Ann. sc. math. Québec, 1982, vol. 6, no 2, pp. 143-145

MATRICES TOPOLOGIQUEMENT NILPOTENTES

S. Berman et A. Joffe[1]

Abstract

The following result is proved. If T is an $n \times n$ complex matrix then $T^k \to 0$ as $k \to \infty$ if and only if $Tr(T^k) \to 0$ as $k \to \infty$, where $Tr(T)$ denotes the trace of T.

Rappelons le résultat classique suivant: soit T une matrice carrée d'ordre n dont les éléments appartiennent à un corps de caractéristique zéro. Les énoncés suivants sont alors équivalents:

(1) T est une matrice nilpotente;

(2) les valeurs propres de T sont toutes nulles;

(3) $Tr(T^k) = 0$ pour tout $k \geq 1$, où $Tr(T)$ désigne la trace de T.

Ces énoncés ont une version topologique: soit T une matrice carrée d'ordre n dont les éléments appartiennent au corps des complexes. Les énoncés suivants sont alors équivalents:

(i) la suite $\{T^k\}$ converge vers zéro lorsque $k \to \infty$;

(ii) les valeurs propres de T sont de norme strictement inférieure à 1;

(iii) la suite $\{Tr(T^k)\}$ converge vers zéro lorsque $k \to \infty$.

[1] Subventionnés partiellement par le Conseil national de recherche en sciences naturelles et en génie du Canada

L'équivalence de (i) et (ii) découle d'un résultat classique (cf. par exemple [1], p. 112). Une démonstration élémentaire résulte de l'observation que les valeurs propres d'une matrice sont des fonctions continues de la matrice et que les valeurs propres de T sont des racines $k^{\text{ième}}$ des valeurs propres de T^k .

Que (ii) implique (iii) est banal; pour établir la réciproque, il suffit de montrer que les $s_i < 1$ pour $i = 1,\dots,n$, $s_1 \dots s_n$ étant des nombres complexes tels que la suite $s_1^k + s_2^k + \dots + s_n^k$ tende vers zéro lorsque $k \to \infty$. Il suffit pour cela de démontrer que si $|s_i| = 1$, $1 \le i \le n$, alors la suite $s_1^k + \dots + s_n^k$ ne peut pas converger vers zéro lorsque $k \to \infty$. Ceci est une conséquence d'un résultat de Kronecker (cf. [2], p. 332). Nous préférons esquisser une démonstration élémentaire du lemme suivant qui implique notre résultat.

LEMME. *Soient* $\theta_1 \dots \theta_n$ *des nombres réels. Il existe alors une suite de nombres entiers* n_k *tendant vers l'infini telle que pour* $1 \le \ell \le n$ *la suite* $\exp(i_{n_k} \theta_\ell)$ *converge vers* 1 *lorsque* k *tend vers l'infini. En particulier,*

$$\lim \sup\{|\exp ik\theta_1 + \dots + \exp ik\theta_n| : k \ge 1\} = n .$$

DÉMONSTRATION. Soit C^n le cube de R^n dont les points ont leurs coordonnées dans l'intervalle $[0,2\pi]$ et désignons par $\xi_{k,\ell}$ l'argument de $\exp(ik\theta_\ell)$, $\xi_{k,\ell} \in [0,2\pi]$. Notons P_k le point $(\xi_{k,1},\dots,\xi_{k,n})$ de C^n . Pour tout entier m , étudions la suite $P_m, P_{2m},\dots,P_{jm},\dots$; au moins deux de ces points seront à une distance inférieure à $\frac{1}{m}$; soient P_u et P_v avec $u < v$. On aura alors

$$|1 - \exp[i(v-u)m\theta_\ell]| < \frac{1}{m} \qquad \text{pour } 1 \le \ell \le n$$

puisque $(v-u)m \ge m$. Le lemme est donc établi.

REMARQUE. Pour toute matrice carrée T à éléments complexes la convergence de $\{Tr(T^k)\}$ n'implique pas la convergence de T^k . Il suffit de considérer la matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour s'en convaincre. Cependant si la suite $\{Tr(T^k)\}$ converge vers C , alors C est nécessairement un entier non négatif borné par n . T est semblable à $D + N$ où D est une matrice diagonale, N une matrice nilpotente et $ND = DN$. Si $Tr(T^k) \to C$, alors $D^k \to P$ où P est une projection sur un sous-espace de dimension C et l'on vérifie que $\{T^k\}$ est une suite convergente si et seulement si $PN = 0$, dans ce cas $\{T^k\}$ converge vers P .

Remerciement

Nous remercions le rédacteur en chef, Monsieur Aupetit, pour les suggestions lors de la rédaction finale de cette note.

Bibliographie

[1] GRANTMACHER, F.R., *Théorie des matrices*, Tome 1, Dunod, Paris, 1966.

[2] HARDY, G.H. and WRIGHT, M., *An Introduction to the Theory of Numbers*, 4th edition, Oxford, 1960.

Mathematics Department
University of Saskatchewan
Saskatoon, Saskatchewan

Centre de recherche de mathématiques appliquées
Université de Montréal
C.P. 6128, Succ. "A"
Montréal, Québec
H3C 3J7

Manuscrit reçu le 23 septembre 1981.
Revisé le 3 février 1982.