$$g(x,y,y') = x^h f(x^k y) \tag{3}$$

où h et k sont deux constantes positives ou nulles et $\xi \to f(\xi)$ est une application donnée: $f(0) = 0$, de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Bien entendu λ est dite valeur propre si le problème

$$\begin{cases} \lambda y'' + x^h f(x^k y) = 0 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

admet une seule solution $y(x) \not\equiv 0$, cette solution est alors appelée fonction propre associée à λ.

Dans Karrakchou [3] on a vu que sous certaines conditions sur f (entre autres $\frac{\partial f}{\partial \xi} < 0$) le problème (4) a une solution et une seule; comme $f(0) = 0$, cette solution est $y(x) = 0$, $\forall x \in [0,1]$, c'est-à-dire $\forall \lambda \in]0,+\infty[$, λ n'est pas valeur propre. Nous supposons contrairement à ce qui précède $\frac{\partial f}{\partial \xi} > 0$ et nous nous proposons d'obtenir des renseignements sur le spectre.

Les résultats fondamentaux obtenus sont donc:

(i) La caractérisation des fonctions f pour lesquelles le spectre est ponctuel.

Cette étude est faite en trois étapes:

1. Etude du problème de Cauchy

$$(P_\alpha) \quad \begin{cases} y'' + x^h f(x^k y) = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = \alpha, \qquad \alpha \not\equiv 0. \end{cases}$$

2. Lien entre le problème (P_α) et le problème spectral.

3. Caractérisation des fonctions f pour lesquelles le spectre est ponctuel.

(ii) Conditions suffisantes sur f pour que le spectre soit non connexe jusqu'à un certain ordre N.

1. Etude du problème (P_α)

Soit donc $\xi \to f(\xi)$ une application donnée de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant $f(0) = 0$, et $f'(\xi) > 0$, $\xi \in \mathbb{R}$. Soit α un réel donné non nul (supposons par exemple $\alpha > 0$). Le problème (P_α) consiste à:

chercher une application $x \to y(x)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ou d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la plus grande possible) de classe C^2 vérifiant:

$$(P_\alpha) \quad \begin{cases} y'' + x^h f(x^k y) = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = \alpha. \end{cases}$$

On montre la proposition suivante:

PROPOSITION 1. *La solution de* (P_α) *existe et est unique, elle est définie pour tout* $x > 0$, *enfin elle est oscillante, c'est-à-dire, elle possède une infinité dénombrable de zéros sur* $[0,+\infty]$.

DÉMONSTRATION. Voir en appendice.

2. Lien entre le problème (P_α) et le problème spectral

Dans ce paragraphe on montre les propositions suivantes:

PROPOSITION 2. *Si* $y(x)$ *est une fonction propre du problème spectral* (4), λ *la valeur propre associée, alors il existe un couple de constantes réelles positives finies* (μ,ν) *tel que le changement de variable* $x = \nu\xi$, $y = \mu\eta$ *transforme le problème spectral* (4) *en un problème* (P_α) *(avec* α *convenablement choisi), aux notations près des variables* (ξ *est maintenant la variable indépendante* *et* $\eta(\xi)$ *la fonction). De plus,* $\lambda^{-(1/k+h+2)}$ *est l'abscisse de l'un des zéros sur* $]0,+\infty[$ *de la solution* $\eta(\xi)$ *de ce problème* (P_α).

DÉMONSTRATION. Voir en appendice.

PROPOSITION 3. *Considérons* α *réel donné fini, non nul et* $y(x)$ *la solution correspondante du problème* (P_α). *Soit* $0 < x_1 < x_2 < \dots$ *la liste dénombrable des zéros de* $y(x)$ *sur* $]0,+\infty[$. *Alors les réels* $\lambda_j = \frac{1}{x_j^{k+h+2}}$ $(j = 1,2,\dots)$ *sont des valeurs propres du problème spectral associé à* (1).

DÉMONSTRATION. Voir en appendice.

REMARQUE. On a ainsi un procédé pour avoir toutes les valeurs propres (donc le spectre) du problème spectral, car on a établi une correspondance biunivoque entre les valeurs propres et les zéros des problèmes (P_α) associées.

Les x_j dépendent en général de α; il en est donc de même des λ_j , et chacune des valeurs propres λ_j décrit un petit intervalle sur l'axe des x quand α varie. La question qu'on peut se poser est la suivante: comment doit être f pour que le spectre soit ponctuel?

3. Caractérisation des fonctions f pour lesquelles le spectre est ponctuel

Dans cette partie on se limite au cas où $h = k = 0$, c'est-à-dire au problème spectral suivant:

$$\begin{cases} \lambda y'' + f(y) = 0 \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$

Dans le cas où f est linéaire, il est bien connu que le spectre est ponctuel; il en est de même pour le genre de fonctions non linéaires suivant:

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{si } x > 0 \\ bx & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad (a,b) \in (\mathbb{R}^+)^2.$$

Nous montrons que c'est d'ailleurs le seul cas possible; plus précisément:

THÉORÈME 1. *f étant une application donnée de classe C^1, strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et vérifiant $f(0) = 0$. Alors une condition nécessaire et suffisante pour que le spectre du problème non linéaire:*

$$\begin{cases} \lambda y'' + f(y) = 0 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

soit ponctuel est que les restrictions de f à $[0,+\infty[$ et $]-\infty,0]$ soient linéaires.

DÉMONSTRATION. On a vu qu'il y a une certaine bijection entre les λ_j et les zéros x_j d'un problème (P_α). Donc, pour que le spectre soit ponctuel il faut et il suffit que les zéros des solutions de (P_α) restent fixes quand α varie dans $\mathbb{R}$. Nous donnons le lemme suivant:

LEMME 1. *Une condition nécessaire et suffisante pour que les zéros de (P_α) ne dépendent pas de α est que:*

$$\int_0^s \frac{d\eta}{\sqrt{2F(s)-2F(\eta)}} = k \qquad \forall s > 0$$

et

$$\int_s^0 \frac{d\eta}{\sqrt{2F(s)-2F(\eta)}} = k' \qquad \forall s < 0$$

où $F(s) = \int_0^s f(t)dt$ et k et k' sont deux constantes réelles.

DÉMONSTRATION. Voir en appendice.

La démonstration du théorème est alors immédiate grâce au lemme précédent et au théorème d'Opial [4] connu sous le nom du théorème des mouvements tautochrones et qui s'énonce ainsi:

THÉORÈME D'OPIAL. *Si pour une fonction $g(x)$ définie continue sur l'intervalle $]-\infty,+\infty[$ on suppose que:*

a) $xg(x) > 0, \quad \forall x \in]-\infty,+\infty[$

b) $\lim\limits_{|x|\to+\infty} G(x) = +\infty$ *où* $G(x) = \int_0^x g(t)dt$

c) *pour tout* $x \neq 0$,

$$T_g(x) = \sqrt{2}\int_0^x \frac{du}{\sqrt{G(x)-G(u)}} = T$$

où T *est une constante.*
Alors la fonction $g(x)$ *est identique à* $\left(\frac{\pi}{T}\right)^2 x$.

Nous terminons en donnant une condition suffisante sur f pour que les intervalles I_{λ_j} $(j = 1,2,\dots,N)$ sur lesquels varient les valeurs propres λ_j (λ_j parcourt I_{λ_j} quand α varie) aient une intersection vide au moins jusqu'à l'ordre N. Pour cela nous utilisons le lemme suivant, dû à Opial [4].

LEMME 3. *Si les fonctions* $g(x)$ *et* $h(x)$ *définies et continues sur* $]-\infty,+\infty[$ *satisfont les conditions:*

i) $xg(x) > 0$ *et* $xh(x) > 0$, $\forall x \in]-\infty,+\infty[$

ii) $\lim\limits_{|x|\to+\infty} G(x) = \lim\limits_{|x|\to+\infty} H(x) = +\infty$ *où* $G(x) = \int_0^x g(t)dt$ *et* $H(x) = \int_0^x h(t)dt$

iii) $|g(x)| \geq |h(x)|$ *pour tout* $x \in]-\infty,+\infty[$.

Alors $T_g(x) \leq T_h(x)$ *où*

$$T_g(x) = \sqrt{2}\int_0^x \frac{du}{\sqrt{G(x)-G(u)}} \quad \text{et} \quad T_h(x) = \sqrt{2}\int_0^x \frac{du}{\sqrt{H(x)-H(u)}} .$$

Nous obtenons le résultat suivant:

THÉORÈME 2. f *étant une application de classe* C^1, *strictement croissante de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *et vérifiant* $f(0) = 0$, *supposons en plus que:*

- f *soit impaire,*
- *il existe deux constantes positives* h *et* k *telles que:* $kx \leq f(x) \leq hx$ *et vérifiant* $k < h < \left(\frac{p}{p-1}\right)^2 k$ *où* p *est un entier donné.*

Alors les intervalles I_{λ_j} *ne se touchent pas pour* $j \leq p$.

DÉMONSTRATION. Voir en appendice.

EXEMPLE. Prenons $f(y) = \dfrac{y^3 + \frac{2n-1}{n} y}{y^2+2}$. Cette fonction vérifie les hypothèses du théorème (2) avec $k = (2n-1)/n$, $h = 1$, $p = 2n$, donc les intervalles I_{λ_j} ne se touchent pas les uns les autres pour tout $j \le 2n$.

Appendice

DÉMONSTRATION de la Proposition 1. La solution du problème de Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + x^h f(x^k y) = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = \alpha \end{cases}$$

existe, et elle est unique, au moins localement (c'est-à-dire pour x assez petit, positif).

Si nous montrons que, tant que y est définie, $|y|$ et $|y'|$ sont bornées sur tout compact de $[0,+\infty[$, alors il s'ensuivra (d'après le théorème sur les "bouts de solution") que y est définie pour tout x positif.

Supposons que $\alpha > 0$: $y(x)$ et $y'(x)$ commencent par être positives, pour x croissant à partir de zéro. Mais, lorsque $y(x) > 0$, on a $y'' < 0$ (d'après l'équation différentielle), y' est alors fonction décroissante de x.

Tant que $y(x)$ reste positive, on a donc $y(x) < \alpha x$. Par suite, si y reste positive, tant qu'elle est définie, y est bornée sur tout compact, ainsi que y'.

Supposons que y vienne à s'annuler, avec changements de signe pour une valeur de x finie et positive, soit x_1. Lorsque x croît à partir de x_1, y (et y') sont négatives, et on a un raisonnement analogue à celui qui précède, puisque y'' est alors positive.

Il en résulte donc que la solution du (P_α) est définie pour tout x positif ou nul.

Nous allons montrer qu'en fait, l'éventualité que y soit de signe constant pour x positif, est à rejeter. Il s'ensuivra alors que la solution de (P_α) est oscillante, c'est-à-dire admet, sur $[0,+\infty]$ une infinité dénombrable de zéros: $0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots$ avec $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Si $y'(0) = \alpha > 0$, $y(x)$ commence par être positive pour x croissant à partir de zéro: on a alors $y'' < 0$ c'est-à-dire que $y'(x)$ décroît à partir de α. On montrera que si x croît indéfiniment à partir de zéro, il est impossible que $y'(x)$ reste constamment positive; il en résultera que $y'(x)$ devient négative pour des valeurs finies de x, $y(x)$ étant encore positive, cela entraîne l'existence de $x_1 \in]0,+\infty[$ telle que $y(x_1) = 0$, $y'(x_1) < 0$, $y(x) > 0$ pour $0 < x < x_1$. A partir de x_1 un nouveau problème de Cauchy se pose pour la même équation différentielle avec, cette fois-ci, les conditions initiales: $y(x_1) = 0$, $y'(x_1)$ = la valeur négative trouvée. On montre alors qu'il existe $x_2 \in]x_1,+\infty[$ tel que $y(x_2) = 0$, $y'(x_2) > 0$, $y(x) < 0$ pour $x_1 < x < x_2$; etc.

Pour montrer que $y'(x)$ ne peut rester sans cesse ≥ 0 pour x croissant à partir de zéro, procédons par l'absurde:

si on avait $y'(x) \geq 0$, $x \in [0,+\infty[$, $y'(x)$ aurait une limite ℓ (finie) quand x tend vers $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} y'(x) = \ell, \qquad \ell \geq 0$$

or, on a:

$$y'(x) - \alpha + \int_0^x t^h f(t^k y(t))\,dt = 0, \qquad \forall x > 0$$

$\ell \geq 0$ implique que $y(x)$ tend vers une limite positive (<u>finie ou non</u>) et donc $\int_0^x t^h f(t^k y(t)) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ ce qui est absurde car $y'(x) - \alpha$ a une limite finie quand x tend vers $+\infty$ (d'après l'hypothèse). Soit donc $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots$ la liste des zéros de $y(x)$ pour $x > 0$.

DÉMONSTRATION de la Proposition 2. Nous pouvons affirmer que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mu}{\nu}\frac{d\eta}{d\xi} \quad \text{et} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mu}{\nu^2}\frac{d^2\eta}{d\xi^2} .$$

Si on passe de x,y à ξ,η l'équation différentielle

$$y'' + x^h f(x^k y) = 0$$

devient:

$$\frac{\lambda\mu}{\nu^2}\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + \nu^h\xi^h f(\nu^k\xi^k\mu\eta) = 0$$

c'est-à-dire encore:

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + \frac{\nu^{h+2}}{\lambda\mu}\xi^h f(\nu^k\mu\xi^k\eta) = 0.$$

Aux notations près (ξ au lieu de x; η au lieu de y), on sera donc en présence de l'équation différentielle d'un problème (P_α) si l'on prend μ et ν tels que:

$$\frac{\nu^{h+2}}{\lambda\mu} = \nu^k\mu = 1, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \mu = \lambda^{-\frac{k}{k+h+2}} , \quad \nu = \lambda^{\frac{1}{k+h+2}} .$$

La condition $y(0) = 0$ du problème spectral (1) devient $\eta(0) = 0$. Si $y(x)$ et λ sont connus (solution de (1)), on en tire:

$$\frac{d\eta}{d\xi}(0) = \frac{\nu}{\mu}\frac{dy}{dx}(0) = \lambda^{\frac{k+1}{k+h+2}}\frac{dy}{dx}(0)$$

Le paramètre α du problème (P_α) sera donc ici $\alpha = \lambda^{\frac{k+1}{k+h+2}}\frac{dy}{dx}(0)$. Enfin la condition $y(1) = 0$ (du problème (1)) se transcrit: $\eta\left(\frac{1}{\nu}\right) = 0$, i.e. $\frac{1}{\nu} = \lambda^{-\frac{1}{k+h+2}}$ est l'abscisse de l'un des zéros sur $]0,+\infty[$, de la solution de ce problème (P_α).

DÉMONSTRATION de la Proposition 3. Soit $y(x)$ la solution oscillante du problème (P_α). Soit x_i l'un des zéros de $y(x)$. Le changement de variable $x = x_i\xi$, $y = \mu\eta$ transforme l'équation différentielle de (P_α) en:

$$\frac{\mu}{x_i^2}\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + x_i^h\xi^h f(x_i^k\xi^k\mu\eta) = 0$$

avec les conditions aux limites $\eta(0) = 0$ et $\eta(1) = 0$; c'est-à-dire que $\eta(\xi)$ est solution du problème:

$$\begin{cases} \mu \dfrac{d^2\eta}{d\xi^2} + x_i^{h+2}\xi^h f(\mu x_i^k \xi^k \eta) = 0 \\ \eta(0) = \eta(1) = 0 \end{cases}$$

ou bien encore:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x_i^{h+k+2}} \dfrac{d^2\eta}{d\xi^2} + \xi^h f(\xi^k \eta) = 0 \\ \eta(0) = \eta(1) = 0 \quad \text{si } \mu \text{ est choisi tel que } \mu x_i^k = 1. \end{cases}$$

Ce problème n'est autre que le problème spectral (1). Et comme $\eta(\xi)$ est non identiquement nulle, elle est donc fonction propre et la valeur propre qui lui est associée est:

$$\lambda = \frac{1}{x_i^{h+k+2}} .$$

DÉMONSTRATION du Lemme 1. $\alpha > 0$, considérons la solution $y(x)$ du problème:

$$(P_\alpha) \qquad \begin{cases} y'' + f(y) = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = \alpha. \end{cases}$$

Nous pouvons écrire:

$$y'y'' + y'f(y) = 0$$

d'où, en intégrant,

$$y'^2 - \alpha^2 + 2F(y) = 0$$

donc

$$y' = \pm\sqrt{\alpha^2 - 2F(y)}$$

c'est-à-dire

$$dx = \frac{dy}{\pm\sqrt{\alpha^2 - 2F(y)}} .$$

Pendant la première phase (où $y(x)$ croît) on peut écrire

$$x = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{\alpha^2 - 2F(t)}} .$$

Cette phase dure tant que le dénominateur est positif. Appelons η_1 la première racine positive de $\alpha^2 = 2F(\eta)$ et x_1' l'abscisse du premier maximum de $y(x)$:

$$x_1' = \int_0^{\eta_1} \frac{d\eta}{\sqrt{\alpha^2 - 2F(\eta)}} .$$

Pendant la deuxième phase (entre le premier maximum et le premier minimum de la solution $y(x)$), on peut écrire:

$$dy = -\sqrt{\alpha^2 - 2F(y)}\, dx$$

ou

$$dx = -\frac{dy}{\sqrt{\alpha^2 - 2F(y)}}$$

c'est-à-dire, en intégrant:

$$x - x_1' = -\int_{\eta_1}^{y} \frac{d\eta}{\sqrt{\alpha^2 - 2F(\eta)}} .$$

Le premier zéro de $y(x)$ est entre le premier maximum et le premier minimum de cette solution: il a pour abscisse:

$$x_1 = x_1' - \int_{\eta_1}^{0} \frac{d\eta}{\sqrt{\alpha^2 - 2F(\eta)}} = 2\int_0^{\eta_1} \frac{d\eta}{\sqrt{\alpha^2 - 2F(\eta)}} .$$

On montre de la même manière que l'abscisse du second zéro de $y(x)$ est donné par:

$$x_2 = x_1 + 2\int_{\eta_2}^{0} \frac{d\eta}{\sqrt{\alpha^2 - 2F(\eta)}}$$

où η_2 est le premier zéro négatif de $\alpha^2 - 2F(\eta) = 0$.

Le même raisonnement permet d'avoir tous les zéros de $y(x)$:

$$x_{2p+1} = x_{2p} + 2\int_0^{s} \frac{d\eta}{\sqrt{2F(s) - 2F(\eta)}} \qquad s > 0$$

et

$$x_{2p} = x_{2p-1} + 2\int_s^{0} \frac{d\eta}{\sqrt{2F(s) - 2F(\eta)}} \qquad s < 0$$

s est un zéro de $\alpha^2 - 2F(t)$. On notera que si α varie sur $\mathbb{R}^+$, s varie sur $\mathbb{R}$.

Ainsi donc s'achève la démonstration du Lemme 1.

DÉMONSTRATION du Théorème 2. On a vu à la section 2 que les valeurs propres λ_j sont données à partir des zéros du problème:

$$(P_\alpha) \quad \begin{cases} y'' + f(y) = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = \alpha \end{cases}$$

par la relation $\lambda_j = \dfrac{1}{x_j^2}$ où x_j est le $j^{\text{ième}}$ zéro de la solution de (P_α).

Comme f est impaire, on montre aisément que la solution de (P_α) est périodique, de période $2T_f(x)$; donc les zéros de cette solution sont donnés par:

$$x_n = nT_f(x), \qquad n \in N,$$

d'où

$$\lambda_n = \frac{1}{n^2 T_f^2(x)} .$$

Comme f est impaire et que $kx \le f(x) \le hx$, on obtient:

$$k|x| \le |f(x)| \le h|x| \qquad \forall x \in]-\infty,+\infty[.$$

Posons $h(x) = hx$ et $k(x) = kx$ pour tout $x \in]-\infty,+\infty[$. Le Lemme 3 nous permet donc d'écrire:

$$T_h(x) \le T_f(x) \le T_k(x);$$

or,

$$T_h(x) = \sqrt{2}\int_0^x \frac{du}{\sqrt{H(x)-H(u)}} = \frac{2}{\sqrt{h}}\int_0^x \frac{du}{\sqrt{x^2-u^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{h}} \quad \text{et} \quad T_k(x) = \frac{\pi}{\sqrt{k}} .$$

Donc $\dfrac{\pi}{\sqrt{h}} \le T_f(x) \le \dfrac{\pi}{\sqrt{k}}$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{n^2 \frac{\pi^2}{k}} \le \lambda_n \le \frac{1}{n^2 \frac{\pi^2}{h}} .$$

Pour que les intervalles I_{λ_j} soient donc disjoints, il suffit d'avoir:

$$\frac{1}{n^2 \frac{\pi^2}{h}} < \frac{1}{(n-1)^2 \frac{\pi^2}{k}}$$

c'est-à-dire $h < \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 k$; ce qui est bien vrai tant que $n \leq p$, d'où le théorème.

Remerciements

Ce travail m'a été proposé par Monsieur J.M. Blondel, professeur à l'Université de Bordeaux, France. Les idées et les conseils qu'il m'a prodigués m'ont été d'une grande utilité, je l'en remercie vivement.

Bibliographie

[1] McLAUGHLIN, J.R., *Upper and lower bounds on eigenvalues of second order Sturn-Liouville systems*, Journal of Differential Equations 19(1975), 201-213.

[2] ST-MARY, D.F., *Some oscillations and dual comparison theorems for* $(r(t)y')' + P(t)y = 0$, Journal of Differential Equations 5(1969).

[3] KARRAKCHOU, J., *Résolution de certains problèmes aux limites non linéaires*, Rapport CRMA-1151, Montréal, 1983.

[4] OPIAL, Z., *Sur les périodes des solutions de l'équation différentielle* $y'' + g(y) = 0$, Annales Polanci Mathematica (1961), 49-72.

Ecole Mohamadia d'ingénieurs
Université Mohamed V
Rabat, Maroc

Manuscrit reçu le 10 avril 1984.
Revisé le 29 janvier 1985.

* Cet article a été publié grâce à une subvention du Fonds F.C.A.C. pour l'aide et le soutien à la recherche.