Ann. sc. math. Québec, 1982, vol. 6, no 2, pp. 163-196

À PROPOS D'UN q-ANALOGUE POUR LA FONCTION GAMMA D'EULER

Gilbert Labelle[1]

0. Introduction

Soit q une variable parcourant les réels strictement positifs et soit $n \geq 0$ un entier. Pour les combinatoristes algébristes, le q-*analogue* de l'entier n est désigné par $[n]_q$ et est défini par

$$[0]_q = 0 \quad , \quad [n]_q = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} \ . \tag{0.1}$$

Le q-analogue $[n]!_q$ de $n!$ est défini par

$$[n]!_q = [1]_q \cdot [2]_q \cdot \ldots \cdot [n]_q \quad , \quad [0]!_q = 1 \ . \tag{0.2}$$

Les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ possèdent aussi leurs q-analogues $\left[{n \atop k}\right]_q$. Ils sont donnés par la formule

$$\left[{n \atop k}\right]_q = \frac{[n]!_q}{[k]!_q [n-k]!_q} \quad , \quad 0 \leq k \leq n \ . \tag{0.3}$$

Les nombres décrits par (0.3) sont aussi appelés *coefficients gaussiens*. On vérifie directement que

$$\lim_{q \to 1} [n]_q = n \quad , \quad \lim_{q \to 1} [n]!_q = n! \quad , \quad \lim_{q \to 1} \left[{n \atop k}\right]_q = \binom{n}{k} \ . \tag{0.4}$$

---

[1] Travail fait dans le cadre de la subvention FCAC EQ 1608 du ministère de l'Education du Gouvernement du Québec.

Les q-analogues possèdent une histoire fort complexe et sont grandement utilisés en combinatoire énumérative. Mentionnons, à titre d'information, l'interprétation combinatoire la plus connue [4,7,8,11] des coefficients gaussiens:

Le nombre de sous-espaces de dimension k *d'un espace vectoriel de dimension* n *sur le corps de Galois* $\mathbb{F}_q$ *est égal au coefficient gaussien* $\left[{n \atop k}\right]_q$.

Bien entendu, dans cette interprétation combinatoire, q est un entier > 1 qui est une puissance d'un nombre premier.

Lors d'une conférence donnée dans le cadre du Séminaire de combinatoire de l'UQAM, A. Joyal [5] a introduit l'interprétation probabiliste suivante pour $[n]!_q$:

Soit $0 < q < 1$ *et considérons une variable aléatoire* X *à valeurs dans* $\mathbb{N}$ *qui suit une loi de Pascal (i.e. géométrique)* $\mathrm{Prob}(X=n) = (1-q)q^n$, $n = 0,1,\ldots$ *Alors si* $(X_k)_{k\geq 1}$ *est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que* X *, on a*

$$\mathrm{Prob}(X_1 \leq X_2 \leq \ldots \leq X_n) = \frac{1}{[n]!_q} \quad , \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{0.5}$$

Dans la section 1, nous poursuivons cette approche probabiliste en associant deux types de *factorielles généralisées* $[n]!_\pi$ et $\langle n\rangle!_\pi$ à *chaque* variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ et de distribution $\pi = (\pi_o,\pi_1,\pi_2,\ldots)$ quelconque. Les probabilités conditionnelles permettent alors de définir les *coefficients binomiaux généralisés* $\left[{n \atop k}\right]_\pi$ et $\left\langle{n \atop k}\right\rangle_\pi$ correspondants. Nous introduisons de plus deux types d'*exponentielles* $E_\pi(t)$ et $e_\pi(t)$ qui généralisent les q-exponentielles classiques $E_q(t)$ et $e_q(t)$ [3]. Dans la section 2, nous montrons comment la définition usuelle d'Euler pour la fonction gamma s'obtient de façon naturelle en spécialisant les résultats de la section 1 au cas où X est uniforme et prend ses valeurs dans $\{0,1,\ldots,N-1\}$, $N \in \mathbb{N}$. Après avoir introduit, dans la section 3, la notion de variable aléatoire q-uniforme à valeurs dans $\{0,1,\ldots,N-1\}$, nous montrons comment notre interprétation probabiliste permet aussi d'obtenir directement le q-analogue $\Gamma_q(s)$ de F.H. Jackson [1,6] pour la fonction gamma. Dans la section 4, nous considérons le prolongement analytique (en q) de la fonction de

Jackson en posant $q = e^{2\pi i\tau}$ où $\operatorname{Im} \tau > 0$. Un certain nombre de propriétés et formules concernant ce prolongement sont étudiées. Nous soulignons, en outre, comment on peut construire facilement toutes les fonctions elliptiques à l'aide d'une fonction auxiliaire spéciale $\Lambda_q[s] = \Gamma_q[s]\Gamma_q[1-s]$. Cette fonction, dont l'inverse est une fonction thêta, est en fait un cas particulier du q-analogue $B_q(x,y)$ de la fonction bêta classique étudié par Askey [1]. Via un développement en produit infini weierstrassien, un q-analogue pour la constante d'Euler γ est aussi proposé. Nous terminons par la donnée d'une expression extrêmement convergente pouvant servir à l'évaluation numérique effective du prolongement analytique (en q et en s) de la fonction de Jackson. Cette expression constitue, en quelque sorte, un q-analogue de la "formule de décomposition" de Prym [9] pour la fonction gamma d'Euler habituelle.

1. Factorielles généralisées $[n]!_\pi$ et $\langle n\rangle!_\pi$

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et de distribution π où

$$\pi = (\pi_o,\pi_1,\pi_2,\ldots) \quad , \quad \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1 \quad , \quad \pi_i \geq 0 \quad , \quad i = 0,1,2,\ldots \tag{1.1}$$

On a donc

$$\operatorname{Prob}(X=i) = \pi_i \quad , \quad i = 0,1,2,\ldots \tag{1.2}$$

Considérons maintenant une suite de variables aléatoires $(X_k)_{k\geq 1}$ indépendantes et de même loi que X . La définition suivante va nous permettre d'associer à la variable aléatoire X deux types de *factorielles généralisées* $[n]!_\pi$ et $\langle n\rangle!_\pi$.

DÉFINITION 1.1. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ les nombres $[n]!_\pi$ et $\langle n\rangle!_\pi$ sont définis par les égalités

$$\frac{1}{[n]!_\pi} = \operatorname{Prob}(X_1 \leq X_2 \leq \ldots \leq X_n) = \sum_{i_1 \leq \ldots \leq i_n} \pi_{i_1} \cdots \pi_{i_n} \tag{1.3}$$

$$\frac{1}{\langle n\rangle!_\pi} = \operatorname{Prob}(X_1 < X_2 < \ldots < X_n) \quad \sum_{i_1 < \ldots < i_n} \pi_{i_1} \cdots \pi_{i_n} \tag{1.4}$$

et sont appelés respectivement π-*factorielle* de n de la *première* et de la *deuxième espèce*.

On vérifie facilement que

$$[0]!_\pi = \langle 0\rangle !_\pi = [1]!_\pi = \langle 1\rangle !_\pi = 1 \tag{1.5}$$

et que les inégalités suivantes sont satisfaites pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq [n]!_\pi \leq \langle n\rangle !_\pi \leq \infty \ . \tag{1.6}$$

Les π-factorielles prennent donc leurs valeurs dans la demi-droite réelle complétée $\overline{\mathbb{R}}^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$.

Introduisons maintenant deux types de *coefficients binomiaux généralisés*.

DÉFINITION 1.2. a) Pour chaque $k,n \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq k \leq n$, les *coefficients* π-*binomiaux* de la *première* et de la *deuxième espèce* sont définis par les probabilités conditionnelles suivantes

$$\frac{1}{\left[{n \atop k}\right]_\pi} = \mathrm{Prob}(X_1 \leq \ldots \leq X_n \mid X_1 \leq \ldots \leq X_k \ \text{ et } \ X_{k+1} \leq \ldots \leq X_n) \tag{1.7}$$

$$\frac{1}{\left\langle {n \atop k} \right\rangle_\pi} = \mathrm{Prob}(X_1 < \ldots < X_n \mid X_1 < \ldots < X_k \ \text{ et } \ X_{k+1} < \ldots < X_n) \ . \tag{1.8}$$

b) Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, les π-*entiers* de la *première* et de la *deuxième espèce* sont définis par

$$\frac{1}{[n]_\pi} = \mathrm{Prob}(X_1 \leq \ldots \leq X_n \mid X_1 \leq \ldots \leq X_{n-1}) \tag{1.9}$$

$$\frac{1}{\langle n\rangle_\pi} = \mathrm{Prob}(X_1 < \ldots < X_n \mid X_1 < \ldots < X_{n-1}) \tag{1.10}$$

si $n > 0$ et par $[0]_\pi = \langle 0\rangle_\pi = 0$ si $n = 0$.

Les π-factorielles, les coefficients π-binomiaux et les π-entiers sont reliés entre eux comme dans le cas classique:

PROPOSITION 1.3. *Pour tous* $k,n \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$, *on a les formules*

$$\left[{n \atop k}\right]_\pi = \frac{[n]!_\pi}{[k]!_\pi [n-k]!_\pi} \quad , \quad [n]!_\pi = [1]_\pi [2]_\pi \ldots [n]_\pi \tag{1.11}$$

$$\left<{n \atop k}\right>_\pi = \frac{\langle n\rangle !_\pi}{\langle k\rangle !_\pi \langle n-k\rangle !_\pi} \quad , \quad \langle n\rangle !_\pi = \langle 1\rangle_\pi \langle 2\rangle_\pi \ldots \langle n\rangle_\pi \ . \tag{1.12}$$

DÉMONSTRATION. C'est presque immédiat. En effet, la Définition (1.7), l'indépendance et l'équidistribution des variables aléatoires $(X_k)_{k\geq 1}$ permettent d'écrire

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left[{n \atop k}\right]_\pi} &= \frac{\mathrm{Prob}(X_1 \leq \ldots \leq X_n)}{\mathrm{Prob}(X_1 \leq \ldots \leq X_k) \cdot \mathrm{Prob}(X_{k+1} \leq \ldots \leq X_n)} \\ &= \frac{1/[n]!_\pi}{(1/[k]!_\pi) \cdot (1/[n-k]!_\pi)} \ . \end{aligned}$$

D'où l'égalité de gauche dans (1.11). Quant à l'égalité de droite, elle provient du fait que

$$\mathrm{Prob}(X_1 \leq \ldots \leq X_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Prob}(X_1 \leq \ldots \leq X_{n-i+1} \mid X_1 \leq \ldots \leq X_{n-i}) \ .$$

Les égalités (1.12) se démontrent de façon analogue. □

Le lecteur remarquera que l'on a aussi les formules

$$\left[{n \atop k}\right]_\pi = \left[{n \atop n-k}\right]_\pi \quad , \quad [n]_\pi = \left[{n \atop 1}\right]_\pi \tag{1.13}$$

$$\left<{n \atop k}\right>_\pi = \left<{n \atop n-k}\right>_\pi \quad , \quad \langle n\rangle_\pi = \left<{n \atop 1}\right>_\pi \ . \tag{1.14}$$

La fonction exponentielle e^t possède aussi ses *π-analogues*. Voici comment ils sont définis.

DÉFINITION 1.4. Soit t une variable formelle. Les *π-exponentielles* de la *première* et de la *deuxième espèce* sont données par les séries formelles suivantes

$$e_\pi(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{[n]!_\pi} = \sum_{n\geq 0} \mathrm{Prob}(X_1 \leq \ldots \leq X_n)t^n \tag{1.15}$$

$$E_\pi(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{\langle n\rangle!_\pi} = \sum_{n\geq 0} \mathrm{Prob}(X_1<\ldots<X_n)t^n . \tag{1.16}$$

PROPOSITION 1.5. *En termes de la distribution* $\pi = (\pi_o,\pi_1,\ldots)$ *on a les développements explicites*

$$e_\pi(t) = \frac{1}{(1-\pi_o t)(1-\pi_1 t)(1-\pi_2 t)\ldots} \tag{1.17}$$

$$E_\pi(t) = (1+\pi_o t)(1+\pi_1 t)(1+\pi_2 t)\ldots \tag{1.18}$$

où les produits infinis sont pris au sens formel. On a de plus les égalités

$$e_\pi(t) \cdot E_\pi(-t) = E_\pi(t) \cdot e_\pi(-t) = 1 . \tag{1.19}$$

DÉMONSTRATION. Le coefficient de t^n dans (1.17) est donné par

$$\sum_{\alpha_o+\alpha_1+\ldots=n} \pi_o^{\alpha_o}\pi_1^{\alpha_1}\ldots = \sum_{i_1\leq\ldots\leq i_n} \pi_{i_1}\ldots\pi_{i_n} = \mathrm{Prob}(X_1\leq\ldots\leq X_n) .$$

Le coefficient de t^n dans (1.18) est donné par

$$\sum_{i_1<\ldots<i_n} \pi_{i_1}\ldots\pi_{i_n} = \mathrm{Prob}(X_1<\ldots<X_n) .$$

Quant aux égalités (1.19) elles découlent directement de (1.17) et (1.18). □

Posons maintenant le problème général qui consiste à étendre, de façon naturelle, les fonctions $[n]!_\pi$ et $\langle n\rangle!_\pi$ au cas où la variable entière n est remplacée par une variable complexe s. En d'autres termes:

Quels sont les π*-analogues* $\Gamma_\pi[s]$ *et* $\Gamma_\pi\langle s\rangle$ *pour la fonction gamma d'Euler?*

On voudrait que ces fonctions soient, autant que possible, méromorphes en s et qu'elles satisfassent les formules

$$\Gamma_\pi[s+1] = [s]_\pi\Gamma_\pi[s] \quad , \quad \Gamma_\pi\langle s+1\rangle = \langle s\rangle_\pi\Gamma_\pi\langle s\rangle . \tag{1.20}$$

Nous ne discuterons pas ici ce problème de prolongement tel que posé pour des distributions $\pi = (\pi_0,\pi_1,\pi_2,\ldots)$ arbitraires. Nous allons plutôt considérer certaines distributions π convenablement choisies et montrer (dans les deux prochaines sections) qu'il est possible de résoudre le problème correspondant de façon simple et élégante. Celà va nous donner l'occasion de mettre en évidence un cadre probabiliste commun pour les fonctions gamma d'Euler et de Jackson.

2. Distributions uniformes et fonction gamma d'Euler

La présente section, de nature plutôt élémentaire, considère le cas où la variable aléatoire X est uniforme et prend ses valeurs dans $\{0,1,\ldots,N-1\} \subseteq \mathbb{N}$. Nous allons montrer comment l'approche probabiliste générale de la section précédente permet, dans ce cas particulier, d'arriver directement à la fonction gamma d'Euler. Cette démarche nous servira d'ailleurs de guide dans la section 3 où nous introduirons la fonction q-gamma de Jackson par des méthodes probabilistes à peu près identiques. Dans ce cas, la variable aléatoire X sera remplacée par une variable aléatoire que nous appellerons q-*uniforme*.

Pour chaque entier $N \geq 1$ considérons la variable aléatoire uniforme $X = U^{(N)}$ qui prend les valeurs $0,1,2,\ldots,N-1$ avec équiprobabilité. Désignons par $\pi = \pi^{(N)} = (\pi_0^{(N)},\pi_1^{(N)},\ldots)$ la distribution de probabilités de $U^{(N)}$. On a donc

$$\pi_0^{(N)} = \pi_1^{(N)} = \ldots = \pi_{N-1}^{(N)} = 1/N \quad \text{et} \quad \pi_i = 0 \quad \text{si} \quad i \geq N . \tag{2.1}$$

Convenons des notations compactes

$$[n]!_N \ , \quad \langle n\rangle!_N \ , \quad e_N(t) \ , \quad E_N(t) \ , \quad \ldots \text{ etc.} \tag{2.2}$$

pour désigner respectivement

$$[n]!_{\pi^{(N)}} \ , \quad \langle n\rangle!_{\pi^{(N)}} \ , \quad e_{\pi^{(N)}}(t) \ , \quad E_{\pi^{(N)}}(t) \ , \quad \ldots \text{ etc.} \tag{2.2'}$$

Les expressions générales pour les π-exponentielles prennent, dans ce cas particulier, les formes suivantes:

$$e_N(t) = (1-t/N)^{-N} = \sum_{n\geq 0} t^n/[n]!_N \tag{2.3}$$

$$E_N(t) = (1+t/N)^N = \sum_{n\geq 0} t^n/\langle n\rangle!_N \, . \tag{2.4}$$

La formule du binôme de Newton permet alors d'écrire

$$1/[n]!_N = (-1)^n\binom{-N}{n}/N^n = \frac{1}{n!}(1+\tfrac{1}{N})(1+\tfrac{2}{N})\ldots(1+\tfrac{n-1}{N}) \tag{2.5}$$

$$= \binom{N+n-1}{N-1}/N^n = \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+N-1)}{(N-1)!\cdot N^n} \tag{2.6}$$

$$1/\langle n\rangle!_N = \binom{N}{n}/N^n = \frac{1}{n!}(1-\tfrac{1}{N})(1-\tfrac{2}{N})\ldots(1-\tfrac{n-1}{N}) \, . \tag{2.7}$$

On en déduit que les deux espèces de $\pi^{(N)}$-entiers sont donnés par

$$[n]_N = n/(1+(n-1)/N) \quad , \quad n \geq 0 \tag{2.8}$$

$$\langle n\rangle_N = \begin{cases} n/(1-(n-1)/N) & \text{si } n \leq N \\ \infty & \text{si } n > N \end{cases} \, . \tag{2.9}$$

Faisant $N \to \infty$ dans (2.5) et (2.7) on obtient les égalités

$$\lim_{N\to\infty} 1/[n]!_N = \lim_{N\to\infty} 1/\langle n\rangle!_N = 1/n! \tag{2.10}$$

qui expriment le fait probabilistiquement évident suivant:

Lorsque $(U_k^{(N)})_{k\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires uniformes indépendantes de même loi que $U^{(N)}$, alors

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{Prob}(U_1^{(N)} \leq \ldots \leq U_n^{(N)}) = \lim_{N\to\infty} \mathrm{Prob}(U_1^{(N)} < \ldots < U_n^{(N)}) = 1/n!$$

Comme Euler l'a remarqué, la variable entière n n'apparaît que polynomialement et exponentiellement dans le membre de droite de (2.6). On peut donc remplacer cette variable n par une *variable complexe* s et passer à la limite $(N \to \infty)$ pour *définir* $s!$ par la formule

$$1/s! = \lim_{N\to\infty} \frac{(s+1)(s+2)\ldots(s+N-1)}{1\cdot 2\ldots(N-1)} N^{-s} \quad , \quad s \in \mathbb{C} \, . \tag{2.11}$$

Pour des raisons historiques, la fonction gamma est, quant à elle, définie par

$$\Gamma(s) = (s-1)!\ . \tag{2.12}$$

Une renormalisation de (2.11) permet d'exprimer cette fonction par la formule classique

$$1/\Gamma(s) = \lim_{N\to\infty} s \cdot \frac{(1+s)(2+s)\dots(N+s)}{1\cdot 2\dots N} \cdot N^{-s} \quad , \quad s \in \mathbb{C} \tag{2.13}$$

qui montre en outre que l'équation fonctionnelle fondamentale

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \tag{2.14}$$

est satisfaite. Introduisant dans (2.13) des facteurs exponentiels de convergence, on obtient immédiatement le produit weierstrassien pour la fonction gamma comme suit

$$\begin{aligned} 1/\Gamma(s) &= s \cdot \lim_{N\to\infty} (1+\tfrac{s}{1})(1+\tfrac{s}{2})\dots(1+\tfrac{s}{N})e^{-s\,\ell n\,N} \\ &= s \cdot \lim_{N\to\infty} e^{(1+\frac{1}{2}+\dots+1/N-\ell n\,N)s}(1+\tfrac{s}{1})e^{-\frac{s}{1}}\dots(1+\tfrac{s}{N})e^{-\frac{s}{N}} \\ &= s\, e^{\gamma s} \prod_{\mu=1}^{\infty} (1+\tfrac{s}{\mu})e^{-\frac{s}{\mu}} \end{aligned} \tag{2.15}$$

où

$$\gamma = \lim_{N\to\infty} (1+\tfrac{1}{2}\ \dots + 1/N - \ell n\, N) \quad \text{est la constante d'Euler.}$$

Ce produit infini, qui converge uniformément en s sur tout compact du plan complexe, montre que la fonction $1/\Gamma(s)$ est une fonction *entière* dont les zéros sont simples et situés aux entiers négatifs $0,-1,-2,\dots$ On en déduit que la fonction $\Gamma(s)$ est *méromorphe* dans $\mathbb{C}$, n'a pas de zéros et que ses pôles, tous simples, sont situés aux entiers négatifs $0,-1,-2,\dots$ De plus, l'équation fonctionnelle (2.14) ainsi que (2.15) montrent que le résidu de $\Gamma(s)$ au pôle $s = -\mu$ est donné par

$$\text{Rés}(\Gamma(s),-\mu) = (-1)^{\mu}/\mu! \quad , \quad \mu = 0,1,2,\dots \tag{2.16}$$

Les formules (2.11) à (2.16) sont évidemment très bien connues. Nous les avons incluses ici puisqu'elles vont nous permettre de mieux souligner (section 4) les analogies fondamentales qui existent entre la fonction gamma d'Euler et le prolongement analytique de la fonction q-gamma de Jackson.

Incidemment, la fonction gamma d'Euler permet, en regard de (2.5) et (2.7), d'effectuer l'interpolation de $[n]!_N$ et $<n>!_N$ en posant

$$\Gamma[s]_N = \frac{(N-1)!}{\Gamma(N+s-1)} \cdot N^{s-1}\Gamma(s) , \tag{2.17}$$

$$\Gamma<s>_N = \frac{\Gamma(N-s+2)}{N!} \cdot N^{s-1}\Gamma(s) . \tag{2.18}$$

On vérifie alors que

$$\Gamma[n+1]_N = [n]!_N \quad , \quad \Gamma<n+1>_N = <n>!_N , \tag{2.19}$$

$$\Gamma[s+1]_N = [s]_N\Gamma[s]_N \quad , \quad \Gamma<s+1>_N = <s>_N\Gamma<s>_N , \tag{2.20}$$

$$\lim_{N\to\infty} \Gamma[s]_N = \lim_{N\to\infty} \Gamma<s>_N = \Gamma(s) . \tag{2.21}$$

3. Distributions q-uniformes et fonction q-gamma de Jackson

Nous allons maintenant montrer comment on peut obtenir les q-analogues classiques décrits dans l'introduction en spécialisant les formules générales de la section 1 au cas où la variable aléatoire X suit une loi géométrique. En approximant ensuite la loi géométrique par des lois q-*uniformes* à valeurs dans $\{0,1,\ldots,N-1\}$, nous obtiendrons alors directement la fonction q-gamma de Jackson via une démarche tout à fait parallèle à celle de la section précédente.

Soit $q \in \mathbb{R}$ tel que $0 < q < 1$ et supposons que la variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre q donnée par

$$\pi_k = \text{Prob}(X=k) = q^k(1-q) \quad , \quad k = 0,1,2,\ldots \tag{3.1}$$

On a la proposition suivante:

PROPOSITION 3.1. *Les exponentielles et factorielles généralisées associées à la variable aléatoire géométrique* X *dont la distribution de probabilités est donnée par* (3.1) *sont les* q-*analogues classiques des exponentielles et factorielles. On a les formules explicites*

$$e_q(t) = \frac{1}{(1-(1-q)t)(1-(1-q)qt)(1-(1-q)q^2t)\ldots} \tag{3.2}$$

$$= \sum_{n\geq 0} \left(\frac{1-q}{1-q}\right)\left(\frac{1-q}{1-q^2}\right)\ldots\left(\frac{1-q}{1-q^n}\right)t^n \tag{3.3}$$

$$E_q(t) = (1+(1-q)t)(1+(1-q)qt)(1+(1-q)q^2t)\ldots \tag{3.4}$$

$$= \sum_{n\geq 0} q^{\frac{1}{2}n(n-1)}\left(\frac{1-q}{1-q}\right)\left(\frac{1-q}{1-q^2}\right)\ldots\left(\frac{1-q}{1-q^n}\right)t^n \tag{3.5}$$

$$[n]!_q = \left(\frac{1-q}{1-q}\right)\left(\frac{1-q^2}{1-q}\right)\ldots\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) \tag{3.6}$$

$$\langle n\rangle!_q = q^{-\frac{1}{2}n(n-1)}\left(\frac{1-q}{1-q}\right)\left(\frac{1-q^2}{1-q}\right)\ldots\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) . \tag{3.7}$$

DÉMONSTRATION. Les produits infinis (3.2) et (3.4) s'obtiennent directement de la Proposition 1.5 par simple substitution de (3.1) dans (1.17) et (1.18). Il est facile de voir que ces produits infinis satisfont les équations fonctionnelles

$$(1-(1-q)t)e_q(t) = e_q(qt) , \tag{3.8}$$

$$(1+(1-q)t)E_q(qt) = E_q(t) . \tag{3.9}$$

La méthode des coefficients indéterminés et ces équations fonctionnelles permettent alors de conclure aux égalités (3.3) et (3.5). Les égalités (3.6) et (3.7) découlent alors de la Définition 1.4. □

REMARQUES. A cause de (3.6) et (3.7), les q-entiers de la première et de la deuxième espèce sont donnés par

$$[n]_q = \frac{1-q^n}{1-q} \quad \text{et} \quad \langle n\rangle_q = q^{-(n-1)} \cdot \frac{1-q^n}{1-q} . \tag{3.10}$$

On a de plus la relation suivante entre $[n]!_q$ et $\langle n\rangle!_q$

$$<n>!_q = q^{-\frac{1}{2}n(n-1)}[n]!_q \ . \tag{3.11}$$

On en conclut que pour interpoler $[n]!_q$ et $<n>!_q$, il suffit de savoir interpoler $[n]!_q$ seulement. En effet, si on réussit à définir $\Gamma_q[s]$ telle que

$$\Gamma_q[n+1] = [n]!_q \quad \text{et} \quad \Gamma_q[s+1] = [s]_q\Gamma_q[s] \ , \tag{3.12}$$

où $n \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{C}$ et $[s]_q = \frac{1-q^s}{1-q}$, il suffira alors de définir $\Gamma_q<s>$ par la formule

$$\Gamma_q<s> = q^{-\frac{1}{2}(s-1)(s-2)}\Gamma_q[s] \ . \tag{3.13}$$

On aura alors aussi les formules

$$\Gamma_q<n+1> = <n>!_q \quad \text{et} \quad \Gamma_q<s+1> = <s>_q\Gamma_q<s> \tag{3.14}$$

où $n \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{C}$ et $<s>_q = q^{-(s-1)} \cdot (\frac{1-q^s}{1-q})$.

Cependant, on ne peut remplacer directement la variable entière n par une variable complexe dans le produit *cummulatif* de n facteurs contenu dans l'égalité

$$[n]!_q = \frac{1-q}{1-q} \cdot \frac{1-q^2}{1-q} \cdot \ldots \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \ .$$

C'est ici que la notion de distribution q-uniforme entre en jeu dans ce problème d'interpolation.

DÉFINITION 3.2. Soit $q \in \mathbb{R}$ tel que $0 < q < 1$ et soit N un entier ≥ 1 . Une variable aléatoire entière $X = U^{(q,N)}$ est appelée *q-uniforme* sur $\{0,1,\ldots,N-1\}$ si sa distribution de probabilités $\pi = \pi^{(q,N)} = (\pi_0^{(q,N)},\pi_1^{(q,N)},\ldots)$ est donnée par

$$\pi_k = \pi_k^{(q,N)} = \begin{cases} \frac{q^k}{[N]} & \text{si} \quad 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & \text{si} \quad k \geq N \end{cases} \tag{3.15}$$

où $[N] = [N]_q = \frac{1-q^N}{1-q}$.

Le lecteur notera que lorsque $q \uparrow 1$ la loi q-uniforme sur $\{0,1,\ldots,N-1\}$ tend vers la loi uniforme sur $\{0,1,\ldots,N-1\}$ utilisée dans la section 2. De plus, lorsque $N \to \infty$, la loi q-uniforme sur $\{0,1,\ldots,N-1\}$ tend vers la loi géométrique introduite plus haut. Nous sommes donc dans une situation tout à fait semblable à celle que nous avons rencontrée lors de notre discussion de la fonction gamma d'Euler. Afin de poursuivre cette analogie plus à fond, nous allons calculer les factorielles généralisées associées à la variable aléatoire $X = U^{(q,N)}$. Utilisons à cet effet le lemme suivant.

LEMME 3.3 (q-analogue du binôme de Newton). *On a les formules*

$$\frac{1}{(1-Z)(1-qZ)\ldots(1-q^{N-1}Z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[{N+k-1 \atop k}\right] Z^k \tag{3.16}$$

$$(1+Z)(1+qZ)\ldots(1+q^{N-1}Z) = \sum_{k=0}^{N} q^{\frac{1}{2}k(k-1)} \left[{N \atop k}\right] Z^k \tag{3.17}$$

où $\left[{N \atop k}\right] = \frac{[N]!}{[k]![N-k]!}$ et $[k]! = \frac{1-q}{1-q} \cdot \frac{1-q^2}{1-q} \cdot \ldots \cdot \frac{1-q^k}{1-q}$.

DÉMONSTRATION. Ces formules sont classiques dans la théorie des q-analogues. Elles peuvent facilement se démontrer par induction sur N par exemple. □

On notera que les formules (3.16) et (3.17) tendent vers les formules du binôme de Newton habituelles lorsque $q \uparrow 1$. D'où la terminologie utilisée dans le lemme.

PROPOSITION 3.4. *Les factorielles généralisées de la première et de la deuxième espèce* $[n]!_{q,N}$ *et* $\langle n\rangle!_{q,N}$ *associées à la variable aléatoire* $X = U^{(q,N)}$ *sont données par les égalités*

$$\frac{1}{[n]!_{q,N}} = \left[{N+n-1 \atop n}\right]/[N]^n = \left[{N+n-1 \atop n-1}\right]/[N]^n$$

$$= \frac{[n+1][n+2]\ldots[n+N-1]}{[1][2]\ldots[N-1]} \cdot \frac{1}{[N]^n} \tag{3.18}$$

$$\frac{1}{\langle n\rangle!_{q,N}} = q^{\frac{1}{2}n(n-1)} \left[{N \atop n}\right]/[N]^n . \tag{3.19}$$

DÉMONSTRATION. Posant $Z = t/[N]$ dans les formules (3.16) et (3.17) du lemme, on obtient des expressions pour les exponentielles $e_{q,N}(t)$ et $E_{q,N}(t)$ associées à la variable aléatoire q-uniforme $U^{(q,N)}$. Les égalités (3.18) et (3.19) découlent de l'identification du coefficient de t^n dans ces expressions. □

Remplaçant la variable entière n par une variable complexe dans (3.18) on arrive, comme dans la démarche d'Euler rappelée plus haut, au q-analogue suivant pour la fonction gamma.

DÉFINITION 3.5. Pour $0 < q < 1$, le q-analogue pour la fonction gamma est la fonction $\Gamma_q[s]$ définie par

$$\Gamma_q[s] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{[s]} \cdot \frac{[1][2]\ldots[N]}{[s+1][s+2]\ldots[s+N]} \cdot [N]^s \tag{3.20}$$

où $[t] = (1-q^t)/(1-q)$ est l'interpolation naturelle de $[n]$ lorsque $t \in \mathbb{C}$ et où $q^t = e^{t \ell n\, q}$.

Remarquons que lorsque l'on pose $q = 1$ dans la formule (3.20) on retrouve le produit d'Euler habituel pour $\Gamma(s)$ (i.e. $\Gamma_1[s] = \Gamma(s)$). De plus, étant donné que, pour $0 < q < 1$,

$$\lim_{N\to\infty} [N] = \lim_{N\to\infty} \frac{1-q^N}{1-q} = \frac{1}{1-q} \;,$$

la fonction $\Gamma_q[s]$ peut aussi s'écrire sous la forme du produit infini suivant

$$\Gamma_q[s] = \frac{1}{(1-q)^{s-1}} \cdot \frac{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\ldots}{(1-q^s)(1-q^{s+1})(1-q^{s+2})\ldots} \,. \tag{3.21}$$

On vérifie que ce produit converge *uniformément* sur tout compact du plan complexe excluant les points s qui annulent les facteurs $(1-q^{s+\mu})$, $\mu \in \mathbb{N}$, entrant dans le dénominateur.

En conséquence, la fonction $\Gamma_q[s]$ est *méromorphe* dans $\mathbb{C}$, n'a pas de racines, et ses pôles sont tous *simples* et situés sur le *demi-réseau* infini

$$\mathcal{D} = \{-\mu + \frac{2k\pi i}{\ell n\, q} \mid \mu \in \mathbb{N} \,,\, k \in \mathbb{Z}\} \,. \tag{3.22}$$

On vérifiera facilement que cette fonction satisfait bien les équations fonctionnelles (3.12) énoncées plus haut.

Incidemment, l'étude du cas où $q > 1$ se ramène directement à celui où $0 < q < 1$ puisque l'on a

$$[n]!_{1/q} = q^{\frac{1}{2}n(n-1)}[n]!_q \ . \tag{3.23}$$

NOTE. La fonction $\Gamma_q[s]$ donnée par (3.20) a été introduite pour la première fois (pour s réel) par F.H. Jackson [6] dans le cadre de l'étude de son concept de *q-intégration*. En fait, la q-intégration $[\int]$ est l'opération inverse de la q-dérivation $[d/dt]$ définie par la formule

$$[\frac{d}{dt}]\varphi(t) = \frac{\varphi(t) - \varphi(qt)}{(1-q)t} \ . \tag{3.24}$$

L'opérateur $[d/dt]$ a le même effet sur les séries du type $\sum a_n t^n/[n]!$ que l'opérateur d/dt sur les séries du type $\sum a_n t^n/n!$. On a en particulier $[d/dt]e(t) = e(t)$. La q-intégration revient à résoudre l'équation

$$[\frac{d}{dt}]\varphi(t) = \psi(t) \tag{3.25}$$

pour la fonction (ou série) inconnue $\varphi(t)$. On vérifie que l'on a

$$[d/dt]\varphi(t) = \psi(t) \iff \varphi(t) - \varphi(q^n t) = (1-q)t \sum_{k=0}^{n-1} q^k\psi(q^k t) \tag{3.26}$$

pour $n = 0,1,2,3,...$ Utilisant des notations quelque peu différentes de celles de Jackson, la notion de q-intégration peut se formuler comme suit (pour $0 < q < 1$):

a) la q-intégrale de ψ entre les bornes $q^n t$ et t est donnée par

$$[\int]_{q^n t}^{t} \psi = (1-q)t \sum_{k=0}^{n-1} q^k\psi(q^k t) \ . \tag{3.27}$$

b) la q-intégrale de ψ entre les bornes 0 et t est donnée par

$$[\int]_{0}^{t} \psi = (1-q)t \sum_{k=0}^{\infty} q^k\psi(q^k t) \ . \tag{3.28}$$

Avec ces notations, la représentation q-intégrale de Jackson pour la fonction $\Gamma_q[s]$ peut s'écrire

$$\Gamma_q[s] = [\int]_{[0]}^{[\infty]} t^{s-1} E(-qt) \quad , \quad \text{Re } s > 0 \ . \tag{3.29}$$

Ainsi, l'analogie avec la formule intégrale d'Euler

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t}\, dt \quad , \quad \text{Re } s > 0 \tag{3.30}$$

apparaît dans toute sa clarté.

La formule (3.29) peut facilement être établie comme suit. On remarque d'abord que $[0] = 0$, $[\infty] = \lim\limits_{N\to\infty} [N] = 1/(1-q)$. On obtient ensuite via (3.28) et (3.4)

$$[\int]_{[0]}^{[\infty]} = \sum_{k\geq 0} q^k \left(\frac{q^k}{1-q}\right)^{s-1} (1-q^{k+1})(1-q^{k+2})(1-q^{k+3})\dots$$

$$= \frac{1}{(1-q)^{s-1}} (1-q)(1-q^2)\dots \sum_{n\geq 0} \frac{q^{ns}}{(1-q)\dots(1-q^n)} = \Gamma_q[s]$$

à cause de la formule (4.60) établie plus bas.

4. Etude du prolongement analytique (en q) de la fonction $\Gamma_q[s]$

Jusqu'ici, la fonction $\Gamma_q[s]$ n'a été définie que pour $s \in \mathbb{C}$ et $q \in (0,1) \subseteq \mathbb{R}$. Afin de mieux souligner le fait que cette fonction dépend aussi de la variable q , nous allons utiliser les notations suivantes

$$\Gamma_q[s] = \Gamma[s,q] \quad , \quad [s]_q = [s,q] \quad , \quad \text{etc.} \tag{4.1}$$

La fonction

$$\Gamma[s,q] = \frac{1}{(1-q)^{s-1}} \cdot \frac{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\dots}{(1-q^s)(1-q^{s+1})(1-q^{s+2})\dots} \tag{4.2}$$

dépend en fait de trois choses:

a) q ;

b) $(1-q)^{s-1} = e^{(s-1)\ell n(1-q)} = e^{-(s-1)(q+\frac{1}{2}q^2+\frac{1}{3}q^3+\dots)}$;

c) $q^s = e^{s\,\ell n\, q}$.

Donc, si on veut prolonger cette fonction à tout le disque unité pointé

$$\{q \mid 0 < |q| < 1\} \subseteq \mathbb{C} \tag{4.3}$$

nous sommes forcés de choisir une détermination de $\ell n\, q$ dans c). Une façon d'éviter ceci est de poser (selon l'usage établi dans la théorie des fonctions elliptiques) :

$$q = e^{2\pi i\tau} \quad , \quad \operatorname{Im} \tau > 0 \tag{4.4}$$

$$\ell n\, q = 2\pi i\tau \quad , \quad q^s = e^{2\pi i\tau s} \ . \tag{4.5}$$

Techniquement parlant, (4.4) constitue un revêtement simplement connexe du disque unité pointé (4.3) par le demi-plan supérieur ouvert $\operatorname{Im} \tau > 0$.

En substituant (4.4) dans (4.2), on obtient une fonction de s et de τ que nous désignerons par $\Gamma[s|\tau]$. De même nous poserons

$$[s|\tau] = [s,e^{2\pi i\tau}] = \frac{1 - e^{2\pi i\tau s}}{1 - e^{2\pi i\tau}} \ .$$

PROPOSITION 4.1. a) *La fonction*

$$\Gamma[s|\tau] = \Gamma[s,e^{2\pi i\tau}]$$

est une fonction méromorphe *en* $s \in \mathbb{C}$ *et* holomorphe *en* τ *pour* $\operatorname{Im} \tau > 0$. *Les pôles (en* s *) de cette fonction sont tous* simples *et situés sur le* demi-réseau:

$$\mathcal{D}_\tau = \{-\mu + \frac{\nu}{\tau} \mid \mu \in \mathbb{N} \ , \ \nu \in \mathbb{Z}\} \ . \tag{4.6}$$

Cette fonction n'a aucun zéro en s *ni en* τ .

b) *Les équations fonctionnelles suivantes sont satisfaites*

$$\Gamma[s+1|\tau] = [s|\tau]\Gamma[s|\tau] \tag{4.7}$$

$$\Gamma[s+\frac{1}{\tau}\,|\,\tau] = (1-q)^{-\frac{1}{\tau}}\,\Gamma[s|\tau]\ , \tag{4.8}$$

$$\Gamma[s|\tau+1] = (1-q)^{\frac{s}{\tau}}\,\Gamma[(1+\frac{1}{\tau})s|\tau]\ . \tag{4.9}$$

c) *Le résidu de* $\Gamma[s|\tau]$ *au pôle* $s = -\mu + \frac{\nu}{\tau} \in \mathcal{D}_\tau$ *est donné par*

$$\text{Rés}(\Gamma[s|\tau],-\mu+\nu/\tau) = (-1)^{\mu}\,\frac{q-1}{2\pi i\tau}\cdot\frac{q^{\frac{1}{2}\mu(\mu+1)}}{[\mu]!}\cdot(1-q)^{-\nu/\tau}\ . \tag{4.10}$$

DÉMONSTRATION. a) Le demi-réseau $\mathcal{D}_\tau$ donné par (4.6) n'est qu'une traduction du demi-réseau $\mathcal{D}$ donné par (3.22) via $q = e^{2\pi i\tau}$. On vérifie directement par les techniques usuelles, que le produit infini

$$\Gamma[s|\tau] = \frac{1}{(1-e^{2\pi i\tau})^{s-1}}\cdot\frac{(1-e^{2\pi i\tau})(1-e^{4\pi i\tau})\ldots}{(1-e^{2\pi i\tau s})(1-e^{2\pi i\tau(s+1)})\ldots} \tag{4.11}$$

converge uniformément en s sur tout compact $K \subseteq \mathbb{C}\backslash\mathcal{D}_\tau$ et uniformément en τ sur tout compact L situé dans le demi-plan supérieur $\operatorname{Im}\tau > 0$. D'où la méromorphie en s , l'holomorphie en τ et la non-existence de zéros.

b) Les formules (4.7) et (4.8) se déduisent par simples calculs en remplaçant s par $s+1$ dans (4.11) . Le groupe des transformations homographiques $\tau \mapsto (a\tau+b)/(c\tau+d)$ qui laissent invariant le demi-réseau (orienté) $\mathcal{D}_\tau$ est formé de toutes les translations

$$\tau \mapsto \tau + k\quad ,\quad k \in \mathbb{Z}\ .$$

L'équation (4.9) (qui se déduit aussi de (4.11)) apparaît donc comme une formule décrivant la modification que subit la fonction $\Gamma[s|\tau]$ sous l'action du générateur $\tau \mapsto \tau + 1$ de ce groupe.

c) Faisant tendre s vers $-\mu + \nu/\tau$ dans l'expression $(s+\mu-\nu/\tau)\Gamma[s|\tau]$ on obtient, tenant compte des équations fonctionnelles (4.7) et (4.8),

$$\text{Rés}(\Gamma[s|\tau],-\mu+\nu/\tau) = \lim \frac{(1-q)^{-\nu/\tau}}{[s][s+1]\ldots[s+\mu-1]} \cdot (s+\mu-\nu/\tau)\Gamma[s+\mu-\nu/\tau|\tau]$$

$$= \frac{(1-q)^{-\nu/\tau}}{[-\mu][-\mu+1]\ldots[-1]} \cdot \lim_{t\to 0} t\Gamma[t|\tau]$$

$$= \frac{(-1)^{\mu}q^{\frac{1}{2}\mu(\mu+1)}}{[\mu]!}(1-q)^{-\nu/\tau} \cdot \frac{q-1}{2\pi i\tau}$$

où la dernière égalité est due au fait que $[-r] = -q^{-r}[r]$ et (voir (4.11)) $\lim_{t\to 0} t\Gamma[t|\tau] = (q-1)/(2\pi i\tau)$. □

Le lecteur remarquera que lorsque $q \uparrow 1$ (i.e. $\tau \downarrow 0$), alors le demi-réseau $\mathcal{D}_\tau$ se réduit, à la limite, à l'ensemble des pôles $0,-1,-2,-3,\ldots$ de la fonction $\Gamma(s)$ d'Euler. Quant à la formule (4.10), elle se dégénère dans ce cas en la formule habituelle $\text{Rés}(\Gamma(s),-\mu) = \frac{(-1)^{\mu}}{\mu!}$. Finalement, tout comme dans le cas de $1/\Gamma(s)$, la fonction $1/\Gamma[s|\tau]$ est *entière* en s .

Par analogie avec la fonction périodique bien connue

$$\Lambda(s) = \Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}, \tag{4.13}$$

nous allons maintenant associer à la fonction $\Gamma[s|\tau]$ une fonction que nous désignerons par $\Lambda[s|\tau]$ (= $B_q(s,1-s)$ selon les notations de [1]).

PROPOSITION 4.2. a) *La fonction* $\Lambda[s|\tau]$ *définie par*

$$\Lambda[s|\tau] = \Gamma[s|\tau] \cdot \Gamma[1-s|\tau] \tag{4.14}$$

est une fonction méromorphe *en* $s \in \mathbb{C}$ *et* holomorphe *en* τ *pour* $\text{Im}\,\tau > 0$. *Les pôles (en* s *) de cette fonction sont tous* simples *et situés sur le* réseau complet:

$$\mathcal{R}_\tau = \{\mu + \tfrac{\nu}{\tau} \mid \mu \in \mathbb{Z}\ ,\ \nu \in \mathbb{Z}\}\ . \tag{4.15}$$

Cette fonction n'a aucun zéro ni en s *ni en* τ .

b) *Les équations fonctionnelles suivantes sont satisfaites*

$$\Lambda[s+1|\tau] = -e^{2\pi i\tau s}\Lambda[s|\tau] \tag{4.16}$$

$$\Lambda[s+\frac{1}{\tau}\mid\tau] = \Lambda[s|\tau] \ . \tag{4.17}$$

c) *Le résidu de* $\Lambda[s|\tau]$ *au pôle* $s = \mu + \frac{\nu}{\tau} \in R_\tau$ *est donné par*

$$\text{Rés}(\Lambda[s|\tau],\mu+\frac{\nu}{\tau}) = (-1)^\mu \frac{q-1}{2\pi i\tau} \cdot q^{\frac{1}{2}\mu(\mu-1)} \ . \tag{4.18}$$

En fait, la fonction $1/\Lambda[s|\tau]$ *est une* fonction thêta *(en* s *) au sens de la théorie des fonctions elliptiques.*

DÉMONSTRATION. a) Ceci découle immédiatement des propriétés de la fonction $\Gamma[s|\tau]$ établies plus haut et du fait que $R_\tau = \mathcal{D}_\tau \cup (1-\mathcal{D}_\tau)$.

b) Il suffit d'utiliser les équations fonctionnelles (4.7) et (4.8).

c) Tenant compte de (4.16) et (4.17), on a successivement

$$\begin{aligned}\text{Rés}(\Lambda[s|\tau],\mu+\nu/\tau) &= \text{Rés}(\Lambda[s|\tau],\mu)\\ &= \lim_{s\to\mu}(s-\mu)\Lambda[s|\tau]\\ &= \lim_{s\to\mu}(-1)^\mu q^{\mu s-\frac{1}{2}\mu(\mu+1)}(s-\mu)\Lambda[s-\mu|\tau]\\ &= (-1)^\mu q^{\frac{1}{2}\mu(\mu-1)} \lim_{t\to 0} t\Gamma[t|\tau]\Gamma[1-t|\tau] = (-1)^\mu q^{\frac{1}{2}\mu(\mu-1)} \cdot \frac{q-1}{2\pi i\tau}\end{aligned}$$

puisque le résidu de $\Gamma[t|\tau]$ en $t = 0$ est égal, par (4.10), à $(q-1)/2\pi i\tau$. Rappelons enfin qu'une fonction thêta, au sens de la théorie classique des fonctions elliptiques, est une fonction entière $\Theta(s)$ qui est doublement "semi"-périodique au sens suivant [10]: il existe deux périodes indépendantes ω_1 et ω_2 et quatre constantes α_1 , β_1 , α_2 , β_2 telles que, pour tout $s \in \mathbb{C}$ on ait

$$\Theta(s+\omega_i) = e^{\alpha_i s+\beta_i}\,\Theta(s) \quad , \quad i = 1,2 \ . \tag{4.19}$$

Prenant $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1/\tau$, $\alpha_1 = i\pi$, $\beta_1 = -2\pi i\tau$, $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ on voit que la fonction entière $1/\Lambda[s|\tau]$ est une fonction thêta particulière dont les zéros, tous simples, sont situés aux points du réseau complet R_τ . □

REMARQUE. Soient ω_1 , ω_2 deux nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$. Ces deux nombres engendrent un réseau discret

$$\Omega = \{n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \mid n_1 \in \mathbb{Z} \, , \, n_2 \in \mathbb{Z}\} \, . \tag{4.20}$$

On sait que toute fonction elliptique $f(s)$ de périodes ω_1 , ω_2 (i.e. $f(s)$ est méromorphe dans $\mathbb{C}$ et satisfait $f(s+\omega_i) = f(s)$, $i = 1,2$) peut s'exprimer sous la forme

$$f(s) = A \frac{\sigma(s-a_1)\sigma(s-a_2)\ldots\sigma(s-a_n)}{\sigma(s-b_1)\sigma(s-b_2)\ldots\sigma(s-b_n)} \, , \quad A = \text{const.} \tag{4.21}$$

Les a_i et b_j , satisfaisant $\sum a_i = \sum b_j$, sont des représentants bien choisis, modulo Ω , des zéros α_i et des pôles β_j de $f(s)$ situés dans le parallélogramme fondamental des périodes ω_1 , ω_2 . Quant à la fonction $\sigma(s)$, c'est la fonction *sigma* de Weierstrass qui est définie par le produit infini suivant

$$\sigma(s) = \sigma(s;\omega_1,\omega_2) = s \prod_{\omega\in\Omega^*} (1-\frac{s}{\omega})e^{\frac{s}{\omega}+\frac{1}{2}(\frac{s}{\omega})^2} \tag{4.22}$$

où $\Omega^* = \Omega\setminus\{0\}$. Il est bien connu que cette fonction est une fonction thêta dont les zéros sont tous simples et situés aux sommets du réseau Ω . En fait, la fonction $1/\Lambda[s|\tau]$ est intimement reliée à la fonction $\sigma(s)$ puisque l'on verra plus loin (formule (4.46)) que

$$\frac{1}{\Lambda[s|\tau]} = e^{a+bs+cs^2}\sigma(s;1,1/\tau) \tag{4.23}$$

où a , b , c , qui ne dépendent que de τ , seront explicitées. En regard de la formule (4.21) il apparaît donc que toute fonction elliptique $f(s)$ de périodes $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1/\tau$ (ce qui ne restreint pas la généralité) peut s'exprimer à l'aide de la fonction $\Lambda[s] = \Lambda[s|\tau]$ sous la forme

$$f(s) = B \frac{\Lambda[s-b_1]\Lambda[s-b_2]\ldots\Lambda[s-b_n]}{\Lambda[s-a_1]\Lambda[s-a_2]\ldots\Lambda[s-a_n]} \, , \quad B = \text{const.} \tag{4.24}$$

Il est donc possible de fonder toute la théorie des fonctions elliptiques sur les propriétés de la fonction $\Lambda[s|\tau]$.

Par analogie avec le produit infini (2.15) pour la fonction $\Gamma(s)$ d'Euler, nous allons maintenant exprimer la fonction $\Gamma[s|\tau]$ sous la forme d'un produit weierstrassien. L'expression que nous obtiendrons fera ressortir deux constantes γ_τ et λ_τ qui sont, en quelque sorte, des *q-analogues de la constante d'Euler* γ. De plus, les constantes a, b, c dans (4.23) pourront s'exprimer simplement à l'aide de la constante λ_τ.

PROPOSITION 4.3. *La fonction* $\Gamma[s|\tau]$ *peut s'écrire sous la forme*

$$\frac{1}{\Gamma[s|\tau]} = \frac{2\pi i\tau}{q-1}\, s e^{\gamma_\tau s + \frac{1}{2}\lambda_\tau s^2} \prod_{\omega\in\mathcal{D}_\tau^*} \left(1-\frac{s}{\omega}\right) e^{\frac{s}{\omega}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{\omega}\right)^2} \tag{4.25}$$

où $\mathcal{D}_\tau^* = \mathcal{D}_\tau\backslash\{0\}$, $\mathcal{D}_\tau$ *étant le demi-réseau* (4.6), *et où* γ_τ *et* λ_τ *sont deux constantes (de type constante d'Euler) données explicitement par*

$$\gamma_\tau = \pi i\tau + \lim_{N\to\infty} \frac{2\pi i\tau}{q-1} \sum_{k=1}^{N} \frac{q^k}{[k]} - \ell n[N] \tag{4.26}$$

et

$$\lambda_\tau = -\frac{1}{3}\pi^2\tau^2 - \left(\frac{2\pi i\tau}{q-1}\right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{[k]^2}\ , \quad q = e^{2\pi i\tau}\ . \tag{4.27}$$

Avant de démontrer ces formules, on remarquera qu'elles se dégénèrent respectivement, dans le cas limite $\tau = 0$ (i.e. $q = 1$), en (2.15), $\gamma_0 = \gamma$ = constante d'Euler habituelle et $\lambda_0 = -\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = -\pi^2/6$. Dans le cas où $\operatorname{Im}\tau > 0$ (i.e. $0 < |q| < 1$), les constantes γ_τ et λ_τ peuvent aussi s'écrire sous les formes

$$\gamma_\tau = \ell n(1-q) + 2\pi i\tau \left\{\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1-q^n}\right\} \tag{4.28}$$

$$\lambda_\tau = (2\pi i\tau)^2 \left\{\frac{1}{12} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{(1-q^n)^2}\right\} \tag{4.29}$$

puisque $[k] = (1-q^k)/(1-q)$ et $\lim_{N\to\infty} [N] = 1/(1-q)$ dans ce cas.

DÉMONSTRATION. Par définition, on a

$$\frac{1}{\Gamma[s|\tau]} = \lim_{N\to\infty} [s] \cdot \frac{[s+1]}{[1]} \cdot \frac{[s+2]}{[2]} \cdot \ldots \cdot \frac{[s+N]}{[N]} \cdot [N]^{-s} \ . \tag{4.30}$$

Or, pour tout $t \in \mathbb{C}$, on peut écrire

$$[t] = \frac{1-q^t}{1-q} = q^{\frac{1}{2}t} \cdot \frac{q^{\frac{1}{2}t} - q^{-\frac{1}{2}t}}{q-1} = 2i \ \frac{q^{\frac{1}{2}t}}{q-1} \quad \sin(\pi\tau t) \tag{4.31}$$

puisque $q = e^{2\pi i\tau}$. Utilisant l'expression bien connue

$$\sin \pi Z = \lim_{M\to\infty} \pi Z \prod_{\nu=-M}^{M}{}^{*} \left(1 - \frac{Z}{\nu}\right) \tag{4.32}$$

(où Π^* signifie que l'indice $\nu = 0$ est omis), on trouve les formules

$$[s] = \frac{2\pi i\tau}{q-1} e^{\pi i\tau s} \ s \lim_{M\to\infty} \prod_{\nu=-M}^{M}{}^{*} \left(1 - \frac{s}{\nu/\tau}\right) \tag{4.33}$$

et, pour $\mu = 1,2,\ldots,N$,

$$\frac{[s+\mu]}{[\mu]} = e^{\pi i\tau s} \lim_{M\to\infty} \prod_{\nu=-M}^{M} \left(1 - \frac{s}{-\mu+\nu/\tau}\right) \ . \tag{4.34}$$

Substituant (4.33) et (4.34) dans (4.30), on obtient

$$\frac{q-1}{2\pi i\tau \ \Gamma[s|\tau]} = s \lim_{N\to\infty} e^{-s \ \ell n[N]} e^{(N+1)\pi i\tau s} \cdot \lim_{M\to\infty} \hat{\Pi}\left(1 - \frac{s}{-\mu+\nu/\tau}\right) \tag{4.35}$$

où le produit est effectué selon les indices μ , ν tels que

$$(\mu,\nu) \neq (0,0) \quad , \quad 0 \le \mu \le N \quad , \quad -M \le \nu \le M \ . \tag{4.36}$$

Etant donné que

$$\sum_{\omega\in\mathcal{D}_\tau^*} \frac{1}{|\omega|^2} = \infty \quad \text{et} \quad \sum_{\omega\in\mathcal{D}_\tau^*} \frac{1}{|\omega|^3} < \infty \ , \tag{4.37}$$

la théorie générale des produits infinis de Weierstrass montre que pour avoir convergence absolue (et uniforme sur tout compact) dans (4.35), il suffit d'y intercaler des facteurs exponentiels de la forme

$$e^{\frac{s}{\omega} + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{\omega}\right)^2} \quad , \quad \omega = -\mu + \nu/\tau \ . \tag{4.38}$$

On a donc

$$\frac{q-1}{2\pi i\tau\ \Gamma[s|\tau]} = \{s \prod_{\omega\in\mathcal{D}^*_\tau} (1-\frac{s}{\omega})e^{\frac{s}{\omega}+\frac{1}{2}(\frac{s}{\omega})^2}\} \cdot \lim_{N\to\infty} e^{\gamma_\tau(N)s+\frac{1}{2}\lambda_\tau(N)s^2} \tag{4.39}$$

avec

$$\gamma_\tau(N) = (N+1)i\pi\tau - \ell n[N] - \lim_{M\to\infty} \hat{\sum} \frac{1}{-\mu+\nu/\tau} \tag{4.40}$$

et

$$\lambda_\tau(N) = -\lim_{M\to\infty} \hat{\sum} \frac{1}{(-\mu+\nu/\tau)^2} \tag{4.41}$$

où les sommes sont effectuées selon les indices μ , ν satisfaisant encore (4.36). Utilisant les formules classiques

$$\pi \cot \pi Z = \lim_{M\to\infty} \sum_{\nu=-M}^{M} \frac{1}{Z-\nu} \tag{4.42}$$

et

$$\pi^2 \operatorname{cosec}^2 \pi Z = \lim_{M\to\infty} \sum_{\nu=-M}^{M} \frac{1}{(Z-\nu)^2} \tag{4.43}$$

on obtient les expressions suivantes pour les $\lim \hat{\sum}$ entrant en jeu dans (4.40) et (4.41)

$$\begin{aligned}\lim_{M\to\infty} \hat{\sum} \frac{1}{-\mu+\nu/\tau} &= -\tau \sum_{\mu=1}^{N} \lim_{M\to\infty} \sum_{\nu=-M}^{M} \frac{1}{\mu\tau-\nu} \\ &= -\pi\tau \sum_{\mu=1}^{N} \cot \pi\mu\tau = -\pi i\tau \sum_{\mu=1}^{N} \frac{q^\mu+1}{q^\mu-1} \\ &= \pi i N\tau - \frac{2\pi i\tau}{q-1} \sum_{\mu=1}^{N} \frac{q^\mu}{[\mu]} \end{aligned} \tag{4.44}$$

et

$$\lim_{M\to\infty} \hat{\sum} \frac{1}{(-\mu+\nu/\tau)^2} = \tau^2 \lim_{M\to\infty} \hat{\sum} \frac{1}{(\mu\tau-\nu)^2}$$

$$= \tau^2 \lim_{M\to\infty} (2 \sum_{\nu=1}^{M} \frac{1}{\nu^2}) + \tau^2 \sum_{\mu=1}^{N} \lim_{M\to\infty} \sum_{\nu=-M}^{M} \frac{1}{(\mu\tau-\nu)^2}$$

$$= \frac{1}{3}\pi^2\tau^2 + \pi^2\tau^2 \sum_{\mu=1}^{N} \operatorname{cosec}^2 \pi\mu\tau$$

$$= \frac{1}{3}\pi^2\tau^2 - 4\pi^2\tau^2 \sum_{\mu=1}^{N} \frac{q^\mu}{(q^\mu-1)^2}$$

$$= \frac{1}{3}\pi^2\tau^2 + (\frac{2\pi i\tau}{q-1})^2 \sum_{\mu=1}^{N} \frac{q^\mu}{[\mu]^2} . \tag{4.45}$$

Substituant (4.44) et (4.45) dans (4.40) et (4.41) et utilisant (4.39), on obtient bien les formules qu'il fallait démontrer.

COROLLAIRE 4.4. *La constante* λ_τ *permet de relier la fonction* $\Lambda[s|\tau]$ *à la fonction sigma de Weierstrass* $\sigma(s) = \sigma(s;1,1/\tau)$ *comme suit*

$$\frac{1}{\Lambda[s|\tau]} = \frac{2\pi i\tau}{q-1} e^{\pi i\tau s + (\lambda_\tau + \frac{1}{6}\pi^2\tau^2)s^2} \cdot \sigma(s;1,1/\tau) . \tag{4.46}$$

DÉMONSTRATION. Posons, pour simplifier les notations,

$$W(s,\omega) = (1-\frac{s}{\omega})e^{\frac{s}{\omega}+\frac{1}{2}(\frac{s}{\omega})^2} .$$

Puisque le demi-réseau $\mathcal{D}_\tau$ et le réseau complet $\mathcal{R}_\tau$ satisfont les relations

$$\mathcal{D}_\tau \cup (-\mathcal{D}_\tau) = \mathcal{R}_\tau \quad , \quad \mathcal{D}_\tau \cap (-\mathcal{D}_\tau) = \{\nu/\tau \mid \nu \in \mathbf{Z}\} \tag{4.47}$$

nous pouvons écrire (en tenant compte de l'équation fonctionnelle (4.7) et de la Proposition 4.3)

$$\frac{1}{\Lambda[s]} = \frac{1}{\Gamma[s]\Gamma[1-s]} \quad \frac{1}{[-s]\Gamma[s]\Gamma[-s]}$$

$$= -\frac{1-q}{1-q^{-s}} \cdot (\frac{2\pi i\tau}{q-1})^2 \cdot e^{\lambda_\tau s^2} \cdot \{s \prod_{\nu\neq 0} W(s,\nu/\tau)\} \cdot \{s \prod_{\omega\in\mathcal{R}_\tau^*} W(s,\omega)\} \tag{4.48}$$

où $R_\tau^* = R_\tau \setminus \{0\}$. La formule (4.46) s'obtient alors de (4.47) en remarquant que

$$s \prod_{\nu \neq 0} W(s,\nu/\tau) = \frac{\sin \pi\tau s}{\pi\tau} \cdot e^{\frac{1}{6}\pi^2\tau^2 s^2} = q^{-\frac{1}{2}s} \cdot \frac{q^s - 1}{2\pi i\tau} e^{\frac{1}{6}\pi^2\tau^2 s^2}$$

et que

$$s \prod_{\omega \in R_\tau^*} W(s,\omega) = \sigma(s;1,1/\tau) \ . \ \square$$

Les constantes a , b , c , annoncées dans (4.23) ont donc été complètement identifiées.

La fonction $1/\Lambda[s|\tau]$ étant une fonction thêta, elle doit pouvoir se développer à l'aide de *sommes* infinies rapidement convergentes. Voici deux tels développements.

PROPOSITION 4.5. *Les formules* a) *et* b) *suivantes sont valables pour tous* s,τ *où* $s \in \mathbb{C}$ *et* $\operatorname{Im} \tau > 0$

$$\text{a)} \quad \frac{1}{\Lambda[s|\tau]} = c \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{\frac{1}{2}k(k-1)} e^{2\pi i\tau ks} \tag{4.49}$$

où

$$\frac{1}{c} = \Lambda[\tfrac{1}{2}|\tau] \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{\frac{1}{2}k^2} \tag{4.50}$$

$$\text{b)} \quad \frac{1}{\Lambda[s|\tau]} = \frac{\sum_{n\geq 0} (-1)^n [(2n+1)s] q^{\frac{1}{2}n(n+1)} e^{-2\pi in\tau s}}{\sum_{n\geq 0} (-1)^n (2n+1) q^{\frac{1}{2}n(n+1)}} \tag{4.51}$$

où

$$[(2n+1)s] = [(2n+1)s]_q = (1-q^{(2n+1)s})/(1-q) \ . \tag{4.52}$$

DÉMONSTRATION. a) A cause de la Proposition 4.2, la fonction $1/\Lambda[s]$ est entière et périodique de période $1/\tau$. Elle possède donc un développement de Fourier de la forme

$$1/\Lambda[s] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i\tau ks} \tag{4.53}$$

dont il s'agit d'identifier les coefficients c_k (qui sont indépendants de s). Comme on a aussi l'équation fonctionnelle

$$1/\Lambda[s+1] = -e^{-2\pi i\tau s}/\Lambda[s] \tag{4.54}$$

on trouve, par substitution de (4.54) dans (4.53), que les c_k satisfont les relations

$$c_{k+1} = -q^k c_k \quad , \quad k \in \mathbf{Z} \ . \tag{4.55}$$

Posant $c_0 = c$, on tire de (4.55) que

$$c_k = (-1)^k q^{\frac{1}{2}k(k-1)} c \quad , \quad k \in \mathbf{Z} \ . \tag{4.56}$$

D'où la formule (4.49). Pour obtenir la valeur de c , il suffit de poser $s = \frac{1}{2}$ dans (4.49).

b) La formule (4.51) est beaucoup plus difficile à établir. Pour l'obtenir, nous allons faire appel à l'une des quatre fonctions thêta de Jacobi: la fonction $\Theta_1(z,q)$ qui s'exprime comme suit [12, pp. 464 et 470]

$$\begin{aligned}\Theta_1(z,q) &= 2 \sum_{n\geq 0} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \sin(2n+1)z \\ &= 2 \prod_{n\geq 1} (1-q^{2n}) \cdot q^{\frac{1}{4}} \sin z \cdot \prod_{k\geq 1} (1-2q^{2k} \cos 2z+q^{4k}) \ .\end{aligned} \tag{4.57}$$

Le produit (4.2) pour la fonction $\Gamma[s]$ permet d'écrire

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Lambda[s]} &= \frac{1}{\Gamma[s]\Gamma[1-s]} = \left(\frac{1-q^s}{1-q}\right) \prod_{k\geq 1} \frac{(1-q^{k+s})(1-q^{k-s})}{(1-q^k)^2} \\ &= \left(\frac{1-q^s}{1-q}\right) \prod_{k\geq 1} \frac{(1-2q^k \cos 2\pi\tau s+q^{2k})}{(1-q^k)^2} \ .\end{aligned} \tag{4.58}$$

Remplaçant z par $\pi\tau s$ et q par $q^{\frac{1}{2}}$ dans (4.57) on trouve, tenant compte de (4.58) et du fait que $q = e^{2\pi i\tau}$,

$$\frac{1}{\Lambda[s]} = \left(\frac{1-q^s}{1-q}\right) \cdot \frac{\Theta_1(\pi\tau s, q^{\frac{1}{2}})}{2q^{1/8} \sin \pi\tau s \prod_{n\geq 1} (1-q^n)^3}$$

$$= \left(\frac{1-q^s}{1-q}\right) \cdot \frac{\sum_{n\geq 0} (-1)^n q^{\frac{1}{2}(n+\frac{1}{2})^2} \sin(2n+1)\pi\tau s}{q^{1/8} \sin \pi\tau s \prod_{n\geq 1} (1-q^n)^3}$$

$$= \frac{\sum_{n\geq 0} (-1)^n q^{\frac{1}{2}n(n+1)-ns} (1-q^{(2n+1)s})/(1-q)}{\prod_{n\geq 1} (1-q^n)^3} \quad . \tag{4.59}$$

La formule (4.51) découle alors immédiatement en utilisant, au dénominateur de (4.59), une identité fameuse de Jacobi qui se lit

$$\prod_{n\geq 1} (1-q^n)^3 = \sum_{n\geq 0} (-1)^n (2n+1) q^{\frac{1}{2}n(n+1)} \quad . \square$$

La formule (4.51) est particulièrement efficace pour l'évaluation numérique effective de la fonction $\Lambda[s|\tau]$, et ce pour tout $s \in \mathbb{C}\backslash R_\tau$ et tout τ tel que $\mathrm{Im}\,\tau > 0$. Quant à la fonction $\Gamma[s|\tau]$ dont l'inverse n'est, en quelque sorte, qu'une "demi" fonction thêta, on serait porté à croire à l'inexistence d'un développement pour cette fonction qui soit aussi convergent que (4.51). En effet, les produits (3.20), (4.2) et (4.25) qui expriment la fonction $\Gamma[s,q] = \Gamma[s|\tau]$ (où $q = e^{2\pi i\tau}$, $\mathrm{Im}\,\tau > 0$) ne sont pas très bien adaptés au calcul numérique effectif étant donné leur convergence relativement lente, spécialement dans le cas où $|q|$ est près de 1 ($|q| < 1$) . Cependant, il existe dans la littérature sur le sujet [1], deux expressions pour $\Gamma[s,q]$ faisant appel, cette fois, à des *sommes* infinies:

$$\Gamma[s,q] = \frac{(1-q)(1-q^2)\dots}{(1-q)^{s-1}} \cdot \sum_{n\geq 0} \frac{q^{ns}}{(1-q)\dots(1-q^n)} \quad , \tag{4.60}$$

valable pour $0 < q < 1$, $\mathrm{Re}\, s > 0$ et

$$\frac{1}{\Gamma[s,q]} = \frac{(1-q)^{s-1}}{(1-q)(1-q^2)\dots} \cdot \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}} q^{ns}}{(1-q)\dots(1-q^n)} \quad , \tag{4.61}$$

valable pour $0 < |q| < 1$ et $s \in C$.

Ces deux formules peuvent, par exemple, être démontrées simplement à partir des expressions (3.3) et (3.5) pour les q-exponentielles e_q et E_q sous forme de sommes puisqu'on a

$$\Gamma[s,q] = \frac{(1-q)(1-q^2)\ldots}{(1-q)^{s-1}} e_q\left(\frac{q^s}{1-q}\right) \tag{4.62}$$

et

$$\frac{1}{\Gamma[s,q]} = \frac{(1-q)^{s-1}}{(1-q)(1-q^2)\ldots} E_q\left(-\frac{q^s}{1-q}\right) . \tag{4.63}$$

Bien que plus efficaces que (3.20), (4.2) et (4.25) pour le calcul de $\Gamma[s,q]$, les expressions (4.60) et (4.61) contiennent toujours le produit infini

$$(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\ldots \tag{4.64}$$

qui converge, encore une fois, relativement lentement. Pour q fixé cependant, et pour s variable, la formule (4.61) est quand même très efficace puisqu'elle contient des "facteurs de convergence" de la forme

$$q^{\frac{n(n-1)}{2}} \tag{4.65}$$

qui tendent vers zéro extrêmement rapidement lorsque $n \to \infty$.

La formule que nous allons maintenent proposer pour $\Gamma\,[s,q]$ aura l'avantage de ne pas faire apparaître de produit infini du genre (4.64) *tout en conservant* quand même des facteurs de convergence rapide du type (4.65). Elle sera donc très efficace numériquement, *à la fois* pour tout q et tout s .

PROPOSITION 4.6. *Pour tout* $q = e^{2\pi i\tau}$, $\operatorname{Im} \tau > 0$ *et tout* $s \in \mathbb{C}$ *hors du demi-réseau* D_τ *on a la formule*

$$\Gamma[s,q] = \frac{1}{(1-q)^{s-1}} \cdot \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{q^{\frac{1}{2}n(n+1)}}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)} \cdot \frac{1}{1-q^{s+n}} . \tag{4.66}$$

DÉMONSTRATION. Considérons d'abord le cas où $0 < q < 1$ et $\mathrm{Re}\, s > 0$. On a successivement

$$\Gamma[s,q] = [\int]_{[0]}^{[\infty]} t^{s-1} E(-qt)$$

$$= \sum_{k\geq 0} q^k \left(\frac{q^k}{1-q}\right)^{s-1} \cdot (1-q^{k+1})(1-q^{k+2})(1-q^{k+3})\ldots$$

$$= \frac{1}{(1-q)^{s-1}} \cdot \sum_{k\geq 0} q^{ks} \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{q^{\frac{1}{2}n(n+1)}}{(1-q)\ldots(1-q^n)} (q^k)^n \tag{4.67}$$

$$= \frac{1}{(1-q)^{s-1}} \cdot \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k\geq 0} q^{k(s+n)}\right) (-1)^n \frac{q^{\frac{1}{2}n(n+1)}}{(1-q)\ldots(1-q^n)}$$

$$= \frac{1}{(1-q)^{s-1}} \cdot \sum_{n\geq 0} \frac{1}{1-q^{s+n}} \cdot \frac{(-1)^n q^{\frac{1}{2}n(n+1)}}{(1-q)\ldots(1-q^n)} . \tag{4.68}$$

L'expression (4.67) étant justifiée par le fait que (voir (3.5) avec $t = -q^{k+1}/(1-q)$):

$$(1-q^{k+1})(1-q^{k+2})(1-q^{k+3})\ldots = E_q(-q^{k+1}/(1-q))$$

$$= \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{q^{\frac{1}{2}n(n+1)}}{(1-q)\ldots(1-q^n)} (q^k)^n .$$

Comme le développement (4.68) converge uniformément en s sur tout compact $K \subseteq \mathbb{C}\backslash\mathcal{D}_\tau$ et uniformément en τ sur tout compact L dans le demi-plan supérieur $\mathrm{Im}\,\tau > 0$, on déduit par unicité du prolongement analytique, qu'il converge *aussi* vers $\Gamma[s,q]$ pour tout $s \in \mathbb{C}\backslash\mathcal{D}_\tau$ et tout τ tel que $\mathrm{Im}\,\tau > 0$.

Le lecteur remarquera que la formule (4.66) constitue, en quelque sorte, un q-analogue de la fameuse décomposition de Prym [2,9] pour la fonction gamma d'Euler:

$$\Gamma(s) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{s+n} + Q(s) . \tag{4.69}$$

La fonction $Q(s)$, qui est *entière* en s , est donnée explicitement par

$$Q(s) = \int_1^\infty e^{-t} t^{s-1}\, dt = \sum_{n\geq 0} C_n s^n \tag{4.70}$$

avec

$$C_n = \frac{1}{n!} \int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t} (\ell n\ t)^n\, dt \quad , \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{4.71}$$

Conclusion

L'approche probabiliste élaborée dans la section 1 du présent travail permet de considérer la théorie des q-analogues comme un cas particulier d'une théorie plus vaste: celle des π-analogues où $\pi = (\pi_o,\pi_1,\pi_2,\ldots)$ est une distribution de probabilités discrète *quelconque*.

En choisissant convenablement la distribution π (distribution uniforme, q-uniforme, géométrique) nous avons directement été conduits non seulement aux q-analogues classiques des factorielles, des exponentielles et au q-analogue de Jackson pour la fonction gamma d'Euler mais aussi aux fonctions thêta, et fonctions connexes, qui sont fondamentales en théorie analytique des nombres par exemple. Même les "q-constantes d'Euler" γ_τ et λ_τ qui sont apparues naturellement (voir (4.28) et (4.29)) dans notre produit weierstrassien pour $\Gamma[s,q]$ contiennent les sommes

$$\sum_{n\geq 1} \frac{q^n}{1-q^n} = \sum_{n\geq 1} \sigma_o(n) q^n \quad , \quad \sum_{n\geq 1} \frac{q^n}{(1-q^n)^2} = \sum_{n\geq 1} \sigma_1(n) q^n$$

où $\sigma_o(n)$ est le nombre de diviseurs de n et $\sigma_1(n)$ est la somme des diviseurs de n .

En utilisant une autre distribution de probabilités, par exemple

$$\pi_o = 0 \quad , \quad \pi_k = \frac{6}{\pi^2 k^2} \quad , \quad k \geq 1 \; ,$$

le lecteur vérifiera sans peine que les exponentielles et factorielles généralisées correspondantes sont alors données par

$$e_\pi(t) = \frac{\sqrt{6t}}{\sin\sqrt{6t}} \ , \quad E_\pi(t) = \frac{\sinh\sqrt{6t}}{\sqrt{6t}}$$

$$[n]!_\pi = \frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{2\cdot 6^n(2^{2n-1}-1)B_{2n}} \ , \quad \langle n\rangle !_\pi = \frac{(2n+1)!}{6^n} \ .$$

Cette fois, ce sont les nombres de Bernoulli B_{2n} qui entrent en jeu.

L'étude générale des π-analogues offre donc tout un champ d'explorations futures extrêmement riche en possibilités.

Pour terminer, l'auteur désire remercier vivement Messieurs A. Joyal, P. Leroux et J. Labelle (membres de l'équipe de Combinatoire de l'Université du Québec à Montréal) ainsi que Mademoiselle H. Décoste (de l'Université de Montréal) pour l'encouragement hautement stimulant qu'ils lui ont communiqué pendant l'élaboration de ce travail.

L'auteur remercie aussi l'examinateur pour lui avoir fourni les références complémentaires [13] à [16].

Bibliographie

[1] ASKEY, R., *The q-gamma and q-beta functions*, Applicable Analysis, Vol. 8, (1978), 125-141.

[2] CAMPBELL, R., *Les intégrales eulériennes et leurs applications*, Coll. Univ. de Math., Dunod, Paris (1966).

[3] GARSIA, A.M. and REMMEL, J., *A combinatorial interpretation of q-derangement and q-Laguerre numbers*, Journal Européen de Combinatoire, Vol. I, No 1, (1980), 47-59.

[4] GOLDMAN, J. and ROTA, G.-C., *On the foundations of combinatorial theory IV : Finite vector spaces and eulerian generating functions*, Studies in Appl. Math., 49 (1970), 239-258.

[5] JOYAL, A., *Sur les formules de sommation de MacMahon-Stanley*, Conférence, Séminaire de combinatoire de l'Université du Québec à Montréal (janvier 1980).

[6] JACKSON, F.H., *On q-definite integrals*, Quat. Journal Pure and Appl. Math., 41 (1910), 193-203.

[7] KNUTH, D.E., *Subspaces, subsets and partitions*, J.C.T. 10 (1971), 178-180.

[8] LEROUX, P., *Catégories triangulaires: exemples, applications et problèmes*, (à paraître).

[9] PRYM, F., *Zur Theorie der Gamma Funktion*, J. für Math., Vol. 82 (1876), 165-172.

[10] SIEGEL, C.L., *Topics in Complex Function Theory*, (3 vols), Wiley-Interscience (1973).

[11] STANLEY, R.S., *Generating functions*, J.-C. Rota, ed., Studies in Combinatorics, Vol. 17, MAA, (1978), 100-141.

[12] WHITTAKER, E.T. and WATSON, G.N., *A Course of Modern Analysis*, (4^e éd.), Cambridge U. Press (1962).

Références complémentaires suggérées par l'examinateur

[13] POST, Emil L., *The generalized gamma functions*, Annals of Mathematics, 20 (1918-1919), 202-217.

[14] ISMAIL, Mourad E.H., *The basic Bessel functions and polynomials*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, 12 (1981), 454-468.

[15] MOAK, Daniel S., *The q-analogue of the Laguerre polynomials*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 81 (1981), 20-47.

[16] KOBLITZ, Neal, *q-extension of the p-adic gamma function*, II, Trans. Amer. Math. Soc., (à paraître).

Département de mathématiques
Université du Québec à Montréal
C.P. 8888, Succ. "A"
Montréal, Québec
H3C 3P8

Manuscrit reçu le 7 mai 1982.
Revisé le 16 juin 1982.