

## SUR LE CHAOS MULTIPLICATIF

Jean-Pierre Kahane

Cet exposé développe et complète une conférence donnée le 26 février 1985 au Centre de recherches de mathématiques appliquées de l'Université de Montréal, et les "Zygmund lectures" données à l'Université de Chicago les 1<sup>er</sup>, 4 et 5 mars 1985.

1. Historique et introduction. Chaos additif et chaos multiplicatif .....	106
2. Notations, formules et problèmes .....	111
3. Théorèmes de comparaison et d'unicité .....	120
Théorèmes 1, 2 et 3 .....	120
4. Exemple et applications .....	127
Théorème 4 .....	128
5. Les théories $L^2$ et $L^{2m}$ .....	133
Théorème 5 .....	133
Théorème 6 .....	133
6. Application de la théorie $L^2$ à la non dégénérescence de $Q$ et aux propriétés de $S = Q\sigma$ . La probabilité de Peyrière .....	137
Théorème 7 .....	139
7. Cas de dégénérescence .....	144
Théorème 8 .....	144
Théorème 9 .....	148
Bibliographie .....	148

## SUR LE CHAOS MULTIPLICATIF

Jean-Pierre Kahane

### 1. Historique et introduction. Chaos additif et chaos multiplicatif

Les phénomènes chaotiques sont intervenus depuis longtemps en physique, avec la thermodynamique statistique d'une part, la turbulence d'autre part. C'est à la thermodynamique que se rattachent les travaux d'Einstein sur le mouvement brownien. La théorie du mouvement brownien - mouvement irrégulier de particules en suspension dans un liquide, sous l'influence des chocs moléculaires - donnait un accès à la mesure des masses des atomes, et donnait la première preuve expérimentale de leur existence. Cela a été, suite à la suggestion d'Einstein, le travail de Jean Perrin. Ce travail - qui devait valoir à Perrin le prix Nobel - se trouve magnifiquement exposé dans le livre Les atomes, dont la première édition (1913) suit de très peu la thèse de Perrin. Dans la préface de ce livre, Jean Perrin, partant de la thermodynamique, développe l'idée que la matière a une structure totalement discontinue (au sens où l'ensemble de Cantor est un ensemble totalement discontinu), ou tout au moins "infiniment granuleuse", "indéfiniment spongieuse", "indéfiniment différenciée", et il émet l'idée que les courbes continues sans tangente en aucun point inventées par les mathématiciens rendent bien compte de l'allure des trajectoires du mouvement brownien.

Les remarques de Jean Perrin ont été très souvent citées par Norbert Wiener. Elles contenaient un programme de travail auquel Wiener s'est attaché entre 1920 et 1933: donner un modèle du mouvement brownien, sous la forme d'une fonction

de deux variables,  $X(t, \omega)$ , où  $t$  représente le temps et  $\omega$  le hasard, rendant compte des propriétés du processus naturel (pour chaque  $t$ ,  $X(t, \omega)$  est une variable gaussienne, et les accroissements futurs sont indépendants du passé); prouver qu'il en existe des versions presque sûrement continues (c'est-à-dire que  $X(t, \omega)$  est fonction continue de  $t$  pour presque tout  $\omega$ ), et presque sûrement nulle part dérivables. La fin de ce programme (prouver que presque sûrement  $X(t, \omega)$  n'est dérivable en aucun point) a été réalisé grâce à une confluence entre l'oeuvre de Wiener et celle de Paley et Zygmund sur les séries de Fourier à coefficients aléatoires (1932) [18].

Au sens des distributions de L. Schwartz, la dérivée  $\frac{d}{dt} X(t, \omega)$  existe presque sûrement, et ce n'est pas une mesure. Cette distribution aléatoire, appliquée à une fonction  $f \in \mathcal{D}$  (classe de Schwartz), donne une variable aléatoire gaussienne centrée dont la variance est  $\int |f|^2$ . Appliquée à des fonctions à supports disjoints, elle donne des variables aléatoires indépendantes. Sa loi est invariante par translation. Cette distribution brownienne est essentiellement ce que N. Wiener appelle le chaos homogène pur sur la droite  $\mathbb{R}$ .

Dans sa théorie du chaos homogène (c'est-à-dire dont la loi est invariante par translation), Wiener considère, de manière très générale, un processus indexé par une famille de boréliens de  $\mathbb{R}^n$ . Le chaos brownien ("chaos pur" de Wiener) associé à tout borélien de mesure de Lebesgue  $m$  finie une variable gaussienne centrée dont la variance est  $m$ .

Généralement, le chaos brownien associé à un espace mesure  $(E, \mu)$  est un opérateur linéaire et isométrique de  $L^2(E, \mu)$  dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  de variables aléatoires gaussiennes centrées; c'est un processus gaussien généralisé, dont la corrélation n'est pas une fonction, mais une mesure portée par la diagonale de  $E \times E$ , à savoir l'image de la mesure  $\mu$  par l'application  $t \rightarrow (t, t)$ . C'est à partir de là que Wiener construit les chaos polynomiaux, qui prennent leurs valeurs dans des puissances tensorielles de  $\mathcal{H}$ , et qui permettent l'approximation de processus plus généraux. Dans la théorie du mouvement brownien sur la droite, il est

commode de partir du chaos brownien - au lieu de l'en dériver - ; c'est l'approche de Kakutani.

En ce qui concerne la turbulence, Wiener déclare, à la fin de son mémoire sur le chaos homogène, qu'une nouvelle avancée de la théorie est nécessaire ("the demands of chaos theory go considerably beyond the best knowledge of the present day") (1938) [22].

Il n'existe pas encore de modèle mathématique de la turbulence unique et universellement accepté, comme c'est le cas pour le mouvement brownien. Depuis un siècle (J. Boussinesq 1877, O. Reynolds 1883) il y a interaction constante entre l'observation (écoulements dans des tuyaux, fumées, turbulence atmosphérique), la création de modèles physiques (distinction des écoulements laminaires et turbulents, rôle des zones tourbillonnaires dans le transfert de l'énergie, échelles de turbulence, approche statistique - tout cela dû essentiellement, autour des années 1920, à l'école anglaise: G.L. Taylor, L.F. Richardson,...), et les modèles mathématiques, issus ou non des équations de Navier-Stokes. Ce foisonnement apparaît bien dans l'exposé de J. Kampé de Fériet sur la période 1920-1945 [8].

Autour de 1940, c'est l'école russe qui apporte les contributions mathématiques essentielles, en étudiant le champ des vitesses dans un écoulement turbulent comme un champ aléatoire (A.N. Kolmogorov, A. Obukhoff,...), et en déduisant d'hypothèses géométriques simples la distribution de l'énergie selon le spectre et au cours du temps [9], [10], [11], [17]. En 1961, Kolmogorov et Obukhoff reviennent sur le sujet en étudiant la distribution de la dissipation de l'énergie

$$\epsilon = \frac{\nu}{2} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left( \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial u_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} \right)^2$$

(où  $\nu$  est la viscosité,  $(u_1, u_2, u_3)$  les composantes de la vitesse). C'est une grandeur positive aléatoire, dont on étudie les moyennes  $\epsilon_r$  spatiales sur des petites boules de rayon  $r$ . Le modèle est donc une mesure aléatoire. Kolmogorov fait explicitement l'hypothèse de la normalité de  $\log \epsilon_r$  quand  $r$  est petit, et suppose aussi que la variance de  $\log \epsilon_r$  est  $O(\log 1/r)$  [12].

Ce modèle n'a pris forme qu'en 1971, avec l'exposé par B. Mandelbrot d'un modèle limite-log normal. En effet, l'hypothèse de log-normalité stricte est "intenable". B. Mandelbrot a l'idée de définir la mesure aléatoire  $\varepsilon$  comme limite d'une martingale. Il part d'un processus gaussien dont la densité spectrale est  $\mu/2k$  lorsque  $k \in [1/\lambda, 1/L]$ , et 0 ailleurs, prend son exponentielle normalisée pour que la valeur moyenne soit 1, et fait tendre  $\lambda$  vers 0. Selon la valeur du paramètre  $\mu$  ( $\mu < 6$  ou  $\mu > 6$ ) la mesure limite est non dégénérée, ou dégénérée [13]. Cette approche par les martingales et cette discussion, comme nous le verrons, sont parfaitement correctes, mais leur justification n'est pas évidente. L'intérêt du modèle n'est d'ailleurs pas limité à la turbulence.

Un modèle discontinu a été élaboré par B. Mandelbrot en 1974, puis étudié par J. Peyrière et moi-même [14], [19], [3], [15], [6]. Il s'agit de multiplications aléatoires itérées, sans hypothèse de log-normalité. Dans le cas log-normal, cela donne le premier exemple parfaitement défini de chaos multiplicatif dans le sens que nous développerons.

Venons-en donc au chaos multiplicatif. Le chaos brownien, que nous avons défini tout à l'heure, peut aussi s'appeler chaos additif: il apparaît comme limite quand on ajoute des mesures aléatoires indépendantes (par exemple, comme limite de  $\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \varepsilon_j \delta_{t_j}$ , quand  $(E, \mu)$  est un espace de probabilité, que les  $t_j$  sont distribués au hasard sur  $E$ , indépendamment les uns des autres, avec probabilité  $\mu$ , et que les  $\varepsilon_j$  sont  $+1$  ou  $-1$  avec même probabilité  $1/2$ , indépendants les uns des autres et indépendants des  $t_j$ ). Le chaos multiplicatif apparaît comme limite quand on multiplie des poids aléatoires indépendants. Ainsi - comme nous l'avons vu - le chaos additif opère sur des fonctions. Le chaos multiplicatif, lui, opère sur des mesures.

L'hypothèse de log-normalité de Kolmogorov doit s'interpréter ainsi: le chaos multiplicatif généralise les exponentielles de processus gaussiens. Il opère sur les mesures de Radon  $\sigma$  portées par un espace  $T$  localement compact et métrisable, et il les transforme en mesures aléatoires  $S$  portées par le support de  $\sigma$ ,

de telle sorte que pour chaque compact  $K$  la variable aléatoire  $S(K)$  prenne ses valeurs dans le cône fermé de  $L^1(\Omega)$  engendré par les variables aléatoires  $e^X$  ( $X \in \mathcal{H}$ ).

L'exemple de base est le poids aléatoire

$$P(t) = \exp(X(t) - \frac{1}{2}EX^2(t)),$$

où  $X(t)$  est un processus gaussien indexé par  $T$ , à valeurs dans  $\mathcal{H}$ , dont la corrélation est

$$p(t,s) = EX(t)X(s).$$

Il opère par multiplication sur  $\sigma$ ; ainsi  $S = P\sigma$ . La normalisation de  $P$  donne

$$ES(K) = \sigma(K)$$

la loi de l'opérateur  $P$  ne dépend que de la fonction de type positif  $p(t,s)$ .

Si on donne une suite de poids aléatoires indépendants  $P_n(t)$ , correspondant à des fonctions de type positif  $p_n(t,s)$ , on leur associe les produits

$$Q_n = P_1 P_2 \dots P_n.$$

Pour chaque  $\sigma$  et chaque  $K$ ,  $Q_n \sigma(K)$  est une martingale positive, dont on désigne la limite par  $Q\sigma(K)$ . On se demande si  $Q$  est dégénéré (c'est-à-dire  $Q\sigma = 0$  pour tout  $\sigma$ ) ou non. Si  $Q$  n'est pas dégénéré, c'est l'opérateur de chaos multiplicatif associé à la suite  $p_n(t,s)$ , et on se propose alors d'étudier ses propriétés.

Comme  $Q_n$  correspond à la fonction

$$q_n(t,s) = \sum_1^n p_j(t,s)$$

il est naturel d'associer à  $Q$  la fonction

$$q(t,s) = \sum_1^\infty p_j(t,s)$$

quand elle existe. Il en est ainsi quand les  $p_j(t,s)$  sont positives; nous dirons

alors que  $q(t,s)$  est de type  $\sigma$ -positif. On verra que, dans ces conditions, la loi de  $Q$  ne dépend que de  $q(t,s)$  (et non de la décomposition en somme infinie de fonctions positives de type positif).

Si  $E$  est  $\mathbb{R}^d$  euclidien, on peut choisir

$$q(t,s) = u \log^+ \frac{1}{|t-s|} + O(1)$$

où  $|\cdot|$  désigne la norme euclidienne, et  $u$  un nombre  $> 0$ . Les propriétés de  $Q$  dépendent alors du paramètre  $u$ . Nous verrons que  $Q$  est dégénéré quand  $u > 2d$ , et plus généralement que  $Q\sigma = 0$  si  $\frac{u}{2}$  dépasse la dimension du support de  $\sigma$ . Au contraire, tout compact dont la dimension est strictement supérieure à  $\frac{u}{2}$  porte des mesures  $\sigma$  telles que  $Q\sigma \neq 0$ , et nous serons en mesure d'étudier la régularité de  $Q\sigma$  quand on connaît celle de  $\sigma$ , la dimension des boréliens qui portent  $Q\sigma$  et l'existence de moments  $E(Q\sigma(K))^p$ .

Ce dernier exemple est convenable comme modèle de la turbulence isotrope. Dans le cas anisotrope, il faut d'autres distances que la distance euclidienne. Nous verrons comment traiter les distances dont le carré est une fonction de type négatif donnée.

## 2. Notations, formules et problèmes

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$  est un espace de probabilité sans atome.

$\mathcal{H}$  est un sous-espace fermé de l'espace réel  $L^2(\Omega)$ , de dimension infinie, constitué de v.a. gaussiennes réelles centrées,  $e^{\mathcal{H}}$  est l'ensemble des  $e^X$  ( $X \in \mathcal{H}$ ) et  $\Gamma(e^{\mathcal{H}})$  le cône qu'il engendre,  $\Gamma^p(e^{\mathcal{H}})$  est l'adhérence de ce cône dans  $L^p(\Omega)$  ( $1 \leq p < \infty$ ).

$T$  est un espace métrisable localement compact,  $M^+(T)$  est le cône des mesures de Radon positives portées par  $T$ .

$p(t,s)$  (et de même ensuite  $p_n(t,s)$ ) est un noyau réel de type positif, continu sur  $T \times T$ . C'est donc la corrélation d'un processus gaussien réel  $X(t, \omega)$ ,

qu'on notera aussi  $X(t)$ , à valeurs dans  $\mathcal{H}$  pour tout  $t \in T$ :

$$(1) \quad p(t,s) = E X(t)X(s).$$

On associe au processus  $X(t)$  le poids

$$(2) \quad P(t) = \exp(X(t) - \frac{1}{2}EX^2(t)) = \exp(X(t) - \frac{1}{2}p(t,t))$$

qui opère par multiplication sur les mesures  $\sigma \in M^+(T)$ . Comme la loi du processus  $X(t)$  ne dépend que de  $p(t,s)$ , il en est de même pour la loi de  $P(t)$ . Remarquons la normalisation

$$(3) \quad E P(t) = 1$$

pour tout  $t \in T$ . Voici quelques autres formules utiles.

Soit  $h > 0$ . On a

$$(4) \quad E(P(t))^h = \exp(\frac{1}{2}(h^2-h)p(t,t))$$

et, en prenant la dérivée pour  $h = 1$ ,

$$(5) \quad E(P(t) \log P(t)) = \frac{1}{2}p(t,t).$$

Soit maintenant  $t \in T$ ,  $s \in T$ . On a

$$(6) \quad E P(t)P(s) = \exp p(t,s).$$

Généralement, si  $t_j \in T$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , on a

$$(7) \quad E P(t_1)P(t_2)\dots P(t_n) = \exp \sum_{1 \leq j < k \leq n} p(t_j, t_k).$$

Etant donné  $\sigma \in M^+(T)$ , posons  $S = P\sigma$ . Pour tout compact  $K$  dans  $T$ , on a

$$(8) \quad E S(K) = \sigma(K)$$

$$(9) \quad E(S(K))^2 = \iint_K \exp p(t,s) d\sigma(t) d\sigma(s)$$

$$(10) \quad E(S(K))^n = \int \dots \int_{K^n} \exp \sum_{1 \leq j < k \leq n} p(t_j, t_k) d\sigma(t_1) \dots d\sigma(t_n).$$



Si  $p(t,s) = p_1(t,s) + p_2(t,s)$ , on peut décomposer  $\mathcal{H}$  en somme hilbertienne  $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$  telle que la projection  $X_j(t)$  de  $X(t)$  sur  $\mathcal{H}_j$  ait pour corrélation  $p_j(t,s)$ , et ainsi décomposer  $P(t)$  en un produit  $P_1(t)P_2(t)$  de facteurs indépendants. Ainsi  $P_j(t)$  est l'espérance conditionnelle de  $P(t)$  par rapport à la sous-tribu de  $A$  engendrée par les éléments de  $\mathcal{H}_j$  (en bref: par rapport à  $\mathcal{H}_j$ ).

Etant donné une suite  $p_n(t,s)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) on pose

$$(11) \quad q_n(t,s) = (p_1 + p_2 + \dots + p_n)(t,s)$$

et, si les  $p_n(t,s)$  sont des fonctions positives,

$$(12) \quad q(t,s) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t,s).$$

Dans ce cas, on dit que  $q(t,s)$  est un noyau de type  $\sigma$ -positif. On associe aux noyaux  $p_n(t,s)$  des processus  $X_n(t)$  indépendants, et on pose

$$(13) \quad Y_n(t) = (X_1 + \dots + X_n)(t)$$

$$(14) \quad Q_n(t) = (P_1 P_2 \dots P_n)(t).$$

Ainsi

$$(15) \quad E Y_n(t) Y_n(s) = q_n(t,s)$$

$$(16) \quad Q_n(t) = \exp(Y_n(t) - \frac{1}{2}q_n(t,t)).$$

Etant donné  $\sigma \in M^+(T)$ , posons  $S_n = Q_n \sigma$ . Pour tout compact  $K$  dans  $T$ , on a d'après (3)

$$(17) \quad E_{n-1} S_n(K) = S_{n-1}(K)$$

où  $E_{n-1}$  désigne l'espérance conditionnelle par rapport aux  $X_j(t)$  ( $j = 1, 2, \dots, n-1$ ;  $t \in T$ ). Donc  $S_n(K)$  est une martingale positive. Elle converge presque sûrement vers une v.a. positive que nous désignons par  $S(K)$ . On vérifie facilement que  $S(K)$  est l'intégrale sur  $K$  d'une mesure aléatoire  $S$ , et on pose  $S = Q\sigma$ .  $Q$  est un opérateur linéaire défini sur  $M^+(T)$ . S'il n'est pas dégénéré

(c'est-à-dire  $Q\sigma = 0$  pour tout  $\sigma$ ), c'est par définition l'opérateur de chaos multiplicatif associé à la suite  $P_n(t)$ . Sa loi est donnée par la distribution jointe des  $Q\sigma_k(K_k)$  ( $k = 1, 2, \dots, \ell$ ) pour toutes les suites finies de mesures  $\sigma_k$  et de compacts  $K_k$ . Elle ne dépend que de la suite des noyaux  $p_n(t, s)$ . La solution des quatre problèmes qui suivent ne dépend donc que de la suite  $p_n(t, s)$ , et de la mesure  $\sigma$ . On supposera toujours  $\sigma \neq 0$ , et  $K$  représentera un compact dans  $T$ .

PROBLÈME 1. D'après la loi du zéro-un, on a  $S = 0$  p.s. ou  $S \neq 0$  p.s. Dans le premier cas, on dit que  $Q$  est dégénéré en  $\sigma$ . A-t-on  $S = 0$  p.s. (dégénérescence) ou au contraire  $S \neq 0$  p.s. (non-dégénérescence)?

Remarquons que dans tous les cas on a

$$(18) \quad E S_n(K) = \sigma(K)$$

$$(19) \quad E S(K) \leq \sigma(K).$$

Posons  $\sigma_0(K) = E S(K)$  et  $\sigma_1(K) = \sigma(K) - \sigma_0(K)$ . On décompose ainsi  $\sigma$  en somme  $\sigma_0 + \sigma_1$  de deux mesures, telles que

$$(20) \quad E Q\sigma_0(K) = \sigma_0(K)$$

$$(21) \quad E Q\sigma_1(K) = 0$$

pour tout  $K$ . Dire que  $Q$  est non dégénéré en  $\sigma$ , c'est dire que  $\sigma_0 \neq 0$ .

PROBLÈME 2. Convenons de dire que  $Q$  est fortement non dégénéré en  $\sigma$  si  $E Q\sigma(K) = \sigma(K)$  pour tout compact  $K$ . D'après la remarque ci-dessus,  $Q$  est non dégénéré en  $\sigma$  si et seulement si  $Q$  est fortement non dégénéré en une  $\sigma_0 \leq \sigma$ ,  $\sigma_0 \neq 0$ . D'après la théorie de la convergence des martingales positives dans  $L^1(\Omega)$ , le problème de non-dégénérescence au sens fort peut se poser d'une des manières équivalentes qui suivent:

a) a-t-on, pour tout  $K$ ,  $E S(K) = \sigma(K)$ ?

b) a-t-on, pour tout  $K$ , convergence de  $S_n(K)$  vers  $S(K)$  dans  $L^1(\Omega)$  (donc dans  $\Gamma^1(e^{\mathcal{H}})$ )?

c) existe-t-il, pour tout  $K$ , une fonction positive  $f(x)$  définie sur  $\mathbb{R}^+$ , telle que  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-1} f(x) = \infty$ , et

$$(22) \quad E f(S_n(K)) = O(1) \quad (n \rightarrow \infty)?$$

PROBLÈME 3. Si une martingale positive converge dans  $L^1(\Omega)$ , elle converge aussi dans  $L^p(\Omega)$  si et seulement si sa limite appartient à  $L^p(\Omega)$  ( $p > 1$ ). Le problème des moments d'ordre  $p$  ( $p > 1$  donné) se pose donc sous les formes équivalentes que voici:

a) a-t-on non-dégénérescence forte de  $Q$  en  $\sigma$ , et, de plus,  $E(S(K))^p < \infty$  (c'est-à-dire  $S(K) \in \Gamma^p(e^{\mathcal{H}})$ ) pour tout  $K$ ?

b) a-t-on, pour tout  $K$ , convergence de  $S_n(K)$  vers  $S(K)$  dans  $L^p(\Omega)$  (donc dans  $\Gamma^p(e^{\mathcal{H}})$ )?

c) a-t-on, pour tout  $K$ ,

$$(23) \quad E(S_n(K))^p = O(1)?$$

PROBLÈME 4.  $S$  est limite de mesures  $S_n$  absolument continues par rapport à  $\sigma$ ; elle est donc portée par le support de  $\sigma$ , mais elle n'est pas, en général, absolument continue par rapport à  $\sigma$ . D'après la loi du zéro-un, la probabilité qu'il en soit ainsi est zéro ou un. Si  $S$  est p.s. singulière par rapport à  $\sigma$ , on peut étudier comment  $S$  est diffuse ou concentrée. Par exemple, quand  $T$  est muni d'une métrique, à quelles classes de Hölder appartient  $S$  (problème de la diffusion)? Quelle est la borne inférieure des dimensions des boréliens sur lesquels  $S$  est concentrée (problème de la concentration)? Nous ne répondrons au problème de la diffusion qu'à  $\epsilon$  près, c'est-à-dire en négligeant une partie de  $S$  arbitrairement petite.

Jusqu'à présent, nous avons associé la loi d'un chaos multiplicatif à une suite de noyaux de type positif  $p_n(t,s)$ . Considérons maintenant un noyau de type  $\sigma$ -positif  $q(t,s)$  comme en (12). Il admet une infinité de décompositions du type (12), et à chacune d'entre elles correspond une loi de chaos multiplicatif; il n'est pas évident - mais il est heureusement vrai - que cette loi ne dépend que du

noyau  $q(t,s)$ . Nous aurons donc à examiner le problème suivant.

PROBLÈME 5 (problème d'unicité). Etant donné une suite de noyaux positifs de type positif  $p_n(t,s)$ , est-il vrai que la loi du chaos multiplicatif associé ne dépend que de la somme des  $p_n(t,s)$ ?

La réponse, nous l'avons dit, est positive, et c'est le théorème principal de la théorie. Dès lors, on peut parler de la loi du chaos multiplicatif associé à un noyau de type  $\sigma$ -positif  $q(t,s)$ , et étudier comme elle dépend de ce noyau.

PROBLÈME 6 (problème de comparaison). Chacun des problèmes 1, 2, 3 admet une réponse "oui" ou "non" quand le noyau  $q$  et la mesure  $\sigma$  sont donnés. Comment cette réponse dépend-elle du couple  $(q,\sigma)$ ? Plus précisément, améliore-t-on la réponse si on diminue  $q$ ? si l'on contracte  $\sigma$ ? (la "contractée" d'une mesure étant, naturellement, l'image de cette mesure par une contraction de l'espace, supposé muni d'une métrique).

En particulier, on peut se borner à des couples de la forme  $(uq,\sigma)$ , où  $q$  et  $\sigma$  sont donnés, et  $u$  est un paramètre.

PROBLÈME 7 (dépendance du paramètre  $u$ ). Décider, autant que possible, des réponses aux problèmes 1 à 4 en fonction de  $u$ .

Lorsque  $T = \mathbb{R}^V$  euclidien, on peut choisir

$$(24) \quad q(t,s) = \log^+ \frac{1}{|t-s|} + O(1)$$

et aussi, si l'on veut,

$$(25) \quad q(t,s) = \log^+ \frac{1}{|t-s|} \text{ si } |t-s| < \frac{1}{2}$$

où  $|\cdot|$  représente la norme euclidienne. Une manière simple d'obtenir (24) est de choisir

$$(26) \quad q(t,s) = \frac{1}{2} \int_1^\infty e^{-y|t-s|^2} \frac{dy}{y};$$

n'importe quelle décomposition de l'intervalle d'intégration en intervalles  $[a_n, a_{n+1}]$  fournit une décomposition en somme de la forme (12). Pour obtenir (25), on remplace (26) par

$$(27) \quad q(t,s) = \int_1^\infty \varphi(y|t-s|) \frac{dy}{y}$$

où  $\varphi(|t|)$  est une fonction positive de type positif à support compact, convenablement normalisée.

Les formules (26) et (24) peuvent se généraliser hors du cadre euclidien.

Posons

$$(28) \quad \ell(x) = \int_1^\infty e^{-yx} \frac{dy}{y}.$$

On vérifie tout de suite que

$$(29) \quad 0 < \ell(x) \leq \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

$$(30) \quad \begin{aligned} \ell(x) - \log \frac{1}{x} &= \int_{\frac{1}{x}}^\infty e^{-yx} \frac{dy}{y} - \int_1^{\frac{1}{x}} (1 - e^{-yx}) \frac{dy}{y} \quad (0 < x < 1) \\ &= c + O(x) \quad (x \rightarrow 0) \end{aligned}$$

donc

$$(31) \quad \ell(x) = \log^+ \frac{1}{x} + O(1).$$

Soit maintenant  $\psi(t,s)$  un noyau de type positif sur  $T$ , c'est-à-dire une fonction continue sur  $T^2$ , positive, nulle sur la diagonale, et vérifiant de plus l'une des conditions équivalentes suivantes:

- a)  $e^{-y} \psi(t,s)$  est un noyau de type positif pour tout  $y > 0$
- b) il existe une application continue  $\theta$  de  $T$  dans un espace de Hilbert telle que  $\psi(t,s) = \|\theta(t) - \theta(s)\|^2$  (carré de la norme hilbertienne)
- c) quels que soient les scalaires  $c_1, \dots, c_k$  de somme nulle et les points de  $T$ ,  $t_1, \dots, t_k, s_1, \dots, s_k$ , on a

$$(32) \quad \sum c_i \bar{c}_j \psi(t_i, s_j) \leq 0$$

(la théorie de ces noyaux est essentiellement due à I. Schoenberg [21]; leur rôle en probabilités a été dégagé par Khintchin et par Paul Lévy; leur rôle en analyse, et le qualificatif "défini négatif", par A. Beurling). Posons

$$(33) \quad \psi(t,s) = \|\theta(t) - \theta(s)\|^2 = (d(t,s))^2$$

et

$$(34) \quad q(t,s) = \frac{1}{2} \mathcal{L}(\psi(t,s)).$$

D'après a),  $q(t,s)$  est un noyau de type  $\sigma$ -positif, et d'après (31) et (33) on a

$$(35) \quad q(t,s) = \log^+ \frac{1}{d(t,s)} + O(1).$$

Le cas (26) correspond à

$$(36) \quad \psi(t,s) = |t-s|^2 = \sum_1^v |t_j - s_j|^2$$

où  $t_j$  est la  $j^{\text{ième}}$  coordonnée de  $t$ . Toujours avec  $T = \mathbb{R}^v$ , on peut aussi choisir

$$(37) \quad \psi(t,s) = \sum_1^v |t_j - s_j|^{\alpha_j}$$

où  $0 < \alpha_j \leq 2$ ; c'est une conséquence du fait que  $|t-s|^\alpha$  est un noyau de type négatif sur  $\mathbb{R}$  ( $(t,s) \in \mathbb{R}^2$ ) quand  $0 < \alpha \leq 2$ .

Bornons-nous désormais au cas où  $\psi$  est strictement positive hors de la diagonale de  $T \times T$ . Alors  $(T,d)$  est un espace métrique localement compact. On peut définir la dimension de Hausdorff d'une partie de  $T$ , et aussi la dimension capacitaire des compacts de  $T$ . Rappelons rapidement les définitions. La dimension de Hausdorff d'une partie  $E$  de  $T$  est la borne inférieure des  $\alpha > 0$  tels que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un recouvrement de  $E$  par des boules  $B_j$  telles que

$$(38) \quad \sum (\text{diam } B_j)^\alpha < \varepsilon$$

(cette condition exprime que la mesure de  $E$  en dimension  $\alpha$ ,  $\text{mes}_\alpha E$ , est nulle).

La dimension capacitaire d'un compact  $K$  dans  $T$  est la borne supérieure des  $\alpha > 0$  tels que  $K$  porte une mesure de probabilité  $\sigma$  d'énergie finie par rapport au noyau  $(d(t,s))^{-\alpha}$ , c'est-à-dire

$$(39) \quad I_{\alpha}(\sigma) = \iint \frac{d\sigma(t)d\sigma(s)}{(d(t,s))^{\alpha}} < \infty.$$

O. Frostman a montré l'égalité de ces deux dimensions lorsque  $d(t,s)$  est la dimension euclidienne. Il en est de même quand  $(T,d)$  est un espace de type homogène au sens de Coifman et Weiss [2], et il serait intéressant d'avoir une condition nécessaire et suffisante sur  $(T,d)$  pour l'égalité de la dimension de Hausdorff et de la dimension capacitaire. Pour alléger, nous parlerons de "la" dimension, quitte à spécifier ultérieurement dans les énoncés.

PROBLÈME 8. On suppose que  $(T,d)$  est un espace métrique localement compact tel que  $d^2(t,s)$  soit un noyau de type négatif, et on choisit  $q(t,s)$  de façon à avoir (35). Le problème 4 se pose pour le chaos multiplicatif associé à  $uq(t,s)$  ( $u > 0$ ). Discuter la réponse suivant les valeurs de  $u$ .

Observons que la condition d'énergie finie (39) est assez voisine de la condition de HÖLDER

$$(40) \quad \sigma(B) \leq C(\text{diam } B)^{\alpha}$$

où  $B$  désigne une boule quelconque, et  $C$  une constante indépendante de  $B$ . En effet, (39) implique que le potentiel

$$(41) \quad P(t) = \int \frac{d\sigma(s)}{(d(t,s))^{\alpha}}$$

est borné sur un compact  $K$  qui porte la mesure  $\sigma$  à  $\epsilon$  près ( $\sigma(T \setminus K) < \epsilon$ ), donc la mesure  $\sigma_K = 1_K \sigma$  vérifie (40). Inversement, si (40) a lieu, le potentiel d'ordre  $\alpha - \epsilon$  de  $\sigma$  est uniformément borné, donc  $I_{\alpha - \epsilon}(\sigma)$  est finie. Il sera commode de désigner par  $M_{\alpha+}^+(T)$  l'ensemble des mesures  $\sigma \in M^+(T)$  vérifiant la condition suivante: pour tout  $\epsilon > 0$  il existe un  $\delta > 0$ , un  $C > 0$  et un compact  $K$  tels que la mesure  $\sigma_K = 1_K \sigma$  vérifie

$$(42) \quad \sigma_K(T) = \sigma(K) > \sigma(T) - \varepsilon$$

$$(43) \quad \sigma_K(B) \leq C(\text{diam } B)^{\alpha+\delta}$$

pour toute boule  $B$  de  $(T, d)$ . Ainsi, dire que la dimension capacitaire d'un compact est strictement supérieure à  $\alpha$ , c'est dire qu'il porte une mesure non nulle de la classe  $M_{\alpha+}^+(T)$ .

### 3. Théorèmes de comparaison et d'unicité

Le premier but de ce chapitre est de répondre au problème 5 (problème d'unicité).

THÉORÈME 1. *Etant donné une suite de noyaux positifs de type positif  $p_n(t, s)$ , la loi du chaos multiplicatif associé ne dépend que de la somme  $q(t, s) = \sum p_n(t, s)$ .*

La preuve repose sur des lemmes de comparaison qui permettent aussi de répondre au problème 6 (problème de comparaison), de la manière que voici).

THÉORÈME 2. *En convenant que la réponse "oui" est meilleure que la réponse "non", on ne peut qu'améliorer la réponse à chacun des problèmes 1, 2, 3, quand on change  $q(t, s)$  en un noyau plus petit.*

THÉORÈME 3. *Supposons  $(T, d)$  métrique, et  $q(t, s)$  fonction décroissante de  $d(t, s)$ . On ne peut alors qu'empirer la réponse à chacun des problèmes 1, 2, 3, quand on change  $\sigma$  en une mesure contractée.*

Voici le lemme principal.

LEMME 1. *Soit  $p_0(t, s)$  et  $p_1(t, s)$  deux noyaux de type positif, tels que  $p_0(t, s) \leq p_1(t, s)$ , et soit  $P_0(t)$  et  $P_1(t)$  les poids aléatoires associés (voir formules (1) et (2)). Soit enfin  $f$  une fonction convexe sur  $\mathbb{R}^+$ . Alors*

$$(44) \quad E f \int P_0 \sigma \leq E f \int P_1 \sigma$$



(lorsqu'aucune confusion n'est possible, nous supprimons les parenthèses).

PREUVE. On associe à  $p_0(t,s)$  et  $p_1(t,s)$  les processus gaussiens  $X_0(t)$  et  $X_1(t)$  (voir formule (1)); en vue du résultat, on peut les supposer indépendants, et poser

$$(45) \quad X_\lambda(t) = \sqrt{1-\lambda} X_0(t) + \sqrt{\lambda} X_1(t) \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

$$(46) \quad \begin{aligned} P_\lambda(t) &= \exp(X_\lambda(t) - \frac{1}{2} E X_\lambda^2(t)) \\ &= \exp(X_\lambda(t) - \frac{1}{2} ((1-\lambda)p_0(t,t) + \lambda p_1(t,t))) \end{aligned}$$

$$(47) \quad h(\lambda) = E f \int P_\lambda \sigma.$$

Il suffit de montrer que  $h(\lambda)$  est une fonction croissante. Or

$$(48) \quad h'(\lambda) = E \int P'_\lambda \sigma f' \int P_\lambda \sigma$$

en écrivant  $P'_\lambda = \frac{\partial}{\partial \lambda} P_\lambda$  c'est-à-dire

$$(49) \quad P'_\lambda(t) = \frac{1}{2} \left[ \frac{-X_0(t)}{\sqrt{1-\lambda}} + \frac{X_1(t)}{\sqrt{\lambda}} + p_0(t,t) - p_1(t,t) \right] P_\lambda(t).$$

Il suffit de montrer que, pour tout  $t$ ,

$$(50) \quad E P'_\lambda(t) f' \int P_\lambda \sigma \geq 0.$$

Fixons  $t$  et posons

$$(51) \quad \begin{aligned} U &= \frac{-X_0(t)}{\sqrt{1-\lambda}} + \frac{X_1(t)}{\sqrt{\lambda}} \\ EU^2 &= \tau^2. \end{aligned}$$

On a

$$(52) \quad EU X_\lambda(s) = -p_0(t,s) + p_1(t,s) \geq 0$$

donc

$$(53) \quad X_\lambda(s) = \alpha(s)U + V_\lambda(s)$$

avec  $\alpha(s) \geq 0$  et  $V_\lambda(s)$  orthogonal à  $U$ . En conséquence

$$(54) \quad P_\lambda(s) = \exp(\alpha(s)U - \frac{1}{2}\alpha^2(s)\tau^2) \exp(V_\lambda(s) - \frac{1}{2}E V_\lambda^2(s))$$

et, en posant  $\alpha = \alpha(t)$ ,

$$(55) \quad \begin{aligned} P'(t) &= \frac{1}{2}(U-E U X_\lambda(t)) P_\lambda(t) \\ &= \frac{1}{2}(U-\alpha\tau^2) \exp(\alpha U - \frac{1}{2}\alpha^2\tau^2) \exp(V_\lambda(t) - \frac{1}{2}E V_\lambda^2(t)). \end{aligned}$$

Pour démontrer (50), on peut décomposer  $\Omega$  en espace produit,  $U$  ne dépendant que du premier facteur et les  $V_\lambda(s)$  ne dépendant que du second; écrivons  $E_U$  et  $E_V$  respectivement pour les intégrales par rapport au premier et au second facteurs, donc  $E = E_U E_V$ . Posons

$$(56) \quad g(u) = E_V \exp(V_\lambda(t) - \frac{1}{2}E V_\lambda^2(t)) f' \left( \int \exp(\alpha(s)u - \frac{1}{2}\alpha^2(s)\tau^2) \times \exp(V_\lambda(s) - \frac{1}{2}E V_\lambda^2(s)) d\sigma(s) \right).$$

C'est une fonction croissante de  $u$ . Il suffit donc de montrer que,  $g(u)$  étant une fonction croissante de  $u$ , on a

$$(57) \quad E_U (U-\alpha\tau^2) \exp(\alpha U - \frac{1}{2}\alpha^2\tau^2) g(U) \geq 0$$

et il suffit d'établir (57) quand  $g = 1_{[x, \infty[}$ , c'est-à-dire

$$(58) \quad \int_x^\infty (u-\alpha\tau^2) \exp(\alpha u - \frac{1}{2}\alpha^2\tau^2) \gamma(u) du$$

où  $\gamma$  est la densité de la distribution de  $U$ . La fonction sous le signe  $\int$  s'annule pour une seule valeur de  $u$ , elle est positive pour  $u \rightarrow \infty$ , et son intégrale sur  $\mathbb{R}$  est nulle puisque c'est la dérivée par rapport à  $\alpha$  de

$$(59) \quad \int_{-\infty}^\infty \exp(\alpha u - \frac{1}{2}\alpha^2\tau^2) \gamma(u) du$$

qui est la constante 1. Donc (57) est correct, donc (50), et le lemme est établi.

Voici la variante du Lemme 1 dont nous nous servirons.

LEMME 2. Soit  $\varepsilon > 0$ ,  $\alpha > 1$ , et soit  $f$  une fonction convexe et positive sur  $\mathbb{R}^+$ , telle que

$$(60) \quad f(\lambda x) - f(0) \leq \lambda^\alpha (f(x) - f(0))$$

pour  $x \geq 0$  et  $\lambda \geq 0$ . Soit enfin deux noyaux  $p_0(t,s)$  et  $p_1(t,s)$ , de type positif, tels que  $p_1(t,s) \leq p_0(t,s) + \varepsilon$ . Alors

$$(61) \quad \begin{aligned} \text{Ef} \int P_1 \sigma &\leq e^{b\varepsilon} \text{Ef} \int P_0 \sigma \\ b &= \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}. \end{aligned}$$

PREUVE. Utilisant le Lemme 1, on peut supposer  $p_1 = p_0 + \varepsilon$ . D'autre part, on peut supposer  $f(0) = 0$ . Ecrivons alors

$$(62) \quad X_1(t) = X_0(t) + Y,$$

où  $Y$  est une variable gaussienne centrée indépendante des  $X_0(t)$  ( $t \in T$ ), de variance  $\varepsilon$ . On a

$$(63) \quad \begin{aligned} \text{Ef} \int P_1 \sigma &= \text{E} f(e^{Y-\frac{1}{2}\varepsilon} \int P_0 \sigma) \\ &\leq \text{E} e^{aY-\frac{1}{2}a\varepsilon} \text{Ef} \int P_0 \sigma \\ &= e^{b\varepsilon} \text{Ef} \int P_0 \sigma \end{aligned}$$

et le lemme est établi.

Enfin on aura besoin du lemme suivant, sans doute classique.

LEMME 3. Si  $Y_1, \dots, Y_k$  sont des variables aléatoires positives, leur distribution jointe est bien définie par les distributions des combinaisons linéaires  $u_1 Y_1 + \dots + u_k Y_k$  à coefficients  $u_j \geq 0$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ).

PREUVE. La fonction

$$(64) \quad g(u_1, \dots, u_k) = \text{E} \exp i(u_1 Y_1 + \dots + u_k Y_k)$$

est bien définie sur  $\mathbb{R}^k$ , et c'est la valeur au bord d'une fonction analytique

définie à l'intérieur de  $(\mathbb{R} + i\mathbb{R}^+)^k$ ; elle est donc bien déterminée par ses valeurs sur  $\mathbb{R}^{+k}$ .

DÉMONSTRATION du Théorème 1. Considérons deux suites de noyaux positifs de type positifs,  $p_n(t,s)$  et  $p'_n(t,s)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), tels que

$$(65) \quad \sum_1^{\infty} p_n(t,s) = \sum_1^{\infty} p'_n(t,s).$$

On désigne par  $q_n(t,s)$ , resp.  $q'_n(t,s)$ , les sommes partielles de la première, resp. de la seconde, série, et par  $Q$ , resp.  $Q'$ , les opérateurs de chaos multiplicatif associés (définis en loi). On se propose d'abord de montrer que les réponses aux problèmes 1 et 2 sont les mêmes pour  $Q$  et pour  $Q'$ , autrement dit que  $Q$  et  $Q'$  sont non dégénérés (ou fortement non dégénérés) sur les mêmes mesures  $\sigma$ . En vertu de la remarque qui suit le problème 1, on peut se borner au problème 2 et supposer  $Q$  fortement non dégénéré.

Choisissons un compact  $K$  dans  $T$  et  $\sigma \in M^+(K)$ . Fixons un entier  $\nu \geq 0$ . Comme  $q_n - q'_\nu$  tend ponctuellement en croissant vers  $q - q'_\nu$  ( $q(t,s)$  étant la somme commune des séries (65)), la partie négative  $(q_n - q'_\nu)^-$  tend uniformément vers 0 sur  $K \times K$ . Quitte à remplacer  $T$  par  $K$ , on a donc, pour  $\varepsilon > 0$  fixé,

$$(66) \quad q'_\nu(t,s) \leq q_n(t,s) + \varepsilon$$

quand  $n$  est assez grand ( $(t,s) \in K \times K$ ). Si  $f$  vérifie les hypothèses du Lemme 2, on a donc

$$(67) \quad \text{Ef} \int Q'_\nu \sigma \leq e^{b\varepsilon} \text{Ef} \int Q_n \sigma$$

quand  $n$  est assez grand (la notation est celle de (14)). Or la non-dégénérescence forte de  $Q$  en  $\sigma$  signifie l'existence d'une fonction  $f(x)$  positive telle que  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-1} f(x) = \infty$  et telle que

$$(68) \quad \text{Ef} \int Q_n \sigma = o(1) \quad (n \rightarrow \infty)$$

(voir (22)); et l'on peut sans restriction imposer à  $f$  de vérifier l'hypothèse du Lemme 2. (67) et (68) entraînent

$$(69) \quad \text{Ef} \int Q'_v \sigma = O(1) \quad (v \rightarrow \infty)$$

donc  $Q'$  est fortement non dégénéré sur  $\sigma$ .

Lorsque  $f$  est Lipschitzienne, on a

$$(70) \quad \text{Ef} \int Q\sigma = \lim \uparrow \text{Ef} \int Q_n \sigma$$

(la suite du second membre est croissante à cause du Lemme 1, et converge vers le premier membre parce que  $\int Q_n \sigma$  tend vers  $\int Q\sigma$  dans  $L^1(\Omega)$ ). D'après (67) et (70), on a

$$(71) \quad \text{Ef} \int Q'\sigma \leq \text{Ef} \int Q\sigma$$

pour toutes les fonctions Lipschitziennes vérifiant les hypothèses du Lemme 2, donc aussi pour les différences de telles fonctions, donc aussi quand  $f$  est de classe  $C$  à support compact. Cela entraîne que  $\int Q\sigma$  et  $\int Q'\sigma$  ont même distribution.

Il en est de même pour  $\sum u_j \int Q\sigma_j$  et  $\sum u_j \int Q'\sigma_j$  quand les  $\sigma_j$  sont des mesures positives à support compact et les  $u_j$  des nombres positifs ( $j = 1, 2, \dots, k$ ). D'après le Lemme 3, les opérateurs  $Q$  et  $Q'$  ont donc même loi, et le théorème est démontré.

DÉMONSTRATION du Théorème 2. L'inégalité (71) n'utilise que l'hypothèse

$$(72) \quad q'(t,s) \leq q(t,s)$$

et non l'égalité  $q'(t,s) = q(t,s)$ . Cela démontre le Théorème 2.

DÉMONSTRATION du Théorème 3. Soit  $\gamma$  une contraction de l'espace métrique  $(T,d)$ , c'est-à-dire que

$$(73) \quad d(\gamma(t), \gamma(s)) \leq d(t,s)$$

quels que soient  $t$  et  $s$  dans  $T$ . La "mesure contractée" de  $\sigma$  par  $\gamma$  est

l'image de  $\sigma$  par  $\gamma$ , c'est-à-dire la mesure  $\tau$  définie par

$$(74) \quad \int g(t) d\tau(t) = \int g(\gamma(t)) d\sigma(t).$$

$q(t,s)$ ,  $Q_n(t)$  et  $Q$  ayant le même sens que ci-dessus, posons

$$(75) \quad \begin{aligned} q'(t,s) &= q(\gamma(t), \gamma(s)) \\ Q'_n(t) &= Q_n(\gamma(t)) \end{aligned}$$

et observons que, d'après (74),  $\int Q'_n d\tau = \int Q_n d\sigma$ . Comme  $q(t,s)$  est supposée fonction décroissante de  $d(t,s)$ , on a l'inégalité opposée à (72), donc l'inégalité opposée à (71), donc les réponses aux problèmes 1, 2, 3 pour le couple  $(q,\tau)$  sont pires que pour le couple  $(q,\sigma)$ , ce qu'énonce le Théorème 3.

Remarquons, comme corollaire du Théorème 2, que les réponses aux problèmes 1, 2, 3 sont les mêmes pour deux fonctions  $q(t,s)$  de type  $\sigma$ -positif dont la différence est bornée.

Remarquons aussi, ce qui est immédiat, que les réponses à tous les problèmes posés sont les mêmes pour deux mesures  $\sigma$  équivalentes, et telles que la densité de chacune par rapport à l'autre soit bornée sur tout compact.

Pour finir, supposons qu'on ait deux noyaux de type  $\sigma$ -positifs,  $q_1(t,s)$  et  $q_2(t,s)$ , dont la somme est  $q(t,s)$ . Alors, comme on l'a fait pour des noyaux de type positif au début du chapitre 2, on peut décomposer  $\mathcal{H}$  en somme hilbertienne  $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$  et le chaos multiplicatif  $Q$  en un produit d'opérateurs indépendants  $Q_1$  et  $Q_2$  (respectivement  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  mesurables) correspondants à  $q_1(t,s)$  et  $q_2(t,s)$ . Cela se généralise au cas où  $q(t,s)$  est somme d'un nombre quelconque de termes de type  $\sigma$ -positifs. Le problème 7 (étude des opérateurs  $Q_u$  associés à  $uq(t,s)$ ,  $u > 0$ ) s'interprète comme l'étude d'un processus  $u \rightarrow Q_u$  à quotients indépendants et stationnaires. On verra l'usage de cette remarque au chapitre 6.

4. Exemple et applications

On connaît les réponses aux problèmes 1 à 4 dans un cas particulier: celui où

$$(76) \quad T = \{1, 2, \dots, c\}^N$$

$c$  étant un nombre entier donné  $\geq 2$ , muni de la distance  $c$ -adique

$$(77) \quad d(t, s) = c^{-n}$$

si  $t$  et  $s$  ont exactement leurs  $n$  premières coordonnées en commun, et où on choisit

$$(78) \quad p_n(t, s) = \begin{cases} u & \text{si } d(t, s) \leq c^{-n} \\ 0 & \text{si } d(t, s) > c^{-n} \end{cases} .$$

Dans ces conditions

$$(79) \quad q(t, s) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t, s) = u \log_c \frac{1}{d(t, s)} .$$

Ainsi le poids  $P_n(t)$  est constant p.s. sur chacun des  $c^n$  cylindres définis par la donnée des  $n$  premières coordonnées (on désignera ensuite par  $I_n(t)$  celui de ces cylindres qui contient le point  $t$ ); sur chacun de ces cylindres  $c$ 'est l'exponentielle d'une variable gaussienne de variance  $u$ , normalisée de façon que l'espérance soit 1, et sur deux cylindres disjoints les valeurs de  $P_n(t)$  sont des v.a. indépendantes. On se trouve dans le cadre des martingales de B. Mandelbrot, étudiées en [6], et les Théorèmes 1, 2 et 4 de [6] donnent la proposition suivante, pour la mesure  $\sigma$  équilibrée sur  $T$  ( $\sigma(I_n(t)) = c^{-n}$ ).

PROPOSITION. L'opérateur  $Q$  correspondant à (79) est dégénéré en  $\sigma$  si  $u \geq 2 \log c$ , et fortement non dégénéré si  $u < 2 \log c$ . Dans ce cas, on a

$$(80) \quad E(Q\sigma(T))^h < \infty \iff uh < 2 \log c .$$

De plus, on a p.s.

$$(81) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log Q\sigma(I_n(t))}{\log \sigma(I_n(t))} = 1 - \frac{u}{2 \log c}$$

pour  $Q\sigma$ -presque tout  $t$ . Cela entraîne que la mesure  $Q\sigma$  est p.s. portée par un borélien de dimension  $D = 1 - \frac{u}{2 \log c}$ , tandis que tout borélien de dimension  $< D$  est de  $Q\sigma$ -mesure nulle.

A partir de là et des théorèmes de comparaison, on a la réponse aux problèmes 1 à 3 pour un autre cas particulier, important. On choisit maintenant  $T = \mathbb{R}^V$  euclidien, et

$$(82) \quad q(t,s) = u \log^+ \frac{1}{|t-s|} + O(1)$$

comme nous savons que c'est possible (voir (35)). Les réponses aux problèmes 1, 2, 3 ne dépendent que de  $u$  et  $\sigma$  (voir remarque à la fin du dernier chapitre). Choisissons pour  $\sigma$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^V$ .

**THÉOREME 4.** Un opérateur  $Q$  correspondant à (82), avec  $T = \mathbb{R}^V$ , est dégénéré sur la mesure de Lebesgue  $\sigma$  si  $u \geq 2v$ , et fortement non dégénéré si  $u < 2v$ . Dans ce cas, on a pour tout compact  $K$  de  $\sigma$ -mesure  $> 0$

$$(83) \quad E(Q\sigma(K))^h < \infty \iff uh < 2v.$$

Voici trois variantes de ce théorème; dans les deux premières on considère une autre mesure  $\sigma$ , et dans la dernière un autre noyau  $q(t,s)$ , correspondant à un chaos multiplicatif anisotrope.

Variante 1. Considérons une variété de classe  $C^1$  et de dimension  $\mu$  plongée dans  $\mathbb{R}^V$ . Soit  $\sigma$  une mesure portée par cette variété, de densité continue et partout non nulle par rapport à la mesure  $\mu$ -dimensionnelle. Un opérateur  $Q$  correspondant à (82) est dégénéré en  $\sigma$  si  $u \geq 2\mu$ , et fortement non dégénéré si  $u < 2\mu$ . Dans ce cas, on a pour tout compact  $K$  dont la  $\sigma$ -mesure est positive

$$(84) \quad E(Q\sigma(K))^h < \infty \iff uh < 2\mu.$$

Variante 2. Considérons un ensemble parfait totalement discontinu  $K$



dans  $\mathbb{R}^v$ , construit à la manière de Cantor:  $K$  est l'intersection d'une suite de compacts emboîtés décroissants  $K_n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ); chaque  $K_n$  admet exactement  $c^n$  composantes (pratiquement, ce seront souvent ses composantes connexes) dont le diamètre est  $\leq d_n$  et dont les distances mutuelles sont  $\geq \delta_n$ ; chaque composante de  $K_n$  contient exactement  $c$  composantes de  $K_{n+1}$ . On suppose

$$(85) \quad d_n \leq c^{-n/\alpha}$$

$$(86) \quad \delta_n \geq c^{-n/(\alpha+o(1))} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Soit  $\sigma$  la mesure qui donne la masse  $c^{-n}$  à chaque composante de  $K_n$ . Un opérateur  $Q$  correspondant à (82) est dégénéré sur  $\sigma$  si  $u \geq 2\alpha$ , et fortement non dégénéré si  $u < 2\alpha$ . Dans ce cas, on a

$$(87) \quad E(Q\sigma(K))^h < \infty \iff uh < 2\alpha.$$

Variante 3. Posons

$$(88) \quad \psi(t, s) = \sum_{j=1}^v |t_j - s_j|^{a_j}$$

où les  $a_j$  sont des rationnels,  $0 < a_j \leq 2$  ( $j = 1, 2, \dots, v$ ),  $t = (t_1, \dots, t_v) \in \mathbb{R}^v$ ,  $s = (s_1, \dots, s_v) \in \mathbb{R}^v$ . On sait (voir (34) et (37)) qu'il existe un noyau  $q(t, s)$  de type  $\sigma$ -positif tel que

$$(89) \quad q(t, s) = \frac{u}{2} \log^+ \frac{1}{\psi(t, s)} + O(1).$$

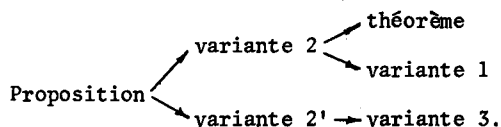
Posons

$$(90) \quad \frac{1}{\alpha} = 2 \sum_{j=1}^v \frac{1}{a_j}.$$

Un opérateur  $Q$  correspondant à (89) est dégénéré sur la mesure de Lebesgue  $\sigma$  de  $\mathbb{R}^v$  si  $u \geq 2\alpha$ , et fortement non dégénéré si  $u < 2\alpha$ . Dans ce cas, pour tout compact  $K$  dont la  $\sigma$ -mesure est positive, on a

$$(91) \quad E(Q\sigma(K))^h < \infty \iff uh < 2\alpha.$$

Le schéma des preuves est le suivant:



La variante 2' sera énoncée en temps voulu.

PREUVE de la variante 2. Considérons d'abord le cas simple où, à la place de (86), nous avons

$$(92) \quad \delta_{n+1} \geq \gamma c^{-n}$$

où  $\gamma$  est une constante  $> 0$ ; par exemple,  $K$  peut être un parfait homogène au sens de [7] ("self similar" au sens de [16]), c'est-à-dire la réunion de  $c$  portions qui lui sont semblables dans le même rapport  $c^{-\alpha}$ . Désignons un tel compact par  $K_\alpha^C$ . C'est l'image du compact  $T$  de (76) par un homéomorphisme qui transporte les cylindres d'ordre  $n$  dans les composantes de  $K_n$ ; pour simplifier les notations, identifions  $T$  et  $K_\alpha^C$ . La distance  $d(t,s)$  de (77) vérifie alors, d'après (85) et (92),

$$(93) \quad \gamma(d(t,s))^\alpha \leq |t-s| \leq (d(t,s))^\alpha$$

et la mesure  $\sigma$  est bien la même. Le noyau (79) vérifie

$$(94) \quad q(t,s) = \frac{u}{\alpha \log c} \log |t-s| + O(1)$$

( $t \in K_\alpha^C$ ,  $s \in K_\alpha^C$ ) et la conclusion de la variante 2, pour  $K_\alpha^C$ , est exactement ce que dit la proposition.

Dans le cas général, (85) dit que  $K$  (avec la mesure  $\sigma$  correspondante) s'obtient à partir de  $K_\alpha^C$  (avec la mesure  $\sigma$  correspondante) par contraction, dont (Théorème 3) la situation est pire pour  $K$  que pour  $K_\alpha^C$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , (86) dit que  $K_{\alpha+\varepsilon}^C$  s'obtient à partir de  $K$  par contraction locale, donc la situation est meilleure pour  $K$  que pour  $K_{\alpha+\varepsilon}^C$ . Cela finit d'établir la variante 2.

PREUVE du théorème. Considérons un pavé de diamètre  $< 1$  dans  $\mathbb{R}^V$ , et soit  $m$  sa mesure de Lebesgue. Choisissons  $c = 2^V$ . Choisissons ce pavé pour  $K_0$  dans la

variante 2, et pour chaque  $K_n$  une réunion de  $c^n$  pavés qui lui soient homothétiques dans le rapport  $\rho_n = r_1 r_2 \dots r_n$ ,  $0 < r_n < \frac{1}{2}$ . En choisissant les  $r_n$  assez voisins de  $\frac{1}{2}$ , mais pas trop, la mesure de Lebesgue du compact  $K$  est arbitrairement proche de  $m$ , et l'on a (85) et (86) avec  $\alpha = \nu$ . D'où le théorème.

PREUVE de la variante 1. C'est la même que celle du théorème, en remplaçant la mesure donnée  $\sigma$  par une mesure équivalente. On peut aussi appliquer le Théorème 1 à  $\mathbb{R}^\mu$ , considéré comme plongé dans  $\mathbb{R}^\nu$ , et le Théorème 3 qui montre que, relativement aux problèmes 1, 2, 3,  $\mathbb{R}^\mu$  muni de la mesure de Lebesgue est équivalent à toute variété  $C^1$  de dimension  $\mu$ , munie de la mesure  $\mu$ -dimensionnelle (voir la remarque finale du chapitre 3).

PREUVE de la variante 3. Commençons par la variante non énoncée.

Variante 2'. C'est la variante 2, mais avec la distance donnée par la racine carrée de (88), et  $Q$  correspondant à (89).

Passons maintenant à la variante 3. Comme dans la preuve du théorème, on part d'un pavé  $K_0$  et on construit des compacts emboîtés décroissants  $K_n$ . Écrivons les rationnels  $\alpha_j$  sous la forme

$$(95) \quad \alpha_j = \frac{N}{P_j}.$$

Chaque  $K_n$  sera réunion de  $2^{(p_1 + \dots + p_\nu)n}$  pavés, et on passe de chaque pavé  $P$  de  $K_n$  aux pavés de  $K_{n+1}$  qui y sont inclus de la manière suivante. Le pavé  $P$  est un produit de segments  $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_\nu$ . On divise chaque  $I_j$  en  $2^{p_j}$  intervalles égaux, qu'on réduit ensuite dans le rapport  $1 - \varepsilon_{n,j}$  en conservant les milieux. On obtient ainsi  $2^{p_j}$  intervalles  $I_j'$ ; les  $2^{p_1 + \dots + p_\nu}$  pavés  $I_1' \times I_2' \times \dots \times I_\nu'$  sont les composantes de  $K_{n+1}$ , contenues dans le pavé  $P$ . On définit  $K$  comme l'intersection des  $K_n$ . Le rapport des mesures de Lebesgue de  $K$  et de  $K_0$  est

$$(96) \quad \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{\nu} (1 - \varepsilon_{n,j}).$$

Considérons la distance

$$(97) \quad d(t,s) = \sqrt{\psi(t,s)}$$

( $\psi(t,s)$  étant donné par (88)). Le  $d$ -diamètre des pavés composant  $K_n$  est

$$(98) \quad \left( \sum_{j=1}^{\nu} (2^{-np_j} (1-\epsilon_{1,j}) \dots (1-\epsilon_{n,j}))^{a_j} \right)^{\frac{1}{2}}$$

et le minimum de leurs distances est

$$(99) \quad \inf_j (2^{-np_j} (1-\epsilon_{1,j}) \dots (1-\epsilon_{n-1,j}) \epsilon_{n,j})^{\frac{1}{2} a_j}.$$

On peut choisir les  $\epsilon_{n,j}$  de façon que (96) soit arbitrairement proche de 1, et que (99) soit de la forme

$$(100) \quad 2^{-n} N^{2(1+o(1))} \quad (j \rightarrow \infty).$$

Posons maintenant  $c = 2^{p_1 + \dots + p_\nu}$ . Tenant compte de la définition de  $\alpha$  en (90), (99) s'écrit

$$(101) \quad c^{-\alpha(1+o(1))}$$

et (98) s'écrit

$$(102) \quad c^{-n\alpha} (\gamma\sqrt{N} + o(1))$$

où  $\gamma$  est arbitrairement proche de 1. La preuve de la variante 3 à partir de la variante 2' se termine comme celle du théorème à partir de la variante 2.

On voit que l'hypothèse que les  $a_j$  sont rationnels joue un rôle technique, pour écrire (95). Si on abandonne cette hypothèse, une partie de la conclusion demeure - en utilisant le Théorème 2, chapitre 3 - : il suffit de renoncer à l'inégalité stricte  $u \geq 2\alpha$  comme condition de dégénérescence et de la remplacer par l'inégalité large  $u > 2\alpha$ .

5. Les théories  $L^2$  et  $L^{2m}$ 

Nous considérons ici le problème 3, d'abord pour les moments d'ordre 2 (théorie  $L^2$ ), ensuite pour les moments d'ordre  $2m$ . En passant, la théorie  $L^2$  donnera des éléments de réponse au problème 4, et des éléments sur la transformée de Fourier de la mesure aléatoire  $S = Q\sigma$ . Nous considérons tantôt le chaos multiplicatif  $Q$  défini par une suite de noyaux de type positif  $p_n(t,s)$ , tantôt le chaos multiplicatif  $Q$  défini par une fonction de type  $\sigma$ -positif  $q(t,s)$ . On donne une mesure  $\sigma \in M^+(T)$  et un compact  $K$  dans  $T$ . Le problème 3, sous sa forme (23), et en se restreignant aux moments d'ordre pair, amène à demander si l'on a

$$(103) \quad E(Q_n \sigma(K))^2 = O(1) \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$(104) \quad E(Q_n \sigma(K))^{2m} = O(1) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Les réponses sont très faciles en utilisant les formules (9) et (10).

THÉORÈME 5. *Les propositions suivantes sont équivalentes:*

- a)  $Q$  est fortement non dégénéré en  $\sigma$  et de plus  $E(Q\sigma(K))^2 < \infty$ ;
- b)  $Q_n \sigma(K)$  converge vers  $Q\sigma(K)$  dans  $L^2(\Omega)$ ;
- c)  $Q_n \sigma(K)$  est borné dans  $L^2(\Omega)$ ;
- d<sub>1</sub>) (cas où on donne les  $p_n(t,s)$ )

$$(105) \quad \iint_{K^2} e^{q_n(t,s)} d\sigma(t)d\sigma(s) = O(1)$$

- d<sub>2</sub>) (cas où on donne  $q(t,s)$ )

$$(106) \quad \iint_{K^2} e^{q(t,s)} d\sigma(t)d\sigma(s) < \infty.$$

THÉORÈME 6. *Les propositions suivantes sont équivalentes:*

- a)  $Q$  est fortement non dégénéré en  $\sigma$  et de plus  $E(Q\sigma(K))^{2m} < \infty$ ;
- b)  $Q_n \sigma(K)$  converge vers  $Q\sigma(K)$  dans  $L^{2m}(\Omega)$ ;
- c)  $Q_n \sigma(K)$  est borné dans  $L^{2m}(\Omega)$ ;

d<sub>1</sub>) (cas où on donne les  $p_n(t,s)$ )

$$(107) \quad \iint \dots \int_{K^{2m}} \exp \sum_{1 \leq j < k \leq 2m} q_n(t_j, t_k) d\sigma(t_1) \dots d\sigma(t_{2m}) = O(1)$$

d<sub>2</sub>) (cas où on donne  $q(t,s)$ )

$$(108) \quad \iint \dots \int_{K^{2m}} \exp \sum_{1 \leq j < k \leq 2m} q(t_j, t_k) d\sigma(t_1) \dots d\sigma(t_{2m}) < \infty.$$

PREUVE. On sait que a)  $\Leftrightarrow$  b)  $\Leftrightarrow$  c). En utilisant (9), resp. (10), (103), resp. (104) n'est autre que (105), resp. (107). Quand les  $q_n(t,s)$  tendent en croissant vers  $q(t,s)$ , (105)  $\Leftrightarrow$  (106) et (107)  $\Leftrightarrow$  (108).

Nous allons donner tour à tour quelques compléments aux Théorèmes 5 et 6.

#### Compléments au Théorème 5.

Supposons qu'on donne un noyau de type  $\sigma$ -positif  $q(t,s)$  vérifiant (106).

On pose  $S = Q\sigma$ . Un calcul immédiat donne:

Complément 5.1 (sous la condition (106)). Soit  $k(t,s)$  un noyau positif sur  $T^2$  qui est soit positif, soit complexe borné. Alors

$$(109) \quad E \iint_{K^2} k(t,s) dS(t) dS(s) = \iint_{K^2} k(t,s) e^{q(t,s)} d\sigma(t) d\sigma(s).$$

En particulier, si  $k(t)$  est une fonction complexe bornée sur  $T$ ,

$$(110) \quad E \left| \int_K k(t) dS(t) \right|^2 = \iint_{K^2} k(t) \overline{k(s)} e^{q(t,s)} d\sigma(t) d\sigma(s).$$

Voici deux applications.

Complément 5.2. Soit  $\psi(t,s)$  une fonction de type négatif, strictement positive hors de la diagonale de  $T^2$ , et  $d(t,s)$  sa racine carrée, qui est une distance sur  $T$ . Supposons  $q(t,s)$  de la forme

$$(111) \quad q(t,s) = u \log^+ \frac{1}{d(t,s)} + O(1)$$

(c'est possible, voir (35)) et écrivons comme dans (39) l'intégrale d'énergie

$I_\alpha(\sigma)$ . Alors, d'après (109), on a

$$(112) \quad E I_{\alpha}(S) < \infty \iff I_{\alpha+u}(\sigma) < \infty.$$

Complément 5.3. Supposons maintenant  $T = \mathbb{R}^{\nu}$ , et supposons que

$$(113) \quad q(t,s) - u \log \frac{1}{|t-s|}$$

est une fonction de classe  $C^{\infty}$  et majorée ( $|\cdot|$  étant la norme euclidienne). Prenons pour  $\sigma$  une mesure à support compact, dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue est de classe  $C^{\infty}$ . En écrivant  $\hat{S}(\xi)$  pour la transformée de Fourier

$$(114) \quad \hat{S}(\xi) = \int e^{i(\xi \cdot t)} dS(t)$$

on a

$$(115) \quad E |\hat{S}(\xi)|^2 \approx |\xi|^{u-\nu} \quad (|\xi| \rightarrow \infty)$$

(l'hypothèse (106) signifie  $u < \nu$ ), où le signe  $\approx$  signifie que le rapport de deux nombres est compris entre deux nombres strictement positifs.

C'est la conséquence de (110), avec  $k(t) = e^{i(\xi \cdot t)}$ , et de l'estimé

$$(116) \quad \int_{\mathbb{R}^{\nu}} e^{i(\xi \cdot t)} |t|^{-u} f(t) dt \approx |\xi|^{u-\nu}$$

quand  $f(t)$  est une fonction de classe  $C^{\infty}$  à support compact, strictement positive en 0.

#### Complément au Théorème 6.

La condition (108) est nécessaire et suffisante pour avoir à la fois non-dégénérescence forte et  $E(S(K))^{2m} < \infty$ , mais, sauf dans le cas  $m = 1$  où le premier membre s'interprète comme intégrale d'énergie, elle n'est pas très maniable. Voici une condition suffisante beaucoup plus maniable.

Complément 6.1. Pour avoir à la fois non-dégénérescence forte de l'opérateur  $Q$  correspondant à  $q(t,s)$ , et  $E(Q\sigma(K))^{2m} < \infty$ , il suffit qu'on ait

$$(117) \quad \sup_s \int_K e^{mq(t,s)} d\sigma(t) < \infty.$$

La preuve repose sur la formule

$$(118) \quad \int \dots \int_{K^{2m}} \exp \sum_{0 \leq j < k \leq 2m} q(t_j, t_k) d\sigma(t_0) \dots d\sigma(t_{2m-1}) \\ \leq \left( \sup_s \int_K e^{mq(t,s)} d\sigma(t) \right)^{2m-1} \int_K d\sigma(t)$$

que nous allons établir. Ecrivons le premier membre de (118), pour simplifier l'écriture,

$$(119) \quad \int \dots \int_{K^{2m}} \exp \sum_{0 \leq j < k \leq 2m-1} q_{j,k} d\sigma_0 \dots d\sigma_{2m-1}$$

et décomposons la somme  $\sum$ , qui comprend  $m(2m+1)$  termes, de la manière que voici (on écrit  $q_{k,j}$  pour  $q_{j,k}$ , et aussi  $j-2m$  pour  $j$ ):

$$(120) \quad \sum = \ell_0 + \ell_1 + \dots + \ell_{m-1}$$

$$(120_0) \quad \ell_0 = q_{0,1} + q_{1,-1} + q_{-1,2} + q_{2,-2} + \dots + q_{-(m-1),m}$$

$$(120_1) \quad \ell_1 = q_{1,2} + q_{2,0} + q_{0,3} + q_{3,-1} + \dots + q_{-(m-2),m+1}$$

⋮

$$(120_{m-1}) \quad \ell_{m-1} = q_{m-1,m} + q_{m,m-2} + q_{m-2,m+1} + q_{m+1,m-3} + \dots + q_{0,-1}$$

chaque ligne a  $2m+1$  termes  $q_{j,k}$ , et chaque indice est écrit deux fois, sauf le premier et le dernier. (119) s'écrit

$$(121) \quad \int \dots \int_{K^{2m}} e^{\ell_0 + \dots + \ell_{m-1}} d\sigma_0 \dots d\sigma_{2m-1}$$

qui, par l'inégalité de Hölder, est majoré par

$$(122) \quad \left( \int \dots \int_{K^{2m}} e^{m\ell_0} d\sigma_0 \dots d\sigma_{2m-1} \right)^{\frac{1}{m}} \dots \left( \int \dots \int_{K^{2m}} e^{m\ell_{m-1}} d\sigma_0 \dots d\sigma_{2m-1} \right)^{\frac{1}{m}}.$$

Or toutes les intégrales dans (122) sont égales. Pour évaluer la première, on intègre successivement selon l'ordre des indices qui apparaissent dans (120<sub>0</sub>).

On a successivement



$$(122_1) \quad \int_K e^{mq_{0,1}} d\sigma_0 \leq A = \sup_s \int_K e^{mq(t,s)} d\sigma(t)$$

$$(122_2) \quad \iint_{K^2} e^{m(q_{0,1}+q_{1,-1})} d\sigma_0 d\sigma_1 \leq A^2$$

$$(122_3) \quad \iiint_{K^3} e^{m(q_{0,1}+q_{1,-1}+q_{-1,2})} d\sigma_0 d\sigma_1 d\sigma_{-1} \leq A^3$$

$$(122_4) \quad \iiint\limits_{K^4} e^{m(q_{0,1}+q_{1,-1}+q_{-1,2}+q_{2,-2})} d\sigma_0 d\sigma_1 d\sigma_{-1} d\sigma_2 \leq A^4$$

$$\vdots$$

$$(122_{m-1}) \quad \int \dots \int_{K^{2m}} e^{m\ell_0} d\sigma_0 d\sigma_1 d\sigma_{-1} d\sigma_2 \dots d\sigma_m \leq A^{2m-1} \int_K d\sigma.$$

Ainsi (122), qui majore le premier membre de (118), est majoré par le second, et (118) est établi.

Voici l'interprétation du complément 6.1 quand  $q(t,s)$  a la forme (111).

Complément 6.2. Pour avoir à la fois dégénérescence forte de l'opérateur  $q(t,s)$  vérifiant (111), et  $E(Q\sigma(K))^{2m} < \infty$ , il suffit que  $\sigma$  ait un potentiel borné par rapport au noyau  $(d(t,s))^{-\mu}$ .

Cette condition n'est pas nécessaire et suffisante (on le voit dans le cas  $m = 1$ ). Cependant elle n'est pas mauvaise. Dans le cas du Théorème 4 et de ses variantes, on vérifie en effet qu'elle est nécessaire et suffisante. L'inconvénient majeur est qu'elle ne s'applique qu'aux moments d'ordre pair.

Nous n'irons pas plus loin dans l'étude des moments. Le Théorème 4 et ses variantes donnent des résultats très précis, pour tous les moments, mais seulement pour des noyaux  $q(t,s)$  très particuliers. Le Théorème 6 et ses compléments s'appliquent à tous les noyaux  $q(t,s)$ , mais seulement aux moments d'ordre pair.

## 6. Application de la théorie $L^2$ à la non-dégénérescence de $Q$ et aux propriétés de $S = Q\sigma$ . La probabilité de Peyrière

Dans ce chapitre et le suivant on donne un noyau  $\psi(t,s)$  de type négatif sur  $T^2$ , strictement positif hors de la diagonale, et on munit  $T$  de la distance

$d(t,s) = \sqrt{\psi(t,s)}$ . On étudie le chaos multiplicatif  $Q_u$  associé au noyau de type  $\sigma$ -négatif

$$(123) \quad \begin{aligned} q_u(t,s) &= \frac{u}{2} \int_1^\infty e^{-y\psi(t,s)} \frac{dy}{y} \\ &= u \log^+ \frac{1}{d(t,s)} + O(1) \end{aligned}$$

introduit à la fin du chapitre 2. Rappelons la remarque faite à la fin du chapitre 3: si  $u = u_1 + u_2 + \dots + u_\ell$  et si on considère des versions indépendantes des chaos multiplicatifs associés à  $u_1, u_2, \dots, u_\ell$ , leur produit est une version du chaos multiplicatif associé à  $u$ ; nous écrirons

$$(124) \quad Q_u = Q_{u_\ell} \dots Q_{u_2} Q_{u_1}.$$

Nous allons appliquer cette formule de la manière suivante. Partant d'une mesure  $\sigma \in M^+(T)$ , supposée assez diffuse, on pose

$$(125) \quad \begin{aligned} S_1 &= Q_{u_1} \sigma \\ S_2 &= Q_{u_2} S_1 \\ &\vdots \\ S_\ell &= Q_{u_\ell} S_{\ell-1} = S \end{aligned}$$

et on cherche à avoir, successivement, le meilleur contrôle possible sur la diffusion de  $S_1, S_2, \dots, S_\ell$ . On dispose d'un outil, qui est la formule (112). Si en effet  $I_\alpha(\sigma)$  est fini, et si  $\alpha$  est assez grand ( $> u_1 + u_2 + \dots + u_\ell$ ), on obtient tour à tour à partir de (112)

$$(126) \quad \begin{aligned} I_{\alpha-u_1}(S_1) &< \infty \text{ p.s.} \\ I_{\alpha-u_1-u_2}(S_2) &< \infty \text{ p.s.} \\ &\vdots \\ I_{\alpha-u_1-u_2-\dots-u_\ell}(S_\ell) &< \infty \text{ p.s.} \end{aligned}$$

Mais cela n'est autre que  $I_{\alpha-u}(S) < \infty$  p.s., qu'on obtient directement par (112).

Malgré cet échec, l'idée est bonne, à condition d'utiliser une notion introduite à la fin du chapitre 2, à savoir les classes  $M_{\alpha+}^+(T)$  associées à la métrique  $d(t,s)$ .

Enonçons tout de suite le résultat.

**THÉORÈME 7.** *Supposons  $\sigma \in M_{\alpha+}^+(T)$  et  $u < 2\alpha$ . Alors l'opérateur  $Q_u$  est fortement non dégénéré en  $\sigma$ , et de plus  $Q_u \sigma \in M_{(\alpha-\frac{u}{2})+}^+(T)$  presque sûrement.*

Il est clair qu'on peut remplacer l'hypothèse  $u < 2\alpha$  par  $u \leq 2\alpha$  (parce que l'ensemble des  $\alpha$  tels qu'une mesure  $\sigma$  donnée appartienne à  $M_{\alpha+}^+(T)$  est un ouvert). Mais  $2\alpha$  est bien la valeur critique, comme on le verra au chapitre suivant.

La preuve du Théorème 7 se fera en deux étapes. La première considérera seulement le cas  $u \leq \alpha$ , où la théorie  $L^2$  est applicable. La seconde utilisera une décomposition du type (124)-(125), pour aller jusqu'à  $2\alpha$ . La clé pour accéder à la première étape est la probabilité de Peyrière, telle qu'elle est introduite et utilisée en [6]. Avant d'y arriver, quelques rappels et compléments sur les classes  $M_{\alpha+}^+(T)$  seront nécessaires.

La définition de  $M_{\alpha+}^+(T)$  implique que, à une masse arbitrairement petite près,  $\sigma$  est portée par un compact. En vue du théorème, on pourra donc supposer que  $T$  est compact.

On désignera par  $B_n(t)$  la boule de centre  $t$  et de rayon  $e^{-n}$ . Dire que  $\sigma$  appartient à  $M_{\alpha+}^+(T)$ , c'est dire que, pour tout  $\varepsilon_0 > 0$ , il existe un  $\delta > 0$  et un compact  $K$  tel que  $\sigma(T \setminus K) < \varepsilon_0$  et tel que

$$(127) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \sigma(B_n(t))}{n} < -\alpha - \delta$$

uniformément pour  $t \in K$ . Cela entraîne  $I_{\beta}(\sigma|_K) < \infty$ , c'est-à-dire

$$(128) \quad \iint_{K^2} e^{q_{\beta}(t,s)} d\sigma(t)d\sigma(s) < \infty$$

lorsque  $\beta < \alpha + \delta$ . Inversement, on a vu au chapitre 2 que  $\sigma$  appartient à  $M_{\alpha+}^+(T)$

dès que  $I_{\beta}(\sigma) < \infty$  pour un  $\beta > \alpha$ . Désormais  $\alpha < \beta < \alpha + \delta$ .

Rappelons que (123) s'écrit  $q_u(t,s) = \frac{u}{2} \ell(\psi(t,s))$ , avec

$$(129) \quad \ell(x) = \int_1^{\infty} e^{-yx} \frac{dy}{y}.$$

Posons

$$(130) \quad \ell_n(x) = \int_1^{e^{2n}} e^{-yx} \frac{dy}{y}$$

$$(131) \quad p_n(t,s) = \frac{u}{2} \ell_1(e^{2n-2}\psi(t,s))$$

$$(132) \quad q_n(t,s) = \frac{u}{2} \ell_n(\psi(t,s)) = (p_1 + \dots + p_n)(t,s)$$

et reprenons, avec ces définitions de  $p_n(t,s)$  et de  $q_n(t,s)$ , les notations du chapitre 2:  $X_n(t)$ ,  $P_n(t)$ ,  $Y_n(t)$ ,  $Q_n(t)$ . On suppose ici que  $u$  est fixé, et on écrit  $q(t,s)$  pour  $q_u(t,s)$  et  $Q$  pour  $Q_u$ .

La probabilité de Peyrière est définie sur l'espace produit  $\Omega \times K$ , en supposant  $\sigma(K) = 1$ . C'est la probabilité  $Q$  définie par

$$(133) \quad \iint f(\omega,t) dQ(\omega,t) = E \int f(\omega,t) (Q\sigma)(dt)$$

pour toute fonction mesurable positive  $f(\omega,t)$ . Sur l'espace de probabilité  $(\Omega \times K, Q)$ , les  $X_n(t)$ ,  $P_n(t)$ ,  $Y_n(t)$ ,  $Q_n(t)$  deviennent des variables aléatoires que, pour simplifier, nous désignerons simplement par  $X_n$ ,  $P_n$ ,  $Y_n$ ,  $Q_n$ .

LEMME. Les  $X_n$  sont  $Q$ -indépendants.

PREUVE. Etant donné les fonctions mesurables positives  $f_n$  ( $1 \leq n \leq N$ ), il s'agit de montrer que

$$(134) \quad \int \prod_1^N f_n(X_n) dQ = \prod_1^N \int f_n(X_n) dQ.$$

Ecrivons

$$(135) \quad Q = Q_N R_N$$

$Q_N$  et  $R_N$  étant des opérateurs indépendants associés respectivement à  $q_N(t,s)$  et  $(q-q_N)(t,s)$ . Le premier membre de (134) s'écrit

$$(136) \quad E \int_K \prod_{n=1}^N f_n(X_n(t)) P_1(t) \dots P_N(t) (R_N \sigma) (dt)$$

soit

$$(137) \quad E \int_K \prod_{n=1}^N E P_n(t) f_n(X_n(t)) (R_N \sigma) (dt)$$

et comme l'espérance intérieure ne dépend pas de  $t$  et que  $E \int R_N \sigma = 1$  on a bien (134). Observons que

$$(138) \quad \int f_n(X_n) dQ = E P_n(t) f_n(X_n(t))$$

(indépendant de  $t$ ).

Application. Les  $\log P_n$  sont  $Q$ -indépendants, et

$$(139) \quad \int \log P_n dQ = \frac{1}{2} p_n(t,t) = \frac{u}{2}$$

(voir formule (5)). D'après la loi forte des grands nombres

$$(140) \quad \frac{\log Q_n}{n} = \frac{\log P_1 + \dots + \log P_n}{n} \rightarrow \frac{u}{2} \quad Q\text{-p.s.}$$

donc presque sûrement (avec la probabilité donnée sur  $\Omega$ ) on a

$$(141) \quad \frac{\log Q_n(t)}{n} \rightarrow \frac{u}{2} \quad S\text{-p.p.}$$

Il est donc presque sûr que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un compact  $K_\varepsilon$  contenu dans  $K$  tel que

$$(142) \quad S(K \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$$

$$\frac{\log Q_n(t)}{n} \rightarrow \frac{u}{2} \quad \text{uniformément quand } t \in K_\varepsilon.$$

Considérons maintenant

$$(143) \quad \rho_n(t) = R_n \sigma(B_n(t)) = \int_{B_n(t)} R_n \sigma(ds)$$

où  $R_n$  est défini comme en (135). Soit  $\chi_n(t,s)$  la fonction indicatrice de la partie de  $T^2$  où  $d(t,s) \leq e^{-n}$ . Ecrivons

$$(144) \quad \rho_n(t) = \int \chi_n(t,s) R_n \sigma(ds)$$

d'où

$$(145) \quad \begin{aligned} \int \rho_n dQ &= E \iint \chi_n(t,s) R_n \sigma(ds) Q \sigma(dt) \\ &= E \iint \chi_n(t,s) R_n \sigma(ds) R_n \sigma(dt) \\ &= \iint \chi_n(t,s) e^{(q-q_n)(t,s)} d\sigma(s) d\sigma(t) \end{aligned}$$

(aux notations près, on utilise (109)). Or, d'après (130) et (132),

$$(146) \quad \ell_n(x) = 2n + O(1) \quad \text{si } x = O(e^{-2n})$$

$$(147) \quad q_n(t,s) = un + O(1) \quad \text{si } \psi(t,s) = O(e^{-2n})$$

et  $\chi_n(t,s) = 1$  signifie précisément  $\psi(t,s) \leq e^{-2n}$ . Donc

$$(148) \quad \int \rho_n dQ = e^{O(1)} \iint e^{-un} \chi_n(t,s) e^{q(t,s)} d\sigma(s) d\sigma(t).$$

Cette intégrale est finie si l'on suppose (128) et  $u \leq \beta$ . C'est là qu'intervient l'hypothèse de la première étape.

PREMIÈRE ÉTAPE DE LA PREUVE du Théorème 7. Cas  $u \leq \alpha$ . Supposons (128), et observons que

$$(149) \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{(\beta-u)n} \chi_n(t,s) e^{q_u(t,s)} = e^{O(1)} e^{q_\beta(t,s)}.$$

D'après (148) (où  $q(t,s) = q_u(t,s)$ ) on a

$$(150) \quad \int \sum_{n=1}^{\infty} e^{\beta n} \rho_n dQ < \infty$$

et par conséquent  $\rho_n = o(e^{-\beta n})$  Q-p.s. On a donc presque sûrement (avec la probabilité de départ)

$$(151) \quad \rho_n = o(e^{-\beta n}) \quad S\text{-p.p.}$$

Il est donc presque sûr que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un compact  $K'_\varepsilon$  contenu dans  $K$  tel que

$$(152) \quad S(K \setminus K'_\varepsilon) < \varepsilon$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \rho_n(t)}{n} \leq -\beta \quad \text{uniformément quand } t \in K'_\varepsilon.$$

Mettons en regard (142) et (152). Posons

$$(153) \quad S_\varepsilon = 1_{K_\varepsilon \cap K'_\varepsilon} S.$$

On obtient

$$(154) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log S_\varepsilon(B_n(t))}{n} \leq -\beta + \frac{u}{2}$$

uniformément quand  $t \in K_\varepsilon \cap K'_\varepsilon$ . Comme  $\varepsilon$  est arbitraire, cela entraîne bien  $S \in M_{(\alpha - \frac{u}{2})^+}^+(K)$  presque sûrement, la conclusion voulue.

DEUXIÈME ÉTAPE. Supposons maintenant

$$(155) \quad \begin{aligned} u_1 &\leq \alpha \\ u_2 &\leq \alpha - \frac{u_1}{2} \\ &\vdots \\ u_\ell &\leq \alpha - \frac{u_1}{2} - \frac{u_2}{2} - \dots - \frac{u_{\ell-1}}{2}. \end{aligned}$$

On obtient tour à tour pour les mesures aléatoires de (125)

$$(156) \quad \begin{aligned} S_1 &\in M_{(\alpha - \frac{1}{2}u_1)^+}^+(K) \quad \text{p.s.} \\ S_2 &\in M_{(\alpha - \frac{1}{2}(u_1 + u_2))^+}^+(K) \quad \text{p.s.} \\ &\vdots \\ S_\ell &\in M_{(\alpha - \frac{1}{2}(u_1 + u_2 + \dots + u_\ell))^+}^+(K) \quad \text{p.s.} \end{aligned}$$

ainsi que

$$(157) \quad 1 = \sigma(K) = E S_1(K) = E S_2(K) = \dots = E S_\ell(K).$$

Si  $u < 2\alpha$ , on peut choisir les  $u_j$  de façon à avoir (155) et de plus  $u = u_1 + u_2 + \dots + u_\ell$ , et on peut écrire  $S_\ell = Q_u \sigma$ . On obtient donc finalement

$$(158) \quad E Q_u \sigma(K) = \sigma(K)$$

(non-dégénérescence forte) et

$$(159) \quad Q_u \sigma \in M_{(\alpha - \frac{u}{2})^+}^+(K),$$

la conclusion voulue.

Comme corollaire du Théorème 7, on voit que si la dimension capacitaire de  $T$  (muni de la distance  $d(t,s)$ ) est  $\dim_c T$ , l'opérateur de chaos multiplicatif  $Q_u$  correspondant à (123) n'est pas dégénéré quand  $u < 2\dim_c T$ , au sens qu'il existe des mesures  $\sigma \in M^+(T)$  où  $Q_u$  n'est pas dégénéré. Nous allons voir que par contre  $Q_u$  est dégénéré sur  $T$  lorsque  $u > 2\dim_H T$ , la dimension de Hausdorff de  $T$ .

### 7. Cas de dégénérescence

Nous considérons toujours l'espace métrique  $(T,d)$ , où le carré de la distance est une fonction de type négatif  $\psi(t,s)$ , et l'opérateur de chaos multiplicatif  $Q_u$  associé à (123). Nous allons établir le résultat suivant;  $K$  est, comme toujours, un compact contenu dans  $T$ .

**THÉORÈME 8.** *Sous une hypothèse (H) que nous expliciterons, relative à l'espace  $(T,d)$  (voir (183)), l'opérateur  $Q_u$  est dégénéré en  $\sigma$  ( $\sigma \in M^+(K)$ ) dès que la dimension de Hausdorff de  $K$  est strictement inférieure à  $\frac{u}{2}$ .*

La preuve nécessite quelques connaissances sur processus gaussiens (condition de Dudley) que nous donnerons en temps voulu. Commençons par expliciter l'hypothèse  $\dim K < \frac{u}{2}$ , c'est-à-dire, pour un  $h < 1$

$$(160) \quad \text{mes}_{\frac{uh}{2}} K = 0.$$



Cela signifie que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , on peut trouver des compacts  $K_j \subset K$ , en nombre fini, tels que

$$(161) \quad \begin{cases} K \subset \cup K_j \\ \sum (\text{diam } K_j)^{\frac{uh}{2}} < \varepsilon. \end{cases}$$

Définissons  $\sigma_j \in M^+(K_j)$  de sorte que  $\sum \sigma_j(K_j) = \sigma(K)$ .

Dans la démonstration du théorème,  $u$  sera fixé, et nous écrirons  $Q$  au lieu de  $Q_u$ . Nous écrirons, pour  $\rho > 1$ ,

$$(162) \quad \begin{aligned} \ell_\rho(x) &= \int_1^\rho e^{-yx} \frac{dy}{y} \\ \ell(\rho x) &= \int_\rho^\infty e^{-yx} \frac{dy}{y} \end{aligned}$$

et nous décomposons  $Q$  en un produit de facteurs indépendants, correspondant respectivement à  $\frac{u}{2} \ell_\rho(\psi(t,s))$  et à  $\frac{u}{2} \ell(\rho\psi(t,s))$ ,

$$(163) \quad Q = Q_\rho R_\rho.$$

En fait, nous allons utiliser cette décomposition pour une suite de valeurs de  $\rho$ , soit  $\rho_j$ , données par

$$(164) \quad \rho_j = (\text{diam } K_j)^{-2}$$

et nous écrirons

$$(165) \quad \int Q\sigma = \sum \int Q_{\rho_j} R_{\rho_j} \sigma_j.$$

Soit  $0 < h < 1$  vérifiant (161). La sous-additivité de la fonction  $x^h$  donne

$$(166) \quad \left( \int Q\sigma \right)^h \leq \sum \left( \int Q_{\rho_j} R_{\rho_j} \sigma_j \right)^h.$$

Prenons l'espérance des deux membres, et remarquons que

$$(167) \quad E\left( \int R\sigma \right)^h \leq \left( \int \sigma \right)^h$$

pour tout opérateur de chaos multiplicatif et toute mesure  $\sigma$ . En prenant dans le second membre les espérances par rapport aux  $R_{\rho_j}$  en premier lieu, on a donc

$$(168) \quad E\left(\int Q\sigma\right)^h \leq \sum E(Q_{\rho_j} \sigma_j)^h$$

$$(169) \quad E\left(\int Q\sigma\right)^h \leq \sum E \sup_{t \in K_j} (Q_{\rho_j}(t))^h \left(\int \sigma_j\right)^h.$$

Nous sommes amenés au problème suivant. Soit  $B$  une boule dans  $K$ , de diamètre  $\rho^{-\frac{1}{2}}$  (voir (164), où  $\rho = \rho_j$  et  $B \supset K_j$ , si tout au moins on suppose, comme on peut le faire au départ, que  $K_j$  est une boule fermée de  $K$ ). Majorer

$$(170) \quad E \sup_{t \in B} (Q_{\rho}(t))^h.$$

Fixons d'abord  $t \in B$ . La formule (4) donne

$$(171) \quad E(Q_{\rho}(t))^h = \exp \frac{1}{4}(h^2 - h)u \ell_{\rho}(0) = \rho^{-\frac{u}{4}(h-h^2)}.$$

Nous utiliserons maintenant un théorème de Dudley sous la forme suivante, que fournissent aisément les démonstrations classiques (voir p. ex. [4]).

LEMME. Soit  $Y(t)$  un processus gaussien défini sur un compact  $K$  (c'est-à-dire  $t \in K$ ),  $\delta(t,s)$  la pseudodistance sur  $K$  définie par

$$(172) \quad \delta^2(t,s) = E|Y(t) - Y(s)|^2,$$

$N(\epsilon, K, \delta)$  le nombre minimum de  $\delta$ -boules de diamètre  $\epsilon$  recouvrant  $K$ , et

$$(173) \quad J(K, \delta) = \int_0^{\infty} \log N(\epsilon, K, \delta) d\epsilon$$

(intégrale de Dudley). Alors

$$(174) \quad E \sup_{t \in K, s \in K} e^{|Y(t) - Y(s)|} \leq e^c J(K, \delta)$$

où  $c$  est une constante absolue.

Rappelons que

$$(175) \quad Q_\rho(t) = \exp(Y_\rho(t) - \frac{1}{2} E Y_\rho^2(t))$$

avec

$$(176) \quad E Y_\rho(t) Y_\rho(s) = \ell_\rho(\psi(t,s))$$

donc

$$(177) \quad E |Y_\rho(t) - Y_\rho(s)|^2 = 2(\ell_\rho(0) - \ell_\rho(\psi(x,y)))$$

et nous avons

$$(178) \quad \ell_\rho(0) - \ell_\rho(\psi) = \int_1^D (1 - e^{-y\psi}) \frac{dy}{y} < \rho\psi.$$

En appliquant les notations du lemme à  $Y(t) = Y_\rho(t)$  et  $K = B$ , on a successivement

$$(179) \quad \delta^2(t,s) < 2\rho\psi(t,s) = 2\rho d^2(t,s)$$

$$(180) \quad N(\varepsilon, B, \delta) \leq N(\varepsilon, B, d\sqrt{2\rho}) = N\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\rho}}, B, d\right)$$

$$(181) \quad J(B, \delta) \leq \sqrt{2\rho} J(B, d).$$

Majorons (170) à l'aide de (171), (174) et (181):

$$(182) \quad E \sup_{t \in B} (Q_\rho(t))^h \leq \rho^{-\frac{u}{4}(h-h^2)} \exp(C\sqrt{2\rho} J(B, d)).$$

L'hypothèse (H) du théorème sera:

$$(183) \quad J(B, d) = O(r)$$

uniformément pour toutes les boules  $B$  de rayon  $r$  dans  $K$ . Moyennant (H), (182) s'écrit

$$(184) \quad E \sup_{t \in B} (Q_\rho(t))^h \leq C \rho^{-\frac{u}{4}(h-h^2)}$$

pour une constante  $C$  convenable, et (169) donne

$$(185) \quad E \left( \int Q_\sigma \right)^h \leq C \sum_j \rho_j^{-\frac{u}{4}(h-h^2)} \left( \int \sigma_j \right)^h.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder,

$$(186) \quad E\left(\int Q\sigma\right)^h \leq c \left(\sum \rho_j^{-\frac{uh}{4}}\right)^{1-h} \left(\sum \sigma_j\right)^h.$$

Or nous savons (voir (161) et (164)) que le second membre est arbitrairement petit.

Donc  $\int Q\sigma = 0$  p.s., et le théorème est démontré.

L'hypothèse (H) est vérifiée lorsque, pour la distance  $d(t,s)$ ,  $T$  est un espace de type homogène au sens de Coifman et Weiss [2], c'est-à-dire lorsque

$$(187) \quad N(\varepsilon, B, d) < C^t \varepsilon^{-e}$$

pour toutes les boules de diamètre  $2\varepsilon$ . La condition (187) est également la condition nécessaire et suffisante, donnée par P. Assouad, pour que  $T$  admette un "plongement lipschitzien" dans un espace de dimension finie [1] (on dit alors, suivant Assouad, que  $T$  admet une dimension métrique finie). De là résulte l'égalité de la dimension capacitaire et de la dimension de Hausdorff. En comparant les Théorèmes 7 et 8, on a donc le théorème suivant.

**THÉORÈME 9.** *Supposons que  $(T, d)$  est un espace de type homogène. L'opérateur  $Q_u$  est complètement dégénéré si  $u > 2 \dim T$ , et n'est pas complètement dégénéré si  $u < 2 \dim T$ . Dans ce cas, la borne inférieure des dimensions des boréliens (aléatoires) portant les mesures  $Q_u\sigma$  non nulles ( $\sigma \in M^+(T)$ ) est  $\dim T - \frac{u}{2}$ .*

### Bibliographie

- [ 1 ] ASSOUAD, P., *Plongements lipschitziens dans  $\mathbb{R}^n$* , Bull. Soc. Math. Fr. 111 (1983), 429-448.
- [ 2 ] COIFMAN, R. et WEISS, G., *Analyse harmonique non commutative sur certains espaces homogènes*, Lecture Notes in Mathematics 242, Springer-Verlag, 1971.
- [ 3 ] KAHANE, J.-P., *Sur le modèle de turbulence de Benoît Mandelbrot*, C.R. Acad. Sc. Paris 278(1974), 621-623.

- [ 4] KAHANE, J.-P., *Some Random Series of Functions*, 2<sup>nd</sup> ed., Cambridge University Press, 1985.
- [ 5] KAHANE, J.-P., *Le chaos multiplicatif*, C.R. Acad. Sc. Paris 301(1985), 329-332.
- [ 6] KAHANE, J.-P. et PEYRIÈRE, J., *Sur certaines martingales de Benoît Mandelbrot*, *Advances in Math.* 22(1976), 131-145.
- [ 7] KAHANE, J.-P. et SALEM, R., *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*, Paris, Hermann, 1963, 192 p.
- [ 8] KAMPÉ de FERIET, J., *Turbulent atmospheric diffusion: the first twenty-five years, 1920-1945*, *Advances in Geophysics*, Vol. 18A(1974), 1-23.
- [ 9] KOLMOGOROFF, A.N., *The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds' numbers*, *Comptes-rendus (Doklady) de l'Académie des sciences de l'URSS* 30(1941), 301-305.
- [10] KOLMOGOROFF, A.N., *On degeneration of isotropic turbulence in an incompressible viscous liquid*, *Comptes-rendus (Doklady) de l'Académie des sciences de l'URSS* 31(1941), 538-540.
- [11] KOLMOGOROFF, A.N., *Dissipation of energy in the locally isotropic turbulence*, *Comptes-rendus (Doklady) de l'Académie des sciences de l'URSS* 32 (1941), 16-18.
- [12] KOLMOGOROFF, A.N., *Précisions sur la structure locale de la turbulence dans un fluide visqueux aux nombres de Reynolds élevés*, *Mécanique de la turbulence*, Colloq. internat. CNRS Marseille 1961, Editions CNRS 1962, 447-451.
- [13] MANDELBROT, B., *Possible refinement of the log-normal hypothesis concerning the distribution of energy dissipation in intermittent turbulence in Statistical Models and Turbulence*, *Symposium at U.C. San Diego 1971*, *Lecture Notes in Physics*, Springer-Verlag 1972, 333-351.

- [14] MANDELROT, B., *Multiplications aléatoires itérées et distributions invariantes par moyenne pondérée aléatoire*, C.R. Acad. sc. Paris 278(1974), 289-292 et 355-358.
- [15] MANDELROT, B., *Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier*, J. Fluid Mechanics 62(1974), 331-338.
- [16] MANDELROT, B., *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, 1982.
- [17] OBUKHOFF, A., *On the energy distribution in the spectrum of a turbulent flow*, Comptes-rendus (Doklady) de l'Académie des sciences de l'URSS 32(1941), 19-21.
- [18] PALEY, R.E.A.C., WIENER, N. et ZYGMUND, A., *Notes on random functions*, Math. Z. 37(1932), 647-668.
- [19] PEYRIÈRE, J., *Turbulence et dimension de Hausdorff*, C.R. Acad. sc. Paris 278(1974), 567-569.
- [20] SCHOENBERG, I.J., *Metric spaces and completely monotonic functions*, Ann. Math. 39(1938), 811-841.
- [21] von NEUMANN, J. and SCHOENBERG, I.J., *Fourier integrals and metric geometry*, Trans. Amer. Math. Soc. 50(1941), 226-251.
- [22] WIENER, N., *The homogeneous chaos*, Amer. J. Math. 60(1938), 897-936.

Analyse harmonique  
Mathématique (Bât. 425)  
Unité associée 757  
Université de Paris-Sud  
91405 ORSAY CEDEX