

## UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE POUR DIVERSES CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES\*

Serge Dubuc

Le cadre de notre étude est l'équation fonctionnelle

$$x(t) = f(t, x(b(t))) \quad (1)$$

où  $t$  varie dans  $T$ ,  $x$  varie dans  $X$ ,  $f(t, x)$  est une fonction des deux variables  $t$  et  $x$  à valeurs dans  $X$  et  $b(t)$  est une transformation de  $T$ , la fonction inconnue est la fonction  $x(t)$  de  $T$  dans  $X$ . Cette équation a déjà été considérée dans la littérature mathématique. Ce que nous poursuivons est de présenter une multitude d'exemples où cette équation intervient très naturellement. C'est ainsi que nous rencontrerons la fonction de Weierstrass, les fonctions de Knopp, de van der Waerden et de Hildebrandt, les courbes de von Koch-Mandelbrot, le dragon de Harter-Heightway, une fonction non-dérivable de Sierpiński, la pyramide de von Koch et d'autres constructions encore. Dans plusieurs cas, il se produira que la fonction  $b$  ou la fonction  $f(t, x)$  seront discontinues. Lorsque ceci se produit, il est bon de connaître une condition suffisante pour que la solution  $x(t)$  soit malgré tout une fonction continue. Nous terminerons notre étude en faisant l'analyse numérique des constructions géométriques ainsi obtenues.

### 1. Considérations générales sur l'équation (1)

A notre connaissance, Read [12] a été la première personne à introduire l'équation (1) dans le contexte où  $T$  et  $X$  était le plan complexe,  $b$  et  $f$  étaient des fonctions analytiques; il cherchait une solution analytique à l'équation

(1). En 1957, Bajraktarevic [1] a élargi ce contexte en proposant l'étude de l'équation fonctionnelle

$$x(t) = f(t, x(b_1(t)), x(b_2(t)), \dots, x(b_r(t))) \quad (2)$$

où  $T$  et  $X$  sont des parties de deux espaces euclidiens,  $t$  varie dans  $T$ , les fonctions  $\{b_i\}_{i=1}^r$  sont des transformations de  $T$ , la fonction  $f$  est une application de  $T \times X^r$  dans  $X$ . Cette équation (2) a attiré l'attention de plusieurs mathématiciens depuis, Kwapisz [10] est l'un de ceux-ci et situe bien ses travaux par rapport aux autres.

Néanmoins, notre intérêt se limite au cas où  $r = 1$ , nous revenons à l'équation fonctionnelle (1). Reprenons l'essentiel de l'argumentation de Bajraktarevic et de Kwapisz.  $T$  est un ensemble arbitraire,  $t$  varie dans  $T$ ,  $b(t)$  est une transformation de  $T$ .  $X$  est un espace métrique complet dont la métrique sera notée par  $d$ .  $f(t, x)$  est une application de  $T \times X$  dans  $X$ . Définissons deux conditions pour  $f$ :

A) Il existe un point  $x_0$  de  $X$  tel que  $\{f(t, x_0) : t \in T\}$  est une partie bornée de  $X$ .

B) Il existe un nombre  $k < 1$  tel que pour tout  $t$  de  $T$  et pour tout couple de points de  $X$ ,  $x_1$  et  $x_2$ ,  $d(f(t, x_1), f(t, x_2)) \leq kd(x_1, x_2)$ .

**THÉORÈME 1.** *Lorsque les conditions A et B sont remplies, l'équation (1) admet une et une seule solution bornée. Si  $x_0(t)$  est une fonction bornée de  $T$  dans  $X$  et si  $x_n(t)$  est définie par récurrence:  $x_{n+1}(t) = f(t, x_n(b(t)))$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , alors la solution de (1) est la limite de la suite  $x_n(t)$  et la convergence est uniforme sur  $T$ .*

**DÉMONSTRATION.** Il suffit de faire appel au principe des contractions de Banach. Soit  $E$  l'espace métrique complet des fonctions bornées de  $T$  dans  $X$ , on a muni  $E$  de la métrique uniforme. On introduit la transformation  $K$ : si  $x(t) \in E$ , alors  $K[x(t)] = f(t, x(b(t)))$ . Les conditions A et B permettent de dire que  $K$  est bien définie et est une contraction.

Remarquons que si  $T$  est un espace topologique, si  $f$  et  $b$  sont des fonctions continues, la solution  $x(t)$  est une fonction continue. Indiquons une condition suffisante pour que la solution  $x(t)$  de (1) soit une fonction continue lorsque  $T$  est un espace topologique, et que l'une ou l'autre des fonctions  $b$  ou  $f$  ne sont pas continues.

C) Il existe une famille  $F$  de fonctions continues de  $T$  dans  $X$  telles que pour tout  $y(t)$  de  $F$ ,  $f(t, y(b(t)))$  appartient à la famille  $F$ .

## 2. La fonction de Weierstrass et ses héritières

La fonction de Weierstrass [16] est  $W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} k^n \cos(\omega^n t)$  où  $k \in ]0, 1[$  et  $\omega > 0$ . Cette fonction est la solution bornée de l'équation (1) où  $T$  et  $X$  est l'axe réel,  $b(t) = \omega t$  et  $f(t, x) = \cos t + kx$ . Hardy [6] a montré que si  $k\omega \geq 1$ , alors  $W(t)$  est une fonction dont la dérivée n'existe en aucun point  $t$  de l'axe réel. Weierstrass avait établi ce résultat lorsque  $\omega$  est un entier impair tel que  $k\omega$  dépassait  $1 + \frac{3}{2} \pi$ .

La fonction de Weierstrass est l'ainée de plusieurs autres fonctions analogues. C'est ainsi que Cellérier [2] a fait valoir que la fonction  $\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} \sin(a^n t)$  n'admet aucune dérivée finie si  $a$  est un entier pair suffisamment grand. La fonction  $C(t)$  de Cellérier est solution de l'équation (1) où  $T$  et  $X$  est l'axe réel,  $b(t) = at$  et  $f(t, x) = (\sin at + x)/a$ . De même, Knopp [9] a introduit la fonction  $\sum_{n=0}^{\infty} a^n \psi(b^n t)$  où  $\psi(t)$  est la distance de  $t$  au plus proche entier relatif. Knopp a établi que cette fonction est non-dérivable pour chaque valeur de  $t$  si  $0 < a < 1$ , si  $b$  est un entier pair et si  $ab > 4$ . Par la suite, van der Waerden [14] et Hildebrandt [7] ont démontré très simplement que la fonction de Knopp est non-dérivable dans les deux cas respectifs:  $a = 1/10$  et  $b = 10$ , puis  $a = 1/2$  et  $b = 2$ . La fonction de Knopp satisfait également l'équation (1). La Figure 1 représente le graphe de la fonction de Knopp-Hildebrandt. La Figure 2 combine la fonction de Weierstrass et celle de Cellérier: c'est le tracé de la courbe paramétrique  $(W(t), \sin(t) + C(t))$  où les paramètres des

fonctions sont  $k = 1/2$ ,  $\omega = 2$  et  $a = 2$ . Toujours selon Hardy, chaque composante n'admet pas de dérivée en chacun des points.

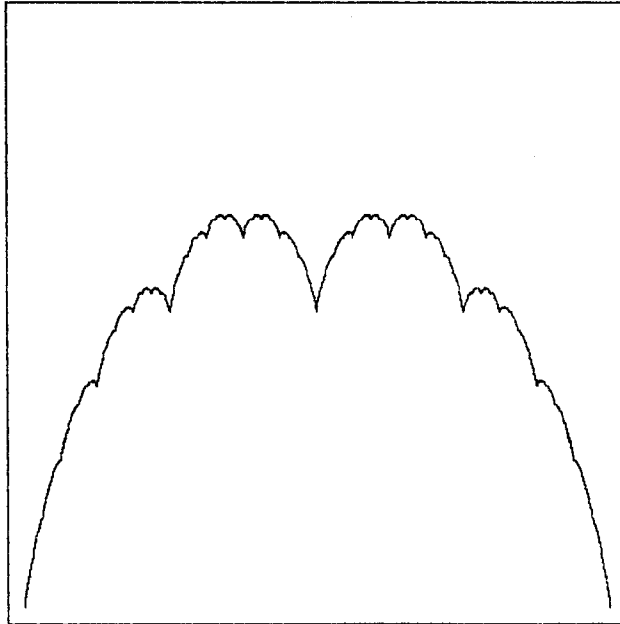


Figure 1. La fonction de Knopp-Hildebrandt

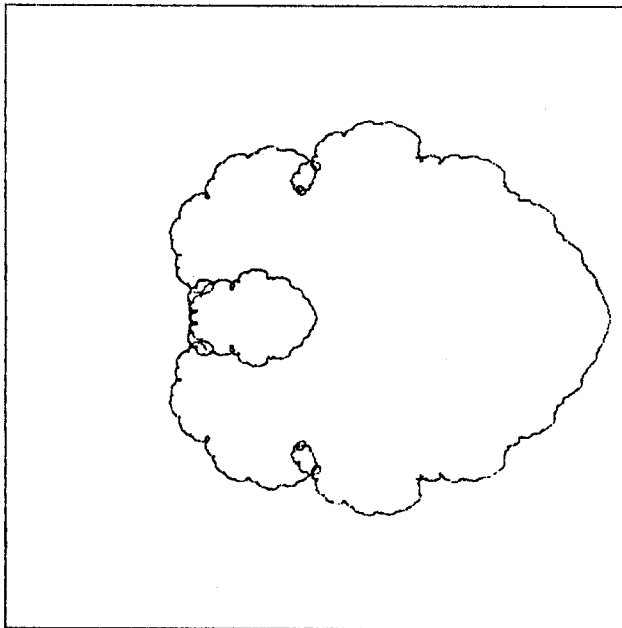


Figure 2. Courbe des fonctions de Weierstrass et de Cellérier

### 3. Courbes partiellement semblables à elles-mêmes

Nous proposons ici la construction d'une famille de courbes dont font partie les courbes de von Koch-Mandelbrot, le dragon de Harter-Heighway ainsi qu'une fonction due à Sierpinski. La propriété fondamentale de ces courbes est qu'elles se décomposent en arcs qui sont chacun des contractions de certaines parties spécifiques de la courbe totale, ces parties étant des réunions de ces mêmes arcs.

Soit  $T$  un complexe cellulaire fini de dimension un (voir par exemple la définition dans Godbillon [5]) sans point isolé,  $T$  est donc formé de  $p$  arcs compacts simples  $A_1, A_2, \dots, A_p$  où les seuls points communs à deux de ces arcs ne peuvent être que des extrémités d'arcs. Désignons par  $t_1, t_2, \dots, t_q$  les points de  $T$  qui sont les extrémités des arcs  $A_i$ . Pour chaque arc  $A_i$ , on se donne aussi une fonction continue  $b_i$  de  $A_i$  dans  $T$  telle que l'image des extrémités de l'arc  $A_i$  soit  $\{t_{\varphi(i)}, t_{\psi(i)}\}$ . Supposons de plus que  $X$  est un espace métrique complet connexe par arc, que  $x_1, x_2, \dots, x_q$  soient  $q$  points de  $X$  et qu'il existe des contractions  $S_i$  de  $X$  dans  $X$  telles que  $S_i(x_{\varphi(i)})$  et  $S_i(x_{\psi(i)})$  soient précisément  $x_j$  et  $x_k$  si  $t_j$  et  $t_k$  sont les extrémités de l'arc  $A_i$ .

**THÉORÈME 2.** *Dans le contexte qui vient d'être cité, il existe une et une seule fonction bornée de  $T$  dans  $X$  telle que pour tout entier  $i$  de  $[1, p]$  et pour tout point  $t$  de  $A_i$ ,  $x(t) = S_i(x(b_i(t)))$ . Cette fonction  $x(t)$  est nécessairement continue.*

**DÉMONSTRATION.** On introduit une transformation  $b$  de  $T$ : on choisit pour  $b(t)$  l'une des valeurs  $b_i(t)$  où  $i$  est un indice tel que  $t$  appartient à  $A_i$ ; simultanément on pose  $f(t, x) = S_i(x)$ . La solution bornée  $x(t)$  à l'équation (1) sera continue: il suffit de faire appel aux conditions A), B) et C) de la section 1. Pour vérifier la condition C), on considère la famille  $F$  des arcs continus  $y: T \rightarrow X$  tels que  $y(t_i) = x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ . Si  $y(t)$  appartient à  $F$ , alors  $f(t, y(b(t)))$  appartient aussi à  $F$ .  $x(t)$  est la fonction recherchée.

#### 4. Courbes de von Koch-Mandelbrot

Mandelbrot [11] a suggéré de construire des courbes fractales du plan par une propriété d'autosimilarité. Une telle courbe est formée de  $p$  arcs semblables à la courbe elle-même. Le Théorème 2 est adapté à la génération de ces courbes.

Soient  $x_1, x_2, \dots, x_{p+1}$ ,  $p+1$  points du plan,  $T$  est  $[0, p]$ , les arcs  $A_i$  sont  $[i, i+1]$ , la fonction  $b_i$  est la fonction linéaire qui envoie  $A_i$  sur  $T$ , d'où  $\varphi(i) = 0$  et  $\psi(i) = p$  et la  $i^{\text{ième}}$  contraction du plan  $X$  est la similitude  $S_i$  du plan qui envoie le segment  $x_1, x_{p+1}$  sur le segment  $x_i, x_{i+1}$ . Avec ces spécifications, l'arc continu obtenu du Théorème 2 est la courbe de von Koch-Mandelbrot.

La courbe de von Koch [15] est obtenue en prenant  $p = 4$  :

$$x_1 = (0, 0), \quad x_2 = \left(\frac{1}{3}, 0\right), \quad x_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{3^{\frac{1}{2}}}{6}\right), \quad x_4 = \left(\frac{2}{3}, 0\right) \quad \text{et} \quad x_5 = (1, 0).$$

Cette courbe plane est une courbe simple sans tangente. Kahane [8] a proposé de construire une courbe sans tangente à partir d'une ligne polygonale  $x_i$  dont les  $p$  segments sont de même longueur égale à  $r$ ,  $r < 1$ ; la courbe ainsi construite est lipschitzienne d'ordre  $-\log r / \log p$ .

#### 5. Le dragon de Harter-Heighway

Heighway a imaginé la courbe du dragon et avec Harter et Banks, il a analysé cette courbe spéciale. Dans sa chronique mensuelle du Scientific American, Martin Gardner [4] résume très bien les découvertes de ces physiciens. Heighway a proposé la construction suivante dite du pliage de papier. La procédure est récursive,  $H_n(t)$  pour  $t$  compris entre 0 et 1 sera une ligne polygonale de  $2^n$  segments du plan.  $H_0(t) = (t, 0)$ , il s'agit du segment unité de l'axe des abscisses. La ligne polygonale d'ordre  $n+1$  s'obtient en deux parties. La première partie est obtenue par une similitude de la ligne polygonale d'ordre  $n$  dont les extrémités  $(0, 0)$  et  $(1, 0)$  sont envoyées respectivement sur  $(0, 0)$  et  $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ ; la deuxième partie est une rotation de 90 degrés dans le sens négatif autour du point  $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$  de la première partie précédemment construite. Si

$S(x,y) = ((x+y)/2, (-x+y)/2)$  et  $R(x,y) = (y, -x)$ , la définition analytique de  $H_{n+1}(t)$  est:

$$S(H_n(2t)) \text{ si } t \in [0, \frac{1}{2}] \text{ et } (1,0) + RS(H_n(2(1-t))) \text{ sinon.}$$

$H_n(t)$  est la construction itérative rattachée à la solution  $H(t)$  de l'équation fonctionnelle (1) où  $T = [0,1]$ ,  $X$  est le plan euclidien,  $b(t) = 2t$  et  $f(t,x,y) = S(x,y)$  si  $t < \frac{1}{2}$ ,  $b(t) = 2(1-t)$  et  $f(t,x,y) = (1,0) + RS(x,y)$  pour les autres valeurs de  $t$ . La construction du dragon de Harter-Heighway s'obtient du Théorème 2 en prenant  $p = 2$ ,  $(x_1, y_1) = (0,0)$ ,  $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$  et  $(1,0)$ ,  $A_1 = [0, \frac{1}{2}]$  et  $A_2 = [\frac{1}{2}, 1]$ ,  $b_1 = b$ ,  $\varphi(1) = 0$ ,  $\psi(1) = 2$ ,  $\varphi(2) = 2$  et  $\psi(2) = 0$  et les deux contractions du plan  $X$  sont  $S$  et  $(1,0) + RS$ .

#### 6. La fonction non dérivable de Sierpiński

La fonction  $S(t)$  de Sierpiński est la solution bornée de l'équation (1) où  $T$  et  $X$  est l'axe réel,  $b(t) = 6t+1+(-1)^{[t]}/2$  et  $f(t,x) = (-1)^{[t]}/2+x/2$ . Sierpiński [13] a fait valoir que  $S(t)$  est continue et ne possède pour aucune valeur de  $t$  une dérivée, ni finie, ni infinie, de signe déterminé ou non déterminé.

Appliquons le Théorème 2 dans le contexte suivant.  $T = [0,2]$ , mais 0 et 2 sont identifiés.  $p = 4$ ,  $A_i = [(i-1)/2, i/2]$  pour  $i$  variant de 1 à 4. Les sommets  $t_i$  de  $T$  sont les nombres  $(i-1)/2$ . Si  $t$  appartient à l'intérieur de  $A_i$ ,  $b_i(t)$  est le double de la partie fractionnaire de  $3t+3/4$  ou de  $3t+1/4$  selon que  $i$  est inférieur à 3 ou non; on prolonge par continuité  $b_i$  aux extrémités de  $A_i$ . On observe que les nombres  $\varphi(i)$  sont respectivement 4, 2, 2, 4 alors que les nombres  $\psi(i)$  sont 2, 4, 4, 2.  $X = [-1,1]$ , la suite  $x_i$  est formée des quatre nombres suivants: 0, 1, 0, -1. La suite des contractions  $S_i$  est  $f(0,x)$  ou  $f(1,x)$  selon que  $i$  est inférieur à 3 ou non. Soit  $x(t)$  la solution bornée de l'équation (1) présentée dans le Théorème 2. Si l'on prolonge par périodicité sur l'axe réel selon la période 2 la fonction  $x(t)$ , on obtient précisément la fonction de Sierpiński, car son équation fonctionnelle est satisfaite. Nous venons d'établir que la fonction de Sierpiński est périodique de période 2 et

que sur chacun des intervalles  $A_i$ , elle est semblable à ce qu'elle est sur trois demi-périodes consécutives. La Figure 3 trace le graphe de  $S(t)$  sur la période  $[0,2]$ .

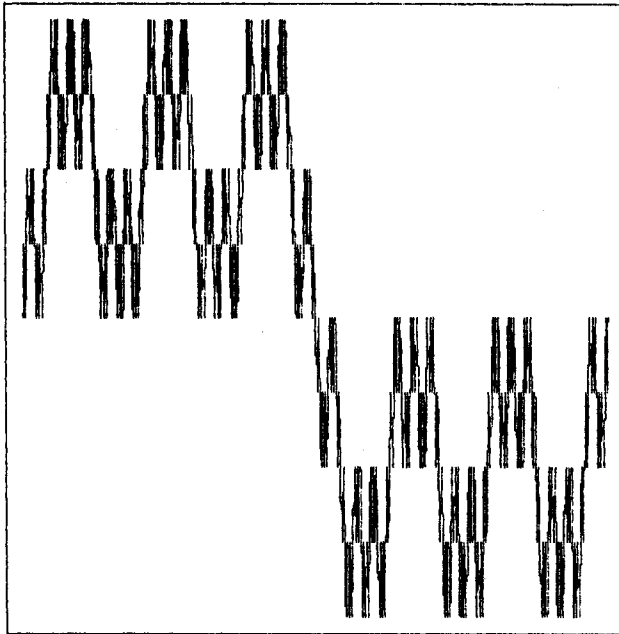


Figure 3. La fonction non dérivable de Sierpiński

#### 7. Courbes fermées partiellement semblables à elles-mêmes

On peut créer des courbes fermées partiellement semblables à elles-mêmes de diverses manières. Comme Mandelbrot [1] l'a fait, on peut d'abord juxtaposer des arcs semblables à eux-mêmes de telle sorte que l'extrémité et l'origine de deux arcs consécutifs coïncident alors que l'origine du premier arc est identique à l'extrémité du dernier arc. Une autre technique est fournie par le Théorème 2 à l'aide d'un espace paramétrique  $T$  homéomorphe au tore. Notre discussion de la fonction de Sierpinski s'est faite de cette manière. Illustrons de nouveau ce procédé en créant une classe de courbes dépendant de trois paramètres entiers  $p, q, r$ .

Soit  $p$  un entier supérieur ou égal à 4, l'espace paramétrique  $T$  est  $[0,1]$ , partagé en  $p$  intervalles  $A_i = [i/p, (i+1)/p]$ ,  $i$  varie de 0 à  $p-1$ , où



néanmoins les extrémités de  $T$ ,  $0$  et  $1$ , sont identifiées. Les fonctions  $b_i$  du Théorème 2 seront fournies par les deux paramètres  $q$  et  $r$ ;  $q$  est un entier compris entre  $0$  et  $p-1$  et  $r$  est un entier relatif dont le reste lors de la division par  $p$  diffère de  $0$ ,  $1$  et  $p-1$ . Si  $t$  appartient à  $A_i$ ,  $b_i(t)$  est la partie fractionnaire de  $i+q+r(t-i)$ . On choisit alors pour  $X$  le plan cartésien, les points  $P_i$  de  $X$  qui correspondent aux sommets de  $T$ ,  $\{i/p\}_{i=0}^{p-1}$ , seront les sommets du polygone régulier à  $p$  côtés:  $P_i = (\cos(2\pi i/p), \sin(2\pi i/p))$ . Si  $j/p = b_i(i/p)$  et  $k/p = b_i((i+1)/p)$ , la transformation  $S_i$  retenue sera la similitude qui envoie le segment  $[P_j, P_k]$  sur le segment  $[P_i, P_{i+1}]$ . Les restrictions données sur  $r$  assure que les similitudes sont des contractions. La courbe produite par le théorème à l'aide de ces spécifications sera une courbe fermée continue. La Figure 4 représente une de ces courbes. En choisissant  $p = 6$ ,  $q = 5$  et  $r = -3$ , on obtient un flocon de neige plus élaboré que celui de von Koch. Dans ce cas-ci, la similitude  $S_i$  est l'homothétie de rapport  $1/2$  dont le centre est le point de rencontre des prolongements des deux côtés de l'hexagone adjacents au côté  $(P_i, P_{i+1})$ .

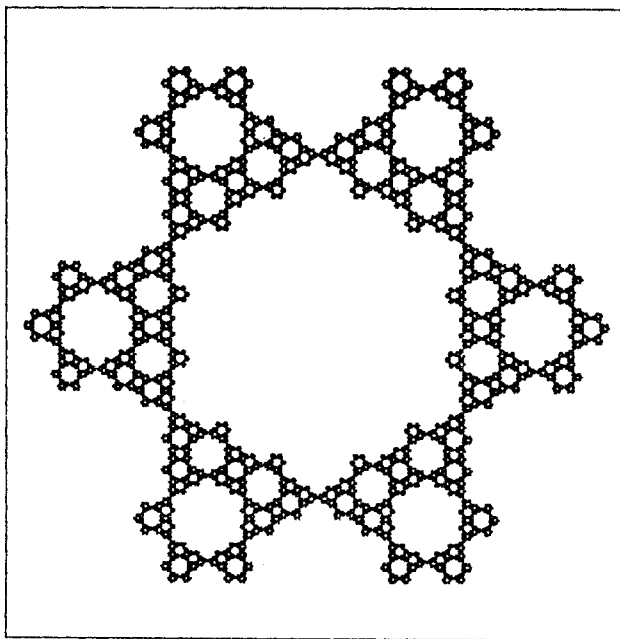


Figure 4. Un flocon de neige

### 8. La couronne flamboyante

Tous les exemples de solution à l'équation (1) que j'ai donnés jusqu'ici sont des courbes, c'est-à-dire que  $T$  est unidimensionnel. Donnons des exemples où  $T$  est bidimensionnel, les solutions à (1) sont des surfaces paramétriques. La première série d'exemples est presque évidente: on se sert de produit cartésien de courbes pour obtenir une surface. Soient deux équations fonctionnelles du type (1):  $X$  et  $Y$  sont deux espaces métriques complets,  $T$  et  $U$  sont deux espaces paramétriques,  $b$  et  $c$  sont des transformations respectives de  $T$  et de  $U$ ,  $f(t,x)$  et  $g(u,y)$  sont deux familles de contractions, si  $x(t)$  et  $y(u)$  sont les solutions bornées respectives des équations:  $x(t) = f(t,x(b(t)))$ ,  $y(u) = g(u,y(c(u)))$ . Si l'on pose  $V = TxU$ ,  $Z = XxY$ ,  $d(v) = d(t,u) = (b(t),c(u))$ ,  $h(v,z) = h(t,u,x,y) = (f(t,x),g(u,y))$ , la solution bornée à l'équation  $z(v) = h(v,z(d(v)))$  est évidente:  $z(v) = (x(t),y(u))$ .

En dépit de sa simplicité, cette construction peut provoquer des surfaces remarquables. Je cite l'exemple de la couronne flamboyante que j'ai décrite [1] au Luxembourg en 1981. On prend pour  $X$  la droite réelle,  $T$  est  $[0,1]$ ,  $b(t)$  est la partie fractionnaire de  $5t$  si ce n'est que  $b(1) = 1$ .  $f(t,x)$  est ainsi définie:

$$\begin{array}{ll} -x/4 & \text{si } 0 \leq t < 1/5 & -1/4 + x/2 & \text{si } 1/5 \leq t < 2/5 \\ 1/4 - x/4 & \text{si } 2/5 \leq t < 3/5 & x/2 & \text{si } 3/5 \leq t < 4/5 \\ 1/2 + x/2 & \text{si } 4/5 \leq t < 1 & 1 & \text{si } t = 1. \end{array}$$

Soit  $x(t)$  la solution à l'équation (1), si l'on pose  $y(u) = 1-x(1-u)$ , la surface  $(t,u) \rightarrow (x(t),y(u))$  est du type précédemment décrit:  $Y = X$ ,  $U = T$ ,  $c(t) = b(t)$  et  $g(t,x) = 1 - f(1-t,1-x)$ . Or la trace de la diagonale de cette surface est la courbe  $(x(t),y(t))$ . Cette courbe donne la couronne flamboyante dont une représentation graphique est jointe au texte.

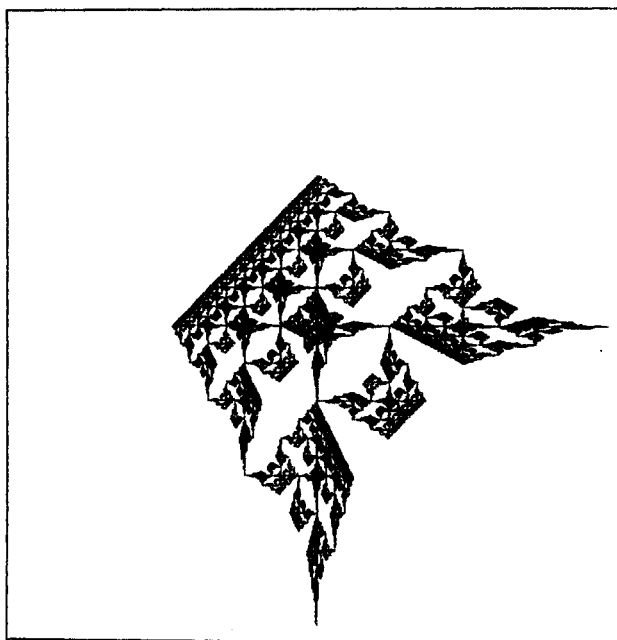


Figure 5. Couronne flamboyante

### 9. La pyramide de Koch

Une solution bidimensionnelle à l'équation (1) est la pyramide de Koch que Mandelbrot a décrite à la page 139 de [11]. Reprenons cette construction selon notre terminologie. Partons du tétraèdre de l'espace euclidien à trois dimensions dont les sommets  $P_0, P_1, P_2$  et  $P_3$  ont pour coordonnées cartésiennes:  $(0,0,0)$ ,  $(1,0,0)$ ,  $(0,1,0)$  et  $(0,0,1)$ .  $X$  sera l'enveloppe convexe des quatre sommets  $P_i$  et  $T$  sera la face de  $X$  opposée à  $P_0$ . Pour définir la transformation  $b$  de  $T$ , on subdivise  $T$  en six triangles: soient  $Q_1 = (0,1/2,1/2)$ ,  $Q_2 = (1/2,0,1/2)$ ,  $Q_3 = (1/2,1/2,0)$ ,  $B = (1/3,1/3,1/3)$ , les six triangles sont  $(P_1, Q_2, Q_3)$ ,  $(Q_1, P_2, Q_3)$ ,  $(Q_1, Q_2, P_3)$ ,  $(B, Q_2, Q_3)$ ,  $(Q_1, B, Q_3)$  et  $(Q_1, Q_2, B)$ . Puisque les six triangles forment un recouvrement de  $T$ , on peut choisir une partition de  $T$ ,  $\{U_i\}_{i=1}^6$ , telle que  $U_i$  est entièrement contenu dans le triangle de rang  $i$  parmi les six triangles donnés.  $b$  sur chacune des trois premières parties  $U_i$  est définie comme la restriction à  $U_i$  de l'homothétie de rapport deux et dont le centre est  $P_i$ . Sur  $U_4$ ,  $b$  est la restriction à  $U_4$  de la transformation affine qui

envoie  $B$  sur  $P_1$ ,  $Q_2$  sur  $P_2$  et  $Q_3$  sur  $P_3$  ; sur le cinquième et le sixième triangles, on définit  $b$  de façon symétrique. Pour définir les transformations  $f(t,x)$ , on se sert de six similitudes  $S_i$  de  $X$ . Les trois premières similitudes sont des homothéties de rapport  $1/2$  dont les centres sont respectivement  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$ . Les trois autres similitudes transforment  $X$  de telle sorte que  $P_0$  est envoyé sur  $(P_0+P_1)/2$ ,  $(P_0+P_2)/2$  et  $(P_0+P_3)/2$  respectivement alors que le triangle  $T$  est envoyé sur les triangles  $(P_0, Q_2, Q_3)$ ,  $(Q_1, P_0, Q_3)$  et  $(Q_1, Q_2, P_0)$  respectivement, le sommet  $P_j$  étant envoyé sur le sommet de rang  $j$  du triangle-image correspondant. Si  $t$  appartient à  $U_i$ , on pose  $f(t,x) = S_i(x)$ .

Soit  $x(t)$  une fonction continue de  $T$  dans  $X$  telle qu'en tout point  $u$  sur un des côtés de  $T$ ,  $x(u) = u$ , on vérifie que la fonction  $y(t) \rightarrow f(t, x(b(t)))$  est continue et admet la même propriété de laisser les points des côtés de  $T$  invariants. Les conditions A, B et C du Théorème 1 sont remplies. La solution bornée de l'équation (1) est continue et donne une paramétrisation de la pyramide de Koch. Il s'agit d'une surface simple sans plan tangent dont six parties sont semblables au tout.

#### 10. Deux nouvelles surfaces fractales

Pour illustrer une dernière fois l'équation fonctionnelle (1), je présente deux surfaces fractales qui proviennent de modifications de carrés de l'espace. Je décris le premier exemple. On construit une suite de surfaces  $\Sigma_n$ .  $\Sigma_0$  est un carré donné de l'espace. La construction  $\Sigma_n$  se fait par récurrence.  $\Sigma_n$  est formée d'une réunion de carrés. Pour obtenir  $\Sigma_{n+1}$ , on remplace chacun des carrés de  $\Sigma_n$  par d'autres carrés. Partant d'un carré de  $\Sigma_n$ , on subdivise ce carré en neuf carrés plus petits et l'on remplace le petit carré intérieur par cinq autres carrés, ce sont les autres faces d'un cube dont le petit carré intérieur est la base. Soyons maintenant plus explicite.  $T$  est le carré-unité du plan  $Oxy$  de l'espace  $R^3$ .  $X$  est précisément l'espace à trois dimensions. Introduisons treize similitudes  $S_i$  de  $X$ . Les huit premières similitudes sont des homothéties de rapport  $1/3$  par rapport aux centres suivants: d'abord les quatre sommets du

carré  $T$ , puis les quatre points milieux des côtés de  $T$ . Les cinq autres similitudes sont de rapport  $1/3$  et envoient le carré  $T$  sur l'une ou l'autre des cinq faces latérales ou supérieure du cube  $C : [1/3, 2/3] \times [1/3, 2/3] \times [0, 1/3]$ . On exige de ces similitudes que l'image du demi-espace  $\{z > 0\}$  par elles ne rencontre pas  $C$ . Ces similitudes ne sont pas uniquement déterminées.

Pour définir les transformations  $b(t)$  et  $f(t, x)$ , faisons appel à un homéomorphisme  $h(t)$  entre  $T$  et la réunion des treize carrés  $S_i(T)$ ,  $1 \leq i \leq 13$ . Soit  $\{U_i\}_{i=1}^{13}$  une partition de  $T$  telle que pour chaque valeur de  $i$ ,  $h(U_i)$  est contenu dans  $S_i(T)$ , on définit  $b$  sur  $U_i$  comme suit:  $b(t) = S_i^{-1}(h(t))$ . Si  $t$  appartient à  $U_i$ , on pose  $f(t, x) = S_i(x)$ . On vérifie que si  $x(t)$  est une fonction continue sur  $T$  à valeurs dans  $X$  telle que  $x(u) = u$  lorsque  $u$  est sur l'un des côtés de  $T$ , alors la fonction  $y(t) = f(t, x(b(t)))$  a les mêmes propriétés d'être continue et de laisser fixes les points situés sur les côtés du carré  $T$ . Si  $x_0(t) = t$ , si  $x_{n+1}(t) = f(t, x_n(b(t)))$ , alors  $x_n(t)$  est une suite de fonctions qui convergent uniformément vers la solution bornée de l'équation (1), solution qui sera continue. La Figure 6 présente la projection orthogonale sur le plan  $x + y = z$  des carrés visibles à l'étape 3 où 2 197 ( $13^3$ ) carrés sont présents.

La seconde surface dont je présente l'esquisse admet une construction analogue. J'indique l'origine géométrique de la construction qui procède comme tantôt par une suite de surfaces  $\Sigma_n$ .  $\Sigma_0$  est un carré donné de l'espace. La construction  $\Sigma_n$  se fait par récurrence.  $\Sigma_n$  est formée d'une réunion de carrés. Pour obtenir  $\Sigma_{n+1}$ , on remplace chacun des carrés de  $\Sigma_n$  par d'autres carrés. Partant d'un carré de  $\Sigma_n$ , on subdivise ce carré en neuf carrés plus petits et l'on remplace chacun des quatre petits carrés de coin par cinq autres carrés, ce sont les cinq autres faces d'un cube dont le petit carré de coin est la base. On produit une équation fonctionnelle comme tantôt à l'aide de 25 similitudes adéquatement choisies. On poursuit la même démarche jusqu'à la fin.

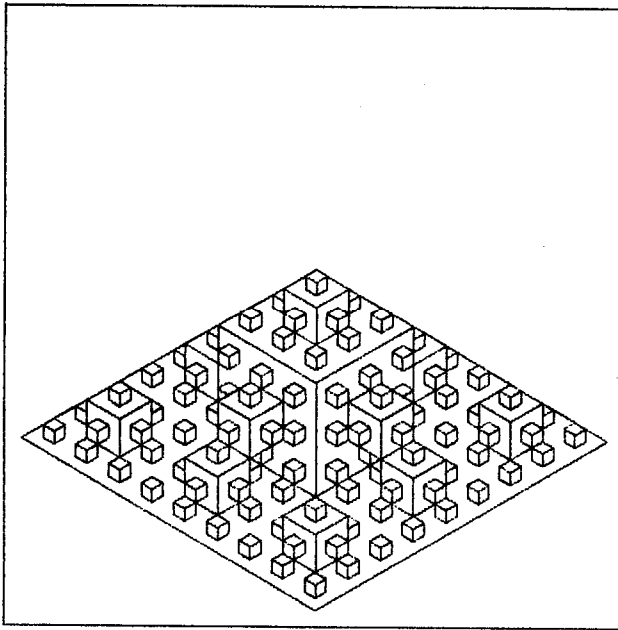


Figure 6. Projection d'une surface fractale en formation

### 11. Analyse numérique des graphiques produits

Les figures qui accompagnent ce texte illustrent les richesses cachées dans l'équation fonctionnelle (1). J'explique maintenant comment ces figures ont été préparées. Elles nous amènent à nous interroger sur le sens mathématique à accorder à une représentation graphique lors de l'usage d'imprimantes à points, comme c'est le cas ici. Chaque figure revient à observer un objet du plan cartésien à l'intérieur d'un carré. Quitte à entreprendre une homothétie sur l'objet, on peut se restreindre à discuter de l'observation d'un objet dans le carré-unité:

$[0,1] \times [0,1]$ . Donnons-nous maintenant deux entiers positifs  $m$  et  $n$ . Ces deux entiers permettent de discrétiser le carré selon  $mn$  points: ce sont les points  $(i/(m-1), j/(n-1))$  où  $i$  et  $j$  sont deux entiers, le premier peut varier de 0 jusqu'à  $m-1$ , le second de 0 à  $n-1$ . Les informaticiens parlent alors de pixels. Désignons cette collection de pixels par  $P(m,n)$ . Si  $C$  est une partie du carré-unité, une représentation graphique de  $C$  n'est rien d'autre qu'un choix

de pixels pour décrire  $C$ . Soit  $G$  le choix retenu, peut-on se donner une règle pour savoir si le choix  $G$  est acceptable ou non?

Si  $\epsilon$  est un nombre positif, nous dirons que  $G$  est acceptable au niveau  $\epsilon$  si la distance de Hausdorff de  $G$  à  $C$  ne dépasse pas  $\epsilon$ . Ceci veut dire que tout pixel de  $G$  est proche d'un point de  $C$  à  $\epsilon$  près et tout point de  $C$  est proche d'un pixel de  $G$  à  $\epsilon$  près. D'une manière générale, il est illusoire de choisir  $\epsilon$  trop petit lorsque  $m$  et  $n$  sont donnés. Indiquons une valeur  $\epsilon_0$  qui minorera tout choix ultérieur de  $\epsilon$ .  $\epsilon_0$  est le rayon du plus petit disque qui contient le rectangle  $[-a, a] \times [-b, b]$  où  $a = 1/(2(m-1))$  et  $b = 1/(2(n-1))$ . Il est facile d'établir le prochain lemme. Celui-ci indique deux représentations graphiques de  $C$  acceptables au niveau  $\epsilon_0$ .

LEMME 3. Si  $G$  est formé des pixels qui sont à une distance  $\epsilon_0$  ou moins de  $C$ , alors  $G$  est acceptable au niveau  $\epsilon_0$ . Si  $\phi$  est la projection suivante  $\phi$  du carré-unité sur  $P(m, n)$  :  $\phi(x, y) = (i/(m-1), j/(n-1))$ , alors que les entiers  $i$  et  $j$  sont les arrondies respectives de  $(m-1)x$  et de  $(n-1)y$ , alors  $\phi(C)$  est acceptable au niveau  $\epsilon_0$ .

Pour chacune des figures, nous cherchons un choix de pixels acceptable au niveau  $3\epsilon_0$ . L'imprimante disponible pouvait tracer 120 points au pouce à l'horizontale et 216 points au pouce à la verticale. Pour une figure de quatre pouces par quatre pouces, ceci donne  $m = 480$  et  $n = 864$ ; d'où  $\epsilon_0$  est à peu près égal à  $1/837$ .

### 11.1. Grappe de la fonction de Knopp-Hildebrandt

La fonction de Knopp-Hildebrandt est  $K(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi(2^n x)/2^n$  où  $\psi(t)$  est la distance de  $t$  au plus proche entier relatif. L'équation fonctionnelle associée est  $K(x) = \psi(x) + K(2x)/2$ . La Figure 1 est issue de la ligne polygonale de 1 024 segments déterminés par les 1 025 points consécutifs  $(x_j, y_j)_{j=0}^{1024}$  :  $x_j = j/1024$  et  $y_j = K(x_j)$ . Les nombres  $y_j$  se calculent par récurrence de la manière suivante:  $y_0 = y_{1024} = 0$  et  $y_j = j/1024 + y_{2j}/2$  si  $j \leq 513$  et

$= y_{1024-j}$  si  $j > 512$ . La fonction linéaire par morceaux qui interpole les points  $(x_j, y_j)$  est  $K_9(x) = \sum_{n=0}^9 \psi(2^n x)/2^n$ . L'écart entre  $K(x)$  et  $K_9(x)$  est inférieur à  $1/1024$ . La représentation graphique du graphe de  $K_9(x)$  sera acceptable au niveau  $\varepsilon_0 + 1/1024$ . Si  $G$  est la totalité des pixels associées à  $K_9(x)$  pour  $m = 480$  et  $n = 984$ , si  $h_i$  est le nombre de pixels de  $G$  dont la première composante est  $i/479$ , on peut se demander quelle est la distribution des nombres  $h_i$ . Le tableau suivant donne pour chaque valeur de  $k$ , le nombre  $N$  de  $i$  tels  $h_i$  est égal à  $k$ .

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
N	10	68	102	36	79	53	31	39	24	10	9	10	0	4	2	2	1

La valeur moyenne des hauteurs des colonnes de pixels est de 5,2 et l'écart-type est de 2,9. L'explication de ces données vient de la non-dérivabilité de  $K(x)$ .

### 11.2. Combinaison des fonctions de Weierstrass et de Cellérier

La Figure 2 trace la courbe  $X(t), Y(t)$  où  $X(t)$  est la fonction de Weierstrass  $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cos(2^n t)$  alors que  $Y(t)$  est celle de Cellérier avec un terme en plus:  $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \sin(2^n t)$ . Le couple  $X(t), Y(t)$  satisfait le système d'équations fonctionnelles:  $X(t) = \cos(t) + X(2t)/2$  et  $Y(t) = \sin(t) + Y(2t)/2$ .

Pour obtenir la représentation graphique de la courbe lorsque  $t$  varie de 0 à  $2$ , on partage l'intervalle  $[0, 2\pi]$  en  $2^{13} = 8192$  parties égales: soit  $t_k = 2\pi k/8192$ ,  $k = 0, 1, \dots, 8192$ . On pose  $x_k = X(t_k)$  et  $y_k = Y(t_k)$ ,  $c_k = \cos(t_k)$  et  $s_k = \sin(t_k)$ . (La seule connaissance de  $c_1$  et  $s_1$  permet le calcul des  $c_k$  et des  $s_k$  par les identités trigonométriques  $c_{k+1} = c_k c_1 - s_k s_1$  et  $s_{k+1} = c_k s_1 + c_1 s_k$ .) Les points  $x_k, y_k$  peuvent se calculer par récurrence:  $x_0, y_0 = x_{8192}, y_{8192} = 2, 0$ ;  $x_k = c_k + x_{2k}/2$  et  $y_k = s_k + y_{2k}/2$  si  $k \leq 4096$ .  $x_k = x_{8192-k}$  et  $y_k = -y_{8192-k}$  si  $k > 4096$ .



Démontrons que chaque point de la courbe  $X(t), Y(t)$  est suffisamment proche d'un des points  $x_k, y_k$ . Si  $t$  est une valeur comprise entre 0 et  $2\pi$ , on peut trouver un entier  $k$  tel  $|t - t_k| \leq \pi/8192$ . Or on peut vérifier que la distance euclidienne de  $X(t), Y(t)$  à  $x_k, y_k$  ne dépassera pas  $(13\pi+4)/8192$ . En effet, si  $X_{12}(t)$  et  $Y_{12}(t)$  sont respectivement les deux sommes partielles:

$X_{12}(t) = \sum_{n=0}^{12} 2^{-n} \cos(2^n t)$  et  $Y_{12}(t) = \sum_{n=0}^{12} 2^{-n} \sin(2^n t)$  alors la distance de  $X_{12}(t), Y_{12}(t)$  à  $X_{12}(t_k), Y_{12}(t_k)$  est au plus de  $12|t - t_k|$ , ( $|e^{iu} - e^{iv}| \leq |u - v|$ ). D'autre part, chacune des distances de  $X_{12}(t), Y_{12}(t)$  à  $X(t), Y(t)$ , de  $X_{12}(t_k), Y_{12}(t_k)$  à  $X(t_k), Y(t_k)$  ne dépasse pas  $1/4096$ .

Dans la Figure 2, la fenêtre d'observation pour  $X(t), Y(t)$  est le carré  $[-2, 2] \times [-2, 2]$ . Le choix de pixels pour représenter la courbe sont les points  $(i/479, j/863)$  où  $i$  et  $j$  sont les arrondies de  $479(2+x_k)/4$  et de  $863(2+y_k)/4$ . Ce choix sera acceptable au niveau  $\epsilon_0 + (13+4)/32768$ . Si l'on remarque que  $X_2(t), Y_2(t)$  donne une cardioïde, la courbe  $X(t), Y(t)$  est ce que l'on pourrait appeler une cardioïde non dérivable.

### 11.3. Tracé de la fonction de Sierpiński

Rappelons les propriétés essentielles de la fonction  $S(x)$  de Sierpiński. Pour tout  $x$ ,  $S(x+2) = S(x)$ .  $S(x) = 1/2 + S(6x+3)/2$  si  $0 \leq x < 1$  et  $S(x) = -1/2 + S(6x+1)/2$  si  $1 \leq x < 2$ .

Pour obtenir le graphe de la fonction de Sierpiński, il suffit de tracer la ligne polygonale  $(x_k, y_k)_{k=0}^{864}$  ( $864 = 4 \times 6^3$ ). Les abscisses  $x_k$  sont les nombres  $k/432$ . Les nombres  $y_k$  s'évaluent par récurrence:  $y_0 = 0$ ,  $y_{216} = 1$ ,  $y_{432} = 0$ ,  $y_{648} = -1$  et  $y_{864} = 0$ .

$$\begin{aligned} y_k &= 1/2 + y_j/2 \text{ si } k < 432 \text{ et si } j = 6k - 216 \text{ modulo } 864, \\ &= -1/2 + y_j/2 \text{ si } k > 432 \text{ et si } j = 6k + 216 \text{ modulo } 864. \end{aligned}$$

Majorons maintenant la distance de Hausdorff entre le graphe de la fonction de Sierpiński et le graphe de la ligne polygonale  $(x_k, y_k)$ . Si  $x$  est une

valeur comprise entre 0 et 2, soit  $k$  un entier tel que  $x_{k-1} \leq x < x_k$ , une des propriétés de la fonction de Sierpiński est que  $S(x)$  prend une valeur intermédiaire entre  $y_{k-1}$  et  $y_k$ . Ceci assure que la distance du point  $x, S(x)$  à la ligne polygonale ne peut pas dépasser  $1/432$ . D'autre part, si  $(x, y)$  est un point sur la ligne polygonale et si  $x_{k-1} \leq x < x_k$ , alors  $y$  est compris entre  $y_{k-1}$  et  $y_k$ . La continuité de la fonction de Sierpiński permet d'affirmer l'existence d'une valeur  $u$  dans  $x_{k-1}, x_k$  tel que  $S(u) = y$ . La distance du point  $x, y$  au graphe de la fonction  $S$  est aussi majorée par  $1/432$ .

Dans la Figure 3, la fenêtre pour observer le graphe de  $S$  est le carré  $[0, 2] \times [-1, 1]$ . Le choix des pixels de  $P_{m, n}$  par la ligne polygonale  $x_k, y_k$  ramenés dans le carré-unité est acceptable au niveau  $\varepsilon_0 + 1/864$ . Lors de la réalisation de la Figure 3, j'ai relevé la distribution des hauteurs des colonnes de pixels qui ont même abscisse. Toutes les hauteurs variaient entre 6 et 120, la hauteur moyenne des 480 colonnes était de 77,1.

#### 11.4. Tracé d'un flocon de neige

La Figure 4 donne la trace de la courbe paramétrique  $x(t), y(t)$  où  $x(t)$  et  $y(t)$  sont deux fonctions périodiques de période 6 qui satisfont les relations fonctionnelles suivantes: si  $k \leq t < k+1$ ,

$$x(t) = u_k + x(4k-1-3t)/2 \quad \text{et} \quad y(t) = v_k + y(4k-1-3t)/2 .$$

Les points  $\{u_k, v_k\}_{k=0}^5$  sont les points successifs d'un hexagone régulier centré à l'origine dont le premier point est  $(3/4, 3^{1/2}/4)$ . Les autres points  $u_k, v_k$  s'obtiennent par périodicité:  $u_{k+6} = u_k$  et  $v_{k+6} = v_k$ . Les points  $\{u_k, v_k\}$  ont été choisis pour que les points  $\{x(k), y(k)\}_{k=0}^5$  soient les sommets de l'hexagone régulier centré à l'origine dont le premier sommet est  $(1, 0)$ . Par récurrence sur  $n$ , on peut calculer en principe les  $6 \times 3^n$  points:  $x(kh), y(kh)$  où  $h = 3^{-n}$  et  $k = 0, 1, \dots, 6 \times 3^n - 1$ ; il suffit de se servir des relations fonctionnelles. La Figure 4 est le tracé de ces derniers  $6 \times 3^8 = 39\,366$  points.

Majorons maintenant la distance de Hausdorff entre la trace de la courbe  $x(t), y(t)$  et les points ainsi tracés. Soit  $b(t)$  la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  que l'on définit comme  $4k-1-3t$  si  $k \leq t < k+1$ , si  $x_0(t), y_0(t)$  est l'enroulement naturel de l'axe des  $t$  sur l'hexagone régulier unité et si l'on pose  $f(t, x) = u_k + x/2$  et  $g(t, y) = v_k + y/2$  lorsque  $k \leq t < k+1$ , la suite de fonctions  $x_{n+1}(t) = f(t, x_n(b(t)))$  et  $y_{n+1}(t) = g(t, y_n(b(t)))$  permet d'obtenir  $x(t), y(t)$  comme la limite uniforme de  $x_n(t), y_n(t)$ . Soit  $t$  une valeur réelle, pour un entier  $n$  donné, on peut poser  $h = 1/(6 \cdot 3^n)$  et trouver un entier  $k$  tel que  $|t - kh| \leq h/2$ . La distance de  $x_n(t), y_n(t)$  à  $x(kh), y(kh)$  ne dépasse pas  $2^{-n}/2$ . Par les inégalités propres au principe des contractions de Banach, la distance de  $x_n(t), y_n(t)$  à  $x(t), y(t)$  est majorée par  $k^n/(1-k)$  fois la distance uniforme de la fonction  $x_1(t), y_1(t)$  à la fonction  $x_0(t), y_0(t)$  où  $k$  est le paramètre de contraction. Ici  $k = 1/2$  et l'écart uniforme entre l'enroulement initial de l'enroulement suivant est majoré par  $1/2$ . D'où la distance entre  $x(t), y(t)$  et  $x(kh), y(kh)$  ne dépasse pas  $2^{-n} \times 3/2$ . La fenêtre de la Figure 4 est le carré  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ . Le choix des pixels de  $P_{m,n}$  par les points  $x(kh), y(kh)$  raménés dans le carré-unité est acceptable au niveau  $\varepsilon_0 + 3/2 \cdot 048$ .

### 11.5. Tracé de la couronne flamboyante

La couronne flamboyante (Figure 5) est la courbe paramétrique  $x(t), y(t)$  où  $x(t)$  satisfait l'équation  $x(t) = f(t, x(\{5t\}))$  alors que  $y(t) = 1 - x(1-t)$ .  $f(t, x)$  est ainsi définie:

$$\begin{array}{ll} -x/4 & \text{si } 0 \leq t < 1/5 & -1/4 + x/2 & \text{si } 1/5 \leq t < 2/5 \\ 1/4 - x/4 & \text{si } 2/5 \leq t < 3/5 & x/2 & \text{si } 3/5 \leq t < 4/5 \\ 1/2 + x/2 & \text{si } 4/5 \leq t < 1 & 1 & \text{si } t = 1. \end{array}$$

$f(t, x) = x_i + v_i x$  si  $i/5 \leq t < (i+1)/5$  où les nombres  $x_i$  sont  $0, -1/4, 1/4, 0, 1/2$  et les pentes  $v_i$  sont  $-1/4, 1/2, -1/4, 1/2$  et  $1/2$ . Soit  $x_0(t) = t$ , on pose par récurrence  $x_{n+1}(t) = f(t, x_n(\{5t\}))$ .  $x_n(t)$  est une fonction linéaire sur chacun des intervalles  $[i/5^n, (i+1)/5^n[$ ,  $i = 0, 1, \dots, 5^n - 1$ .

Désignons par  $x_{i,n}$  la suite double des points  $x_n(i/5_n)$ . On obtient les relations de récurrence sur cette suite double:

$$x_{i5^n+j, n+1} = x_i + v_i x_{j,n} \quad \text{pour } 0 \leq i < 5 \text{ et } 0 \leq j < 5^n .$$

Si l'on pose  $y_n(t) = 1 - x_n(1-t)$ , l'écart uniforme de  $x_n(t), y_n(t)$  à  $x(t), y(t)$  ne dépasse pas l'écart de  $x_1(t), y_1(t)$  à  $x_0(t), y_0(t)$  multiplié par  $2^{-n+1}$ . Or l'écart de  $x_1(t), y_1(t)$  à  $x_0(t), y_0(t)$  est  $3 \times 17^{1/2}/20 = 0,618$ . La ligne polygonale  $x_8(t), y_8(t)$  est donc voisine de  $x(t), y(t)$  à  $1/206$  près. Cette ligne formée de  $5^8 = 390\,625$  segments peut être tracée par les points consécutifs  $x_{i,8}, y_{i,8}$ , où  $y_{i,8} = 1 - x_{5^8-i,8}$ . La fenêtre de la Figure 5 est  $[-1,1] \times [0,2]$ . Le graphique construit est acceptable au niveau  $\varepsilon_0 + 1/824$ . Il est à remarquer que le nombre de pixels dans la Figure 5 est effectivement bien moindre que  $5^8$ . Dans une section ultérieure, nous décrirons une méthode plus économique pour le tracé de la couronne.

#### 11.6. Surface fractale en formation

La Figure 6 donne une représentation graphique de la surface  $\Sigma_3$  décrite dans la section 10. Cette surface est formée de  $13^3 = 2\,197$  carrés de côté  $1/27$ . La construction a commencé avec  $\Sigma_0$ , le carré-unité dans le plan  $z = 0$ . La Figure 6 donne la portion visible de  $\Sigma_3$  lors de sa projection orthogonale dans le plan Ouv. La normale au plan Ouv est le vecteur  $(-1,-1,1)$ . Le point  $(1,0)$  du plan Ouv correspond au point  $(a,-a,0)$  de l'espace où  $a = 1/2^{1/2}$ . Le point  $(0,1)$  du plan Ouv correspond au point  $(b,b,-2b)$  où  $b = 1/6^{1/2}$ . Le fenêtrage d'observation dans le plan Ouv est le carré  $[-a,a] \times [0,2a]$ . Le choix particulier de la direction de la projection facilite la détermination de la portion visible de  $\Sigma_3$  par le fait que la projection de chacun des carrés est la réunion de deux triangles contigus d'un réseau hexagonal dans le plan Ouv.

12. Résolution numérique de l'équation (1)

Je propose deux nouvelles idées pour déterminer numériquement la solution à l'équation fonctionnelle (1). La première idée consiste en l'accentuation et à la régularisation des contractions. Revenons donc à l'équation  $x(t) = f(t, x(b(t)))$ . Introduisons la suite des contractions  $f_n(t, x)$  définies par récurrence:  $f_1(t, x) = f(t, x)$  et  $f_{n+1}(t, x) = f(t, f_n(b(t), x))$ . Soit  $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$  une partition de l'espace  $T$ , si  $t$  appartient à  $P_k$ , on pose  $b^*(t) = b_k(t)$ , la  $k^{\text{ième}}$  itérée fonctionnelle de  $b$  et l'on pose  $f^*(t, x) = f_k(t, x)$ . Il est bien clair que  $x(t)$  est aussi solution de l'équation fonctionnelle

$$x(t) = f^*(t, x(b^*(t))) . \quad (1^*)$$

Soit  $\epsilon$  un nombre positif et  $t$  un point de  $T$ , désignons par  $N(t)$  le premier entier  $k$  tel le paramètre de contraction de  $f_k(t, x)$  comme transformation de  $X$  ne dépasse pas  $\epsilon$ . La fonction  $N(t)$  donne une partition de  $T$ :  $P_k = \{t: N(t) = k\}$ . Toutes les fonctions  $x \rightarrow f^*(t, x)$  sont des contractions dont le paramètre de contraction ne dépasse pas  $\epsilon$ .

La deuxième idée est elle-même très simple. On part d'une approximation  $x_0(t)$  de l'équation (1). On pose  $x_1(t) = f^*(t, x_0(b^*(t)))$  et  $x_2(t) = f^*(t, x_1(b^*(t)))$ .  $x_2(t)$  sera très souvent une excellente approximation de la solution de (1). En effet la distance de  $x_2(t)$  à cette solution sera majorée par la distance de  $x_1(t)$  à  $x_0(t)$  multipliée par  $\epsilon^2/(1-\epsilon)$ . L'avantage de cette méthode est aussi d'éviter des calculs intermédiaires.

Regardons brièvement l'effet de ces calculs dans le cas de la couronne flamboyante. La courbe de départ est  $x_0(t) = t$  et  $y_0(t) = t$ . On choisit  $\epsilon = 1/16$ . La courbe  $x_1(t), y_1(t)$  est alors une ligne polygonale de 305 segments. Soient  $\{x_i, y_i\}_{i=0}^{305}$  les 306 sommets de la ligne polygonale ainsi obtenue, on évalue à peu de frais la ligne polygonale  $x_2(t), y_2(t)$ . Les sommets respectifs de cette ligne, à l'exception du point  $(1,1)$ , seront les points:

$$(x_i + (x_{i+1} - x_i)x_j, y_i + (y_{i+1} - y_i)y_j) ,$$

où  $i = 0, 1, \dots, 304$  et  $j = 0, 1, \dots, 304$ . La couronne flamboyante ainsi tracée est formée de 93 026 points.

### 13. Conclusion

L'équation fonctionnelle traitée dans cet article résume très bien plusieurs constructions géométriques anciennes ou nouvelles. Celle-ci suggère une nouvelle approche pour réaliser diverses constructions géométriques. Plutôt que de faire des modifications locales où chacune des petites parties d'un objet est transformée en  $m$  parties plus élémentaires, on effectue des modifications globales où  $m$  transformations agissent sur des morceaux relativement gros de l'objet. La construction du dragon par pliage de papier est justement de cet ordre et peut être transposée pour tous les exemples cités. On aura remarqué que les courbes obtenues sont des courbes très souvent non dérivables. J'ai voulu attiré l'attention sur leur réalisation graphique. Ceci est un problème mathématique qui a son intérêt propre. Au terme de ce travail, je propose une première piste de recherche. Peut-on préciser et explorer la notion de fidélité d'une représentation graphique? La deuxième piste de recherche reviendrait à tirer parti de l'équation fonctionnelle pour créer davantage de surfaces. J'ai présenté quelques exemples, mais il y aurait lieu d'aller plus loin.

### BIBLIOGRAPHIE

- [ 1 ] BAJRAKTAREVIC, M., *Sur une équation fonctionnelle*, Glasnik Mat.-Fiz. I Astr. 12 (1957), 201-205.
- [ 2 ] CELLÉRIER, C., *Notes sur les principes fondamentaux de l'analyse*, Bull. des sc. math. (2), Vol. XIV, première partie (1890), 142-160.
- [ 3 ] DUBUC, S., *Une foire de courbes sans tangentes*, Actualités mathématiques, Actes VI<sup>ième</sup> Congrès mathématiciens d'expression latine, Gauthier-Villars, Paris (1982), 99-123.

- [ 4 ] GARDNER, M., *Mathematical games*, Scientific American 216 (1967), mars, 124-125, et avril, 118-120.
- [ 5 ] GODBILLON, C., *Eléments de topologie algébrique*, Hermann, Paris (1971).
- [ 6 ] HARDY, G.H., *Weierstrass's non-differentiable function*, Trans. Amer. Soc. 17 (1916), 301-325.
- [ 7 ] HILDEBRANDT, T.H., *A simple continuous function with a finite derivative at no point*, Amer. Math. Monthly 40 (1933), 547-548.
- [ 8 ] KAHANE, J.P., *Courbes étranges, ensembles minces*, Bull. A.P.M.E.P. 275/276 (1970), 325-339.
- [ 9 ] KNOPP, K., *Ein einfaches Verfahren zur Bildung stetiger nirgends differenzierbarer Funktionen*, Math. Zeitschrift 2 (1918), 1-26.
- [ 10 ] KWAPISZ, M., *On the existence and uniqueness of the solution of a non-linear functional equation of  $r$ -th order*, Ann. Polon. Math. 34 (1977), 35-38.
- [ 11 ] MANDELBROT, B.B., *The Fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman, San Francisco, 1982.
- [ 12 ] READ, A.H., *The solution of a functional equation*, Proc. Royal Society Edinburgh A 63 (1951-1952), 336-345.
- [ 13 ] SIERPINSKI, W., *Sur deux problèmes de la théorie des fonctions non dérivables*, Bull. Intern. Acad. Sci. Cracovie A (1914), 162-182.
- [ 14 ] van der WAERDEN, B.L., *Ein einfaches Beispiel einer nichtdifferenzierbaren stetigen Funktion*, Math. Zeitschrift 32 (1930), 474-475.
- [ 15 ] von KOCH, H., *Sur une courbe continue sans tangente obtenue par une construction géométrique élémentaire*, Arkiv för Matematik, Astronomie och Fysik 1 (1904), 681-704.

- [16] WEIERSTRASS, F., *Über continuirliche functionen eines reellen arguments die für keinen werth des letzteren einen bestimmter differentialquotienten besitzen*, *Mathematische Werke II*, (1872), 71-74.

*Département de mathématiques et de  
statistique  
Université de Montréal  
C.P. 6128  
Montréal, Qué.  
H3C 3J7*

---

\* Cet article a été publié grâce à une subvention du fonds F.C.A.C. du Québec pour l'aide et le soutien à la recherche.