Ann. sc. math. Québec, 1982, vol. 6, no 2, pp. 147-149

UNE IDENTITÉ LIÉE AUX PARTITIONS

C. Gauthier

La recherche des partitions d'un nombre entier positif n revient à celle des solutions $(r_1,r_2,\ldots,r_n) \in \mathbb{N}^n$ de:

$$r_1 + 2r_2 + \ldots + nr_n = n .$$

Il est alors clair que:

$$0 \leq r_k \leq [\tfrac{n}{k}] , \quad k = 1,2,\ldots,n ,$$

où $[x]$ représente le plus grand entier $\leq x$.

Soit

$$P(n) = \{(r_1,r_2,\ldots,r_n) \in \mathbb{N}^n : r_1 + 2r_2 + \ldots + nr_n = n\} .$$

Nous avons alors l'identité suivante:

$$\sum_{P(n)} \frac{1}{r_1!r_2!\ldots r_n!} = 1 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \sum_{P(k)} \frac{1}{r_1!r_2!\ldots r_k!} \tag{1}$$

Pour la démontrer nous allons développer en série entière la fonction $\exp[(1-x)^{-1}]$, pour $|x| < 1$; la série obtenue et sa dérivée convergeront uniformément dans le même intervalle.

Soit

$$\exp[(1-x)^{-1}] = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n , \qquad |x| < 1 . \tag{2}$$

En dérivant terme à terme la série (2), on trouve:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)A_{n+1}x^n \ , \qquad |x| < 1 \tag{3}$$

car

$$(1-x)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \ , \qquad \text{pour} \quad |x| < 1 \ .$$

L'équation (3) permet d'obtenir la relation qui suit, entre les coefficients A_n de (2):

$$A_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} (n-k)A_k \ , \qquad n = 1,2,3,\ldots \tag{4}$$

L'identité (1) vient alors de (4) en utilisant la formule de di Bruno pour les A_n, c'est-à-dire (v. [1], p. 36):

$$A_n = e \sum_{P(n)} \frac{1}{r_1!r_2!\ldots r_n!} \ , \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

Il est possible de généraliser l'identité (1) de la façon suivante. Considérons des nombres réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$ à partir desquels on construit, en choisissant convenablement les a_o et a_{n+k}, $k = 1,2,3,\ldots$, une série entière uniformément convergente dans un certain intervalle $|x| < R$, $R > 0$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ .$$

La démarche précédente reprise avec $f(x)$ au lieu de $(1-x)^{-1}$ conduit alors à:

$$\sum_{P(n)} \frac{a_1^{r_1} a_2^{r_2} \ldots a_n^{r_n}}{r_1!r_2!\ldots r_n!} = a_n + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} (n-k)a_{n-k} \sum_{P(k)} \frac{a_1^{r_1} a_2^{r_2} \ldots a_k^{r_k}}{r_1!r_2!\ldots r_k!} \ .$$

Dans la suite du résultat classique:

$$\sum_{Q(n)} \frac{1}{k_1!k_2!\ldots k_n!} = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}$$

où

$$Q(n) = \{(k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n : k_1 + k_2 + \dots + k_n = n\}$$

et de ceux du même type qui se déduisent de [2], pp. 188-191, c'est-à-dire:

$$\sum_{P(n)} \frac{k!}{k_1!k_2!\dots k_n!} = \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}$$

et

$$\sum_{P(n)} (-1)^{n-k} \frac{k!}{k_1!k_2!\dots k_n!} = \begin{cases} 1\ , & \text{si } n = 1 \\ 0\ , & \text{si } n = 2,3,4,\dots \end{cases} ,$$

où $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$, la relation de récurrence (1) permet de calculer

$$F(n) = \sum_{P(n)} \frac{1}{k_1!k_2!\dots k_n!}$$

pour $n = 1,2,3,\dots$

En effet, si l'on pose $F(0) = 1$, l'identité (1) devient:

$$F(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)F(k) \ ;$$

il est alors facile d'obtenir:

$$F(1) = 1\ ,\quad F(2) = \frac{3}{2}\ ,\quad F(3) = \frac{13}{6}\ ,\quad F(4) = \frac{73}{24}\ ,\quad F(5) = \frac{167}{40}\ ,$$

$$F(6) = \frac{4\ 051}{720}\ ,\quad F(7) = \frac{37\ 633}{5\ 040}\ ,\quad \text{etc.}$$

Bibliographie

[1] RIORDAN, J., *An Introduction to Combinatoriel Analysis*, Wiley, New York, 1958.

[2] RIORDAN, J., *Combinatoriel Identities*, Wiley, New York, 1968.

Département de mathématiques
Collège militaire royal de Saint-Jean
Saint-Jean-sur-Richelieu, Québec
J0J 1R0

Manuscrit reçu le 20 janvier 1982.