Ann. sc. math. Québec, 1985, vol. 9, no 2, pp. 175-183

COMBINAISONS DE THÉORÈMES D'INTERPOLATION ET DE PRÉSERVATION

Michel Hébert[1]

Abstract

If $R_1,\ldots,R_n$ are binary relations between structures for a finitary language L and $\Delta_1,\ldots,\Delta_n$ are sets of sentences, we look for conditions for which the equivalences of conditions 1^i) $[AR_iB$ and $A \models \varphi] \Rightarrow B \models \psi$ and 2^i) there exists $\sigma_i \in \Delta_i$ such that $\varphi \models \sigma_i \models \psi$ for $i = 1,\ldots,n$ imply the equivalence of 1) $[A_iR_iB$ and $A_i \models \varphi_i$ for $i = 1,\ldots,n] \Rightarrow B \models \psi$ and 2) for $i = 1,\ldots,n$, there exists $\sigma_i \in \Delta_i$ such that $\varphi_i \models \sigma_i$ and $\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n \models \psi$ (respectively 1') $[AR_iB$ for an $i \in \{1,\ldots,n\}$ and $A \models \varphi] \Rightarrow B \models \psi$ and 2') there exists $\sigma \in \bigcap_{i=1}^{n} \Delta_i$ such that $\varphi \models \sigma \models \psi$); we study the consequences on preservation theorems.

Soit Δ un ensemble d'énoncés d'un langage L finitaire du premier ordre. Une relation (binaire) R entre les structures pour L *admet une Δ-interpolation* si les deux affirmations suivantes sont équivalentes pour tous les énoncés φ et ψ de L:

i) $[ARB$ et $A \models \varphi] \Rightarrow B \models \psi$.

ii) Il existe $\sigma \in \Delta$ tel que $\varphi \models \sigma \models \psi$.

1980 Mathematics Subject Classification. Primary 03C40.

[1] avec le support financier du F.C.A.C. (Québec) et du N.S.E.R.C. (Canada).

La motivation de ce texte est le double problème suivant. Si R_i est une relation admettant une Δ_i-interpolation pour $i = 1,\dots,n$, quand peut-on conclure que

a) la relation $(n+1)$-aire "$\langle R_i\rangle_{i=1}^n$" admet une "$\langle\Delta_i\rangle_{i=1}^n$-interpolation", i.e. que les affirmations suivantes sont équivalentes pour tous les énoncés $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ et ψ de L:

i') $[A_iR_iB$ et $A_i \models \varphi_i$ pour $i = 1,\dots,n] \Rightarrow B \models \psi$;

ii') Pour $i = 1,\dots,n$, il existe $\sigma_i \in \Delta_i$ tels que $\varphi_i \models \sigma_i$ et $\sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_n \models \psi$.

b) la relation binaire " $\bigcup_{i=1}^n R_i$ " admet une " $\bigcap_{i=1}^n \Delta_i$-interpolation", i.e. que les affirmations suivantes sont équivalentes pour tous les énoncés φ et ψ de L:

i") $[AR_iB$ pour un $i \in \{1,\dots,n\}$ et $A \models \varphi] \Rightarrow B \models \psi$;

ii") Il existe $\sigma \in \bigcap_{i=1}^n \Delta_i$ tel que $\varphi \models \sigma \models \psi$.

Si l'équivalence entre i') et ii') demeure lorsque les φ_i, les σ_i et ψ sont des ensembles d'énoncés, ce théorème d'interpolation "généralisé" donne lieu à un théorème de préservation ("uniforme"), i.e. à l'équivalence entre les affirmations suivantes, où T est un ensemble quelconque d'énoncés de L:

i"') $[A_iR_iB$ et $A_i \models T$ pour $i = 1,\dots,n] \Rightarrow B \models T$;

ii"') Il existe $T' \subset \bigcup_{i=1}^n \Delta_i$ tel que $T \equiv T'$.

Une remarque analogue vaut pour i") et ii").

Les théorèmes d'interpolation (binaires) connus ont souvent cette propriété (et plus encore) d'induire un théorème de préservation uniforme. Notre premier résultat permettra d'obtenir automatiquement les combinaisons du premier type d'une bonne part des théorèmes d'interpolation et de préservation classiques. La partie a) du problème formulé plus haut n'étant pas essentiellement différente lorsque les relations de départ sont (ce qu'on appellera) (n_i+1)-aires pour des entiers positifs n_i quelconques, on se placera d'emblée dans ce contexte plus général.

La terminologie et les résultats de [4] fournissent un cadre approprié à notre étude, une fois qu'on a généralisé les définitions (dans le sens suggéré par

Volger lui-même à la dernière section de [4]) et relevé quelques faits:

1) Une *relation* (n+1)-*aire* $(n \geq 1)$ *entre les structures* (pour L) est ici une relation binaire entre, d'une part, les n-uples de structures et d'autre part les structures. Pour simplifier, on écrira "$\langle A_i\rangle_{i=1}^n \equiv \langle B_i\rangle_{i=1}^n$" (respectivement "$\langle A_i\rangle_{i=1}^n \cong \langle B_i\rangle_{i=1}^n$", "$\langle A_i\rangle_{i=1}^n \models \langle\varphi_i\rangle_{i=1}^n$") plutôt que "$A_i \equiv B_i$ (respectivement $A_i \cong B_i$, $A_i \models \varphi_i$) pour $i = 1,\dots,n$". Toute relation entre les structures sera supposée fermée pour les isomorphismes, i.e. $[\langle A_i\rangle_{i=1}^n\, RB,\ \langle A_i\rangle_{i=1}^n \cong \langle B_i\rangle_{i=1}^n$ et $B \cong B'] \Rightarrow \langle B_i\rangle_{i=1}^n\, RB'$. Si R est une relation (n+1)-aire entre les structures et B est une structure, on notera $R^{-1}(B)$ la classe des n-uples $\langle A_i\rangle_{i=1}^n$ tels que $\langle A_i\rangle_{i=1}^n\, RB$.

Si $R_1,\dots,R_m$ sont des relations respectivement (n_1+1)- ,..., (n_m+1)-aires sur les structures et $n = n_1 + \dots + n_m$, on notera $\langle R_i\rangle_{i=1}^m$ la relation (n+1)-aire définie par

$$\langle A_j\rangle_{j=i}^n\ \langle R_i\rangle_{i=1}^m\ B \quad \text{ssi} \quad \langle A_j\rangle_{j=n_0+\dots+n_{i-1}+1}^{n_1+\dots+n_i}\ R_iB \quad \text{pour } i = 1,\dots,m$$

où $n_0 = 0$.

Les *relations* (n+1)-*aires entre les énoncés* (de L) sont définies et traitées de façon analogue. On les notera Γ ou Γ_i.

2) Toute relation R (respectivement Γ) entre les structures (respectivement les énoncés) donne lieu à une relation de même arité sur les énoncés (resp. les structures), notée $[\to R]$ (resp. $[\to \Gamma]$), définie par

$$\langle\varphi_i\rangle_{i=1}^n\ [\to R]\psi \quad \text{ssi} \quad [\langle A_i\rangle_{i=1}^n \models \langle\varphi_i\rangle_{i=1}^n \ \text{ et } \ \langle A_i\rangle_{i=1}^n\, RB] \Rightarrow B \models \psi$$

$$(\text{resp. } \langle A_i\rangle_{i=1}^n\ [\to \Gamma]B \quad \text{ssi} \quad [\langle A_i\rangle_{i=1}^n \models \langle\varphi_i\rangle_{i=1}^n \ \text{ et } \ \langle\varphi_i\rangle_{i=1}^n\, \Gamma\psi] \Rightarrow B \models \psi).$$

L'opérateur $[\to]$ détermine la connection de Galois (des relations (n+1)-aires sur les énoncés vers les relations (n+1)-aires sur les structures) suivante:

$$R \subseteq [\to \Gamma] \quad \text{ssi} \quad \Gamma \subseteq [\to R].$$

On vérifie sans difficulté que $[\to <\ >_{i=1}^{m}] \supseteq <[\to]>_{i=1}^{m}$ et que

$$[\to [\to <\ >_{i=1}^{m}]] \subseteq <[\to [\to]]>_{i=1}^{m} \subseteq [\to <[\to]>_{i=1}^{m}].$$

3) La *fermeture élémentaire* R^* de R est la relation sur les structures de même arité que R définie par

$$<A_i>_{i=1}^{n} R^*B \text{ ssi il existe } <A_i'>_{i=1}^{n} \text{ et } B' \text{ tels que } <A_i>_{i=1}^{n} \equiv <A_i'>_{i=1}^{n} RB' \equiv B.$$

Remarquons que $[\to R] = [\to R^*]$, d'où $R^* \subseteq [\to [\to R]]$, et que $(<R_i>_{i=1}^{m})^* \subseteq <R_i^*>_{i=1}^{m}$.

R est dit *fermé pour les ultraproduits* si pour tout ultrafiltre D sur un ensemble K, on a

$$[<A_i^k>_{i=1}^{n} RB^k \text{ pour tout } k \in K] \Rightarrow <\pi_D A_i^k>_{i=1}^{n} R(\pi_D B^k),$$

où $\pi_D A_i^k$ (resp. $\pi_D B^k$) est l'ultraproduit des A_i^k (resp. B^k) sur D. On définit de façon analogue la fermeture pour les ultrapuissances.

4) Pour le reste du texte, tout ensemble d'énoncés noté Δ ou Δ_i sera supposé contenir un énoncé valide. Si $\Delta_1,\dots,\Delta_n$ sont des ensembles d'énoncés, on notera $\mathrm{int}<\Delta_i>_{i=1}^{n}$ la relation $(n+1)$-aire sur les énoncés définie par

$$<\varphi_i>_{i=1}^{n} \mathrm{int}<\Delta_i>_{i=1}^{n} \psi \text{ ssi l'affirmation ii') est vérifiée.}$$

On a bien sûr $<\mathrm{int}\ \Delta_i>_{i=1}^{n} \subsetneq \mathrm{int}<\Delta_i>_{i=1}^{n}$ en général, mais assez curieusement $[\to \mathrm{int}<\Delta_i>_{i=1}^{n}] = <[\to \mathrm{int}\ \Delta_i]>_{i=1}^{n}$ (en utilisant le fait que chaque Δ_i contient un énoncé valide).

On dira qu'une relation $(n+1)$-aire R *admet une* $<\Delta_i>_{i=1}^{n}$*-interpolation* (resp. une $<\Delta_i>_{i=1}^{n}$*-interpolation forte*) si $[\to R] = \mathrm{int}<\Delta_i>_{i=1}^{n}$ (resp. $R^* = [\to \mathrm{int}<\Delta_i>_{i=1}^{n}]$). L'hypothèse de la présence d'un énoncé valide dans chaque Δ_i permet (à peu de frais) d'éviter la possibilité gênante de l'existence d'une structure A_1 pour laquelle, par exemple, $A_1 \models \sim\sigma$ pour tout $\sigma \in \Delta_1$, ce qui impliquerait trivialement $<A_i>_{i=1}^{n} [\to \mathrm{int}<\Delta_i>_{i=1}^{n}]B$ pour toutes les structures $A_2,\dots,A_n,B$. Une application répétée n fois de l'argument habituel de compacité employé dans le lemme 3.2.1 de [1] permet de voir que si $R^* = [\to \mathrm{int}\langle\Delta_i\rangle_{i=1}^n]$ et que chaque Δ_i est fermé pour les disjonctions, alors R est $(\bigcup_{i=1}^n \Delta_i)$-uniforme, i.e. pour tout ensemble d'énoncés T, l'affirmation

$$[\langle A_i\rangle_{i=1}^n RB \text{ et } A_i \models T \text{ pour } i = 1,\dots,n] \Rightarrow B \models T$$

est équivalente à l'affirmation ii''') plus haut. Le même genre de raisonnement implique aussi que, dans les mêmes hypothèses sur R^* et les Δ_i, on a $\mathrm{int}\langle\Delta_i\rangle_{i=1}^n = [\to [\to \mathrm{int}\langle\Delta_i\rangle_{i=1}^n]]$. On en tire que si $\Delta_1,\dots,\Delta_n$ sont des ensembles d'énoncés fermés pour la disjonction et la conjonction, alors la $\langle\Delta_i\rangle_{i=1}^n$-interpolation forte implique la $\langle\Delta_i\rangle_{i=1}^n$-interpolation.

THÉORÈME 1. *Soient* $R_1,\dots,R_m$ *des relations respectivement* (n_1+1)-,... ,...,(n_m+1)*-aires entre les structures et* $n = \sum_{i=1}^m n_i$. *Alors,*

a) *si* R_i *admet une* $\langle\Delta_j^i\rangle_{j=i}^{n_i}$*-interpolation forte pour* $i = 1,\dots,m$, *alors* $\langle R_i\rangle_{i=1}^m$ *admet une* $\langle\langle\Delta_j^i\rangle_{j=1}^{n_i}\rangle_{i=1}^m$*-interpolation forte ssi* $(\langle R_i\rangle_{i=1}^m)^* = \langle R_i^*\rangle_{i=1}^m$;

b) *si* $(\langle R_i\rangle_{i=1}^m)^* = \langle R_i^*\rangle_{i=1}^m$ *et pour toute structure* A *et* $i = 1,\dots,m$, $(R_i^*)^{-1}(A)$ *et* $[\to \mathrm{int}\langle\Delta_j^i\rangle_{j=1}^{n_i}]^{-1}(A)$ *sont non vides, alors* $\langle R_i\rangle_{i=1}^m$ *admet une* $\langle\langle\Delta_j^i\rangle_{j=1}^{n_i}\rangle_{i=1}^m$*-interpolation forte ssi chaque* R_i *admet une* $\langle\Delta_j^i\rangle_{j=1}^{n_i}$*-interpolation forte;*

c) *si chaque* R_i *préserve les ultrapuissances, alors* $(\langle R_i\rangle_{i=1}^m)^* = \langle R_i^*\rangle_{i=1}^m$.

PREUVE. a) L'hypothèse implique que $\langle R_i^*\rangle_{i=1}^m = \langle[\to \mathrm{int}\langle\Delta_j^i\rangle_{j=1}^{n_i}]\rangle_{i=1}^m$, et par 4), on a $\langle[\to \mathrm{int}\langle\Delta_j^i\rangle_{j=1}^{n_i}]\rangle_{i=1}^m = [\to \mathrm{int}\langle\langle\Delta_j^i\rangle_{j=1}^{n_i}\rangle_{i=1}^m]$, d'où le résultat par définition de l'interpolation forte.

b) Par a), il suffit de montrer ($\Rightarrow$). On montre par exemple que $R_1^* = [\to \mathrm{int}\langle\Delta_j^1\rangle_{j=1}^{n_1}]$. Soit $\langle A_j^1\rangle_{j=1}^{n_1}$ $[\to \mathrm{int}\langle\Delta_j^1\rangle_{j=1}^{n_1}]B$. Par hypothèse, il existe, pour $i = 2,\dots,m$, $\langle A_j^i\rangle_{j=1}^{n_i}$ tels que $\langle A_j^i\rangle_{j=1}^{n_i}$ $[\to \mathrm{int}\langle\Delta_j^i\rangle_{j=1}^{n_i}]B$. On en déduit que $\langle\langle A_j^i\rangle_{j=1}^{n_i}\rangle_{i=1}^m$ $[\to \mathrm{int}\langle\langle\Delta_j^i\rangle_{j=1}^{n_i}\rangle_{i=1}^m]B$, d'où $\langle\langle A_j^i\rangle_{j=1}^{n_i}\rangle_{i=1}^m$ $(\langle R_i\rangle_{i=1}^m)^*B$, $\langle\langle A_j^i\rangle_{j=1}^{n_i}\rangle_{i=1}^m$ $\langle R_i^*\rangle_{i=1}^m B$, et donc en particulier $\langle A_j^1\rangle_{j=1}^{n_1}$ R_1^*B. L'inclusion inverse se déduit de la même manière.

c) On doit montrer que $\langle R_i^*\rangle_{i=1}^m \subseteq (\langle R_i\rangle_{i=1}^m)^*$. Soient donc, pour $i = 1,\ldots,m$, $\langle A_j^i\rangle_{j=1}^{n_i}$, $\langle B_j^i\rangle_{j=1}^{n_i}$, B_i et B tels que

$$\langle A_j^i\rangle_{j=1}^{n_i} \equiv \langle B_j^i\rangle_{j=1}^{n_i}\ R_i B_i \equiv B.$$

Le théorème d'isomorphisme de Keisler-Shelah ([1], théorème 6.1.15) implique qu'il existe un ultrafiltre D_1 tel que $\pi_{D_1} B_1 \cong \pi_{D_1} B_2$. Comme les R_i sont fermés pour les isomorphismes, on a donc

$$\langle \pi_{D_1} B_j^1\rangle_{j=1}^{n_1}\ R_1(\pi_{D_1} B_2) \quad \text{et} \quad \langle \pi_{D_1} B_j^2\rangle_{j=1}^{n_2}\ R_2(\pi_{D_2} B_2).$$

De même (si $m > 2$), puisque $B_3 \equiv B \equiv B_2 \equiv \pi_{D_2} B_2$, il doit exister un ultrafiltre D_2 tel que $\pi_{D_2} B_3 \cong \pi_{D_2}(\pi_{D_1} B_2)$, d'où on a

$$\langle\langle \pi_{D_2}(\pi_{D_1} B_j^1)\rangle_{j=1}^{n_1},\ \langle \pi_{D_2}(\pi_{D_1} B_j^2)\rangle_{j=1}^{n_2},\ \langle \pi_{D_2} B_j^3\rangle_{j=1}^{n_3}\rangle \langle R_1, R_2, R_3\rangle(\pi_{D_2} B_3).$$

En continuant de cette façon, on voit qu'il doit exister des C_j^i et un ultrafiltre D_{m-1} tels que

$$\langle\langle A_j^i\rangle_{j=1}^{n_i}\rangle_{i=1}^m \equiv \langle\langle C_j^i\rangle_{j=1}^{n_i}\rangle_{i=1}^m\ \langle R_i\rangle_{i=1}^m\ (\pi_{D_{m-1}} B_m).$$

Comme $\pi_{D_{m-1}} B_m \equiv B_m \equiv B$, on a le résultat cherché.

Remarquons qu'une bonne part des relations binaires donnant lieu à des théorèmes de préservation "classiques" admettent des Δ-interpolations fortes et sont fermées pour les ultraproduits (et donc en particulier pour les ultrapuissances). Ceci provient en partie du fait que le passage aux ultraproduits préserve les homomorphismes, les surjections et les plongements. Les inverses des relations "image homomorphe", "image endomorphe", "sandwiches", "rétractions", "sous-structures", "facteur direct" (voir [1], [3]) sont des exemples de telles relations. Comme exemple de relation $(n+1)$-aire avec $n > 1$ admettant une $\langle \Delta_i\rangle_{i=1}^n$-interpolation forte et fermée pour les ultrapuissances mais non construite à partir de relations binaires, mentionnons P_n définie par $\langle A_i\rangle_{i=1}^n\ P_n B$ ssi $B \cong A_1 \times \ldots \times A_n$. Ceci découle des observations de [4] à propos des travaux de [5].

Toutes ces relations peuvent donc être combinées entre elles pour produire des théorèmes d'interpolation et de préservation uniforme. Comme exemple d'application, on considère les relations R_1 et R_2 définies par AR_1B ssi B est sous-structure (sous-entendu: à un isomorphisme près) de A et AR_2B ssi B est image homomorphe de A (i.e. il existe un homomorphisme (au sens de [1]) surjectif de A dans B). On sait que R_1 et R_2 sont fermées pour les ultrapuissances et admettent respectivement des Δ_1- et Δ_2-interpolations fortes, où Δ_1 est l'ensemble des énoncés universels et Δ_2 celui des énoncés positifs. Si T est un ensemble d'énoncés, la classe Mod(T) des modèles de T est dite *fermée pour les factorisations* si tout homomorphisme entre modèles de T a son image dans Mod(T). Clairement cette condition est équivalente à l'implication:

$$[A_1, A_2 \models \mathrm{T} \text{ et } \langle A_1, A_2\rangle\langle R_1, R_2\rangle B] \Rightarrow B \models \mathrm{T}.$$

On obtient ainsi la partie finitaire du théorème 2.9 de [3] et le théorème de préservation de [2] (qui découle en fait du théorème de [3] dans $L_{\omega_1\omega}$):

COROLLAIRE. a) *Soient* φ_1, φ_2 *et* ψ *des énoncés. Les affirmations suivantes sont équivalentes:*

i) *Si* $A_1 \models \varphi_1$, $A_2 \models \varphi_2$ *et* B *est sous-structure de* A_1 *et image homomorphe de* A_2, *alors* $B \models \psi$.

ii) *Il existe un énoncé universel* σ_1 *et un énoncé positif* σ_2 *tels que* $\varphi_1 \models \sigma_1$, $\varphi_2 \models \sigma_2$ *et* $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \models \psi$.

b) *Soit* T *un ensemble d'énoncés. Alors* Mod(T) *est fermée pour les factorisations ssi* T *est équivalent à un ensemble d'énoncés universels et d'énoncés positifs.*

Pour combiner de l'autre manière les théorèmes de préservation (ou d'interpolation), les choses ne vont pas aussi aisément. Il ne semble pas y avoir de façon automatique, par exemple, de déduire le fait que "Mod(T) est fermée pour les sous-structures et les images homomorphes ssi T est équivalent à un ensemble d'énoncés universels-positifs" des théorèmes de préservation pour les sous-structures et les images homomorphes. Le prochain théorème établit une condition nécessaire et suffisante pour combiner les théorèmes d'interpolation ("forts" ou non); sa vérification n'est cependant pas, en général, aussi aisée que celle de fermeture pour les ultrapuissances du Théorème 1. On se limitera aux relations binaires.

5) Si $R_1,\ldots,R_n$ sont des relations binaires sur les structures, on définit $\bigcap_{i=1}^{n} R_i$ (resp. $\bigcup_{i=1}^{n} R_i$) par

$$A \bigcup_{i=1}^{n} R_i B \text{ ssi } AR_iB \text{ pour tout } i \in \{1,\ldots,n\}$$

$$(\text{resp. } A \bigcup_{i=1}^{n} R_i B \text{ ssi } AR_iB \text{ pour un } i \in \{1,\ldots,n\}).$$

Remarquons que $\bigcup_{i=1}^{n} R_i^* = (\bigcup_{i=1}^{n} R_i)^*$.

On définit de façon analogue $\bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_i$ et $\bigcap_{i=1}^{n} \Gamma_i$ pour des relations binaires Γ_i entre les énoncés.

On vérifie sans difficulté que $[\rightarrow \bigcup_{i=1}^{n}] = \bigcap_{i=1}^{n} [\rightarrow]$ et $\bigcup_{i=1}^{n} [\rightarrow] \subseteq [\rightarrow \bigcap_{i=1}^{n}]$. Si $\Delta_1,\ldots,\Delta_n$ sont des ensembles d'énoncés, on a l'inclusion $\operatorname{int} \bigcap_{i=1}^{n} \Delta_i \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{int} \Delta_i$, qui devient une égalité si et seulement si la condition suivante est réalisée:

(†) si $\sigma_i \in \Delta_i$ pour $i = 1,\ldots,n$, il existe $\sigma \in \bigcap_{i=1}^{n} \Delta_i$ tel que $\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n \models \sigma \models \sigma_1 \vee \ldots \vee \sigma_n$.

On peut également montrer que (†) $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} [\rightarrow \operatorname{int} \Delta_i] = [\rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{int} \Delta_i] = [\rightarrow \operatorname{int} \bigcap_{i\ 1}^{n} \Delta_i]$.

THÉORÈME 2. *Soient des relations binaires $R_1,\ldots,R_n$ sur les structures et $\Delta_1,\ldots,\Delta_n$ des ensembles d'énoncés tels que pour chaque $i \in \{1,\ldots,n\}$, R_i admet une Δ_i-interpolation. Alors $\bigcup_{i=1}^{n} R_i$ admet une $\bigcap_{i=1}^{n} \Delta_i$-interpolation ssi (†) est vérifiée. Si chaque Δ_i est fermé pour les conjonctions et les disjonctions, on a le même résultat pour les interpolations fortes.*

PREUVE. Par 5) et l'hypothèse, on a

$$\operatorname{int} \bigcap_{i=1}^{n} \Delta_i \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{int} \Delta_i = \bigcap_{i=1}^{n} [\to R_i] = [\to \bigcup_{i=1}^{n} R_i],$$

où $\subseteq$ est une égalité ssi (†) est vérifiée. Ceci montre la première partie.

La dernière affirmation découle de 5) et du fait que si Δ est fermé pour les conjonctions et les disjonctions, la Δ-interpolation forte implique la Δ-interpolation (voir 4)).

On a déjà vu qu'une Δ-interpolation forte induit une Δ-préservation uniforme si Δ est fermée pour les disjonctions, d'où la vérification de (†) suffit pour combiner des théorèmes de préservation provenant de théorèmes d'interpolation "forts".

Bibliographie

[1] CHANG, C.C., KEISLER, H.J., *Model theory*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics 73, North-Holland, 1977.

[2] HÉBERT, M., *Un théorème de préservation pour les factorisations*, C.R. Math. de l'Ac. Sc. Canada 6(1984), no 2, 39-42.

[3] MAKKAI, M., *On the model theory of denumerably long formulas with finite strings of quantifiers*, J. Symb. Logic 34(1969), 437-459.

[4] VOLGER, H., *A unifying approach to theorems on preservation and interpolation for binary relations between structures*, Arch. Mat. Logik 21(1981), 101-112.

[5] WEINSTEIN, J.M., *First-order properties preserved by direct product*, Dissertation, University of Wisconsin, 1965.

Département de mathématiques
Université de Zambie
B.P. 32379
Lusaka, Zambie

Manuscrit reçu le 25 janvier 1985.