Ann. Sc. Math. Québec, 1979, Vol. III, No 1, pp. 155-163

PROBLÈMES DE LA RÉGULARITÉ POUR LES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES DIFFÉRENTIELLES

Halina Swiatak

RÉSUMÉ

L'article donne un théorème concernant la régularité des solutions $f : R^n \to R$ des équations fonctionnelles-différentielles

$$(*) \quad \sum_{i=1}^{k} \sum_{|p|\leq m} a_{ip}(x,t)D_y^p f(y)\Big|_{y=\phi_i(x,t)} = F(x,f(\lambda_1(x)),\ldots,f(\lambda_s(x))) + b(x,t) ,$$

où $x \in R^n$, $t \in \Omega \subset R^r$, $n > 1$, $r \geq 1$ et où les fonctions a_{ip} , $b : R^n \times \Omega \to R$, $\phi_i : R^n \times \Omega \to R^n$, $\lambda_j : R^n \to R^n$, $F : R^{n+s} \to R$ satisfont quelques suppositions de régularité et les hypothèses qui assurent qu'une équation différentielle obtenue par la différentiation de (*) et par la fixation de t a la force constance et est hypoelliptique au point x_o . Ce théorème permet de trouver toutes les solutions continues f de (*) dont les dérivées apparaissant dans (*) sont localement intégrables en considérant des équations différentielles et fonctionnelles-différentielles obtenues par la différentiation de (*) . On donnera quelques exemples d'applications.

1. INTRODUCTION

Il est important de pouvoir reconnaître les équations pour lesquelles les suppositions faibles (la mesurabilité, la propriété d'être borné, la monotocité, la continuité ou la différentiabilité aux points isolés, l'intégrabilité, la continuité ou la différentiabilité partout) assurent que toutes les solutions satisfaisant ces suppositions faibles sont des fonctions de la classe C^m ou C^∞ .

Plusieurs équations fonctionnelles apparaissant dans les probabilités ou dans la théorie d'information par exemple ont une telle propriété et, en conséquence, elles peuvent être résolues par la réduction aux équations différentielles.

Le théorème principal présenté dans cet article s'applique aux équations fonctionnelles-différentielles et il est une généralisation d'un résultat pour les équations

$$\sum_{i=1}^{k} a_i(x,t)f(\phi_i(x,t)) = F(x,f(\lambda_1(x)),\dots,f(\lambda_s(x))) + b(x,t)$$

considérées dans [2]. Le théorème 5.1 de [2] est un cas spécial du critère présenté ici.

On utilisera la notation de [2].

2. LE CRITÈRE DE LA RÉGULARITÉ

Le critère de la régularité sera formulé pour les équations

$$(2.1)\quad \sum_{i=1}^{k} \sum_{|p|\le m} a_{ip}(x,t)D_y^p f(y)\Big|_{y=\phi_i(s,t)} = F(x,f(\lambda_1(x)),\dots,f(\lambda_s(x))) + b(x,t)$$

même si l'on peut le faire aussi pour les équations

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{|p|\le m} a_{ip}(x,t)D_y^p f(y)\Big|_{y=\phi_i(x,t)}$$
$$= F(x,f(\lambda_1(x)),\dots,f(\lambda_s(x))) + \sum_{j=1}^{N} G_j(f(x+\omega_j(t))) + b(x,t) ,$$

où $x \in R^n$, $t \in \Omega \subset R^r$, $n > 1$, $r \ge 1$ et $f : R^n \to R$, $a_{ip} : R^n \times \Omega \to R$, $b : R^n \times \Omega \to R$, $\phi_i : R^n \times \Omega \to R^n$, $\lambda_j : R^n \to R^n$, $F : R^{n+s} \to R$, $\omega_j : \Omega \to R^n$, $G_j : R \to R$.

Théorème 2.1. Supposons que

1) a_{ip} et b sont des fonctions de la classe C^∞ par rapport à $x \in R^n$ pour chaque t fixé appartenant à un ensemble ouvert $\Omega \subset R^r$, $i = 1,\dots,k$; $|p| \le m$,

2) $a_{ip} \in C^M$ et $b \in C^M$ dans $R^n \times \Omega$, $i = 1,\dots,k$; $|p| \le m$,

3) les transformations $x \mapsto \phi_i(x,t)$ sont des difféomorphismes dans R^n pour chaque $t \in \Omega$ fixé, $i = 1,\dots,k$,

4) ϕ_i et $\phi_i^{-1} : (y,t) \mapsto x$, où par 3), x est déterminé uniquement par la condition $y = \phi_i(x,t)$, sont des fonctions de la classe C^M dans $R^n \times \Omega$, $i = 1,\dots,k$,

5) F est continue dans R^{n+s} ,

6) λ_j sont continues dans R^n , $j = 1,\dots,s$,

7) il existe un point $\alpha \in \Omega$ tel que $\phi_i(x,a) \equiv x$ pour $i = 1,\dots,k$,

8) il existe un multi-index $q = (q_1,\dots,q_r)$ $(|q| \le M)$ tel que l'équation

$$(2.2) \qquad D_t^q \sum_{i=1}^{k} \sum_{|p| \le m} a_{ip}(x,t) D_y^p f(y) \Big|_{y=\phi_i(x,t)} \Big|_{t=\alpha} = 0 ,$$

où l'expression à gauche est obtenue par la différentiation formelle de l'expression à côté gauche de (2.1) et par la substitution $t = \alpha$, a la force constance et elle est hypoelliptique au point x_o .

Dans ce cas, chaque solution $f : R^n \to R$ de (2.1) qui est une fonction localement intégrable et avec les dérivées apparaissant dans (2.1) localement intégrables est égale presque partout à une fonction de la classe C^∞ et chaque solution f de (2.1) qui est une fonction continue avec les dérivées apparaissant dans (2.1) localement intégrables est une fonction de la classe C^∞ .

La démonstration de ce théorème est une généralisation presque formelle de la démonstration du Théorème 5.1 de [2].

Tout comme dans [2] , on utilise le résultat concernant la régularité des solutions distributionnelles des équations linéaires aux dérivées partielles qui ont la force constante et les coefficients de la classe C^∞ et qui sont hypoelliptiques en un certain point (L. Hörmander [1], p. 176). On applique aussi le lemme suivant (H. Swiatak [2], p. 102):

Lemme. Si $T \in \mathcal{D}'$, $a : R^n \times \Omega \to R$ est une fonction de la classe C^∞ dans R^n pour chaque t fixé appartenant à un ensemble ouvert $\Omega \subset R^r$, $a \in C^M$

dans $R^n \times \Omega$, $x \mapsto \phi(x,t)$ est une difféomorphisme dans R^n pour chaque $t \in \Omega$ fixé et si $\phi : (x,t) \mapsto y = \phi(x,t)$ et $\phi^{-1} : (y,t) \mapsto x$ (où x est déterminé uniquement par la condition $y = \phi(x,t)$) sont des fonctions de la classe C^M dans $R^n \times \Omega$, on a la formule suivante

$$D^q(a(x,t)T(\phi(x,t)) , \psi(x))_x = (D_t^q(a(x,t)T(\phi(x,t))) , \psi(x))_x$$

pour $|q| \leq M$ et pour chaque $\psi \in \mathcal{D}$. (*)

Remarque 2.1. Si l'on remplace la condition 1) du Théorème 2.1 par l'analycité et si l'on exige l'analycité des difféomorphismes ϕ_i , on peut remplacer "C^∞" dans la conclusion du théorème par le mot "analytique". On peut introduire les mêmes changements dans tous les théorèmes de [2]. (C'est une conséquence des résultats de [1] pour les équations linéaires aux dérivées partielles avec des coefficients de la classe C^∞ .)

3. EXEMPLES D'APPLICATIONS

Le Théorème 2.1 permet de résoudre des équations fonctionnelles-différentielles de la forme (2.1) dans la classe des fonctions continues f ayant les dérivées apparaissant dans (2.1) localement intégrables en considérant les équations fonctionnelles-différentielles (ou différentielles) qui en résultent.

Exemple 3.1. On peut voir facilement que l'équation

$$\begin{aligned} f''_{uu}(u+t,v) + 4tf'_v(u,v+t) + t^2 f''_{vv}(u,v+t) \\ + 2f(u,v+t) - 2f(u,v) = 2 + 12t^2 + 12vt \end{aligned} \tag{3.1}$$

satisfait aux conditions 1) - 7) du Théorème 2.1 avec $\alpha = 0$. En différentiant (3.1) (formellement) deux fois par rapport à t et en mettant plus tard $t = 0$, on obtient l'équation hypoelliptique

$$f^{(4)}_{uuuu}(u,v) + 12f''_{vv}(u,v) = 24 .$$

(*) $\mathcal{D} = \{\psi : \psi : R^n \to R , \psi \in C^\infty(R^n) , \text{supp } \psi \text{ est compact}\}$ et $\mathcal{D}'$ est l'ensemble des distributions sur $\mathcal{D}$.

Toutes les équations linéaires aux dérivées partielles avec des coefficients constants ont la force constante; alors la condition 8) du Théorème 2.1 est satisfaite aussi. En conséquence, toutes les solutions continues f de (3.1) ayant les dérivées f'_v, f''_{uu}, f''_{vv} localement intégrables peuvent être résolues par la considération des équations fonctionnelles-différentielles qui en résultent.

En mettant $t = 0$ dans (3.1), on obtient $f''_{uu}(u,v) = 2$; alors $f(u,v) = u^2 + u\varphi(v) + \psi(v)$. En substituant cette expression dans (3.1) et en différentiant l'équation qui résulte de (3.1) par rapport à u et t on obtient

$$6\varphi'(v+t) + 6t\varphi''(v+t) + t^2\varphi'''(v+t) = 0 .$$

D'où $\varphi(v) = a$, où a est une constante arbitraire. En mettant $f(u,v) = u^2 + au + \psi(v)$ dans (3.1) et en différentiant par rapport à t on obtient, avec $t = 0$, $\psi'(v) = 2v$ et

$$f(u,v) = u^2 + au + v^2 + b ,$$

où a et b sont les constantes arbitraires.

Exemple 3.2. L'équation

$$f''_{uu}(u+t,v,w) + t^4 f''_{ww}(u,v,w) + f(u,v+t,w) + f(u,v-t,w) - 2f(u,v,w) = 0 \tag{3.2}$$

satisfait les conditions 1) - 7) du Théorème 2.1. En différentiant (3.2) formellement quatre fois par rapport à t et en mettant plus tard $t = 0$, on obtient l'équation hypoelliptique suivante:

$$f^{(6)}_{uuuuuu}(u,v,w) + 2f^{(4)}_{vvvv}(u,v,w) + 24f''_{ww}(u,v,w) = 0 .$$

Cette équation a la force constante et, en conséquence, la condition 8) du Théorème 2.1 est satisfaite. C'est pourquoi on peut résoudre l'équation (3.2) dans la classe des fonctions continues f avec les dérivées f''_{uu} et f''_{ww} localement intégrables en considérant les équations aux dérivées partielles qui en résultent.

On a

(3.3) $$f''_{uu}(u,v,w) = f''_{vv}(u,v,w) = f''_{ww}(u,v,w) = 0$$

d'où

(3.4) $$\begin{aligned} f(u,v,w) &= u\varphi(v,w) + \psi(v,w) \\ &= v\chi(u,w) + \alpha(u,w) \\ &= w\lambda(u,v) + \mu(u,v) \; . \end{aligned}$$

Par (3.3), l'équation (3.2) peut être remplacée par

$$f(u,v+t,w) + f(u,v-t,w) - 2f(u,v,w) = 0$$

et, en utilisant la première égalité (3.4), on a

(3.5) $$u\varphi(v+t,w) + \psi(v+t,w) + u\varphi(v-t,w) + \psi(v-t,w) - 2u\varphi(v,w) - 2\psi(v,w) = 0 \; .$$

En différentiant (3.5) une fois par rapport à u et deux fois par rapport à t et en substituant $t = 0$, on obtient $\varphi''_{vv}(v,w) \equiv 0$. D'où

(3.6) $$\varphi(v,w) = v\varphi(w) + \tilde{\varphi}(w) \; .$$

En substituant (3.5) dans (3.5), on obtient

$$\psi(v+t,w) + \psi(v-t,w) - 2\psi(v,w) = 0 \; .$$

D'où

(3.7) $$\psi(v,w) = v\psi(w) + \tilde{\psi}(w) \; .$$

Par (3.6) et (3.7), la première égalité (3.4) peut être remplacée par

(3.8) $$f(u,v,w) = uv\varphi(w) + u\tilde{\varphi}(w) + v\psi(w) + \tilde{\psi}(w) \; .$$

De même, en utilisant la troisième égalité (3.4), on obtient

(3.9) $$f(u,v,w) = vw\lambda(u) + w\tilde{\lambda}(u) + v\mu(u) + \tilde{\mu}(u) \; .$$

En comparant (3.8) et (3.9), on obtient après quelques calculs

(3.10) $$f(u,v,w) = Auvw + Buv + Cvw + Duw + Eu + Fv + Gw + H \; ,$$

où A , B , C , D , E , F , G , H sont des constantes arbitraires.

Remarque. 3.1. Des calculs semblables démontrent que (3.10) est la solution la plus générale dans la classe des fonctions continues f avec des dérivées f''_{uu} , f''_{ww} localement intégrables pour les équations

$$\begin{aligned} & f''_{uu}(u+t, v+t^5\omega(u,v,w,t), w+t^5\rho(u,v,w,t)) \\ & \quad + t^4 f''_{ww}(\sigma_1(u,v,w,t), \sigma_2(u,v,w,t), \sigma_3(u,v,w,t)) \\ & \quad + f(u,v+t,w) + f(u,v-t,w) - 2f(u,v,w) = 0 , \end{aligned}$$

où ω , ρ , σ_1 , σ_2 , $\sigma_3 \in C^4$ et $\sigma_1(u,v,w,0) = u$, $\sigma_2(u,v,w,0) = v$, $\sigma_3(u,v,w,0) = w$.

Exemple 3.3. On peut voir facilement que l'équation

$$(3.11) \qquad t^2 f^{(4)}_{uuuu}(u+t,v) + 2(1+u^2)[f(u,v-t) - f(u,v)] = -2(1+u^2)t$$

satisfait les conditions 1) - 7) du Théorème 2.1.

En différentiant (3.11) formellement deux fois par rapport à t et en mettant plus tard $t = 0$, on obtient

$$(3.12) \qquad f^{(4)}_{uuuu}(u,v) + (1+u^2) f''_{vv}(u,v) = 0 .$$

Pour démontrer que la condition 8) du Théorème 2.1 est aussi satisfaite, on démontre que l'équation (3.12) a la force constante et qu'elle est hypoelliptique pour $u = 0$.

Pour démontrer que l'opérateur différentiel

$$P\left(u , \frac{\partial}{\partial u} , \frac{\partial}{\partial v}\right) = \frac{\partial^4}{\partial u^4} + (1+u^2)\frac{\partial^2}{\partial v^2}$$

a la force constante, il faut démontrer que pour tout u et v de R fixés

$$\frac{\widetilde{P}(u,\xi,\eta)}{\widetilde{P}(u,\xi,\eta)} \le C_{u,v} \quad \text{pour tous} \quad \xi,\eta \in R ,$$

où

$$
\begin{aligned}
|\tilde{P}(u,\xi,\eta)|^2 &= \sum_{|p|\geq 0} |D^p P(u,\xi,\eta)|^2 \\
&= \xi^8 + 16\xi^6 + 144\xi^4 + 576\xi^2 + 576 + 2(1+u^2)\xi^4\eta^2 \\
&= (1+u^2)^2\eta^2 \ + 4(1+u^2)^2\eta^2 + 4(1+u^2)^2 \ .
\end{aligned}
$$

En effet,

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{\tilde{P}(u,\xi,\eta)}{\tilde{P}(v,\xi,\eta)}\right]^2 &= \frac{\xi^8 + 16\xi^6 + 144\xi^4 + 576\xi^2 + 576}{[\tilde{P}(v,\xi,\eta)]^2} \qquad \frac{2(1+u^2)\xi^4\eta^2}{[\tilde{P}(v,\xi,\eta)]^2} \\
&+ \frac{(1+u^2)^2\eta^4}{[P(v,\xi,\eta)]^2} + \frac{4(1+u^2)^2\eta^2}{[P(v,\xi,\eta)]^2} + \frac{4(1+u^2)^2}{[P(v,\xi,\eta)]^2} \\
&\leq 1 + \frac{1+u^2}{1+v^2} + 3\,\frac{(1+u^2)^2}{(1+v^2)^2} \ .
\end{aligned}
$$

D'où

$$
\frac{\tilde{P}(u,\xi,\eta)}{\tilde{P}(v,\xi,\eta)} \leq \left(1 + \frac{1+u^2}{1+v^2} + 3\,\frac{(1+u^2)^2}{(1+v^2)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \ .
$$

Des estimations simples démontrent que

$$
\frac{D^p P(0,\xi,\eta)}{P(0,\xi,\eta)} = \frac{D^p(\xi^4+\eta^2)}{\xi^4+\eta^2} \to 0 \quad \text{quand} \quad \xi^2+\eta^2 \to \infty
$$

pour chaque $p = (p_1,p_2)$ tel que $|p| = p_1 + p_2 \geq 1$ c'est-à-dire l'équation (3.12) est hypoelliptique pour $u = 0$. Alors la condition 8) du Théorème 2.1 est satisfaite et on peut résoudre (3.11) dans la classe des fonctions continues f avec les dérivées $f^{(4)}_{uuuu}$ localement intégrables en considérant les équations aux dérivées partielles qui en résultent.

En différentiant (3.11) par rapport à t et en mettant plus tard $t = 0$, on obtient $f'_v(u,v) \equiv 1$ et $f(u,v) = v + \varphi(u)$. Des calculs simples montrent que

$$
f(u,v) = v + au^3 + bu^2 + cu + d \ ,
$$

où a , b , c , d sont des constantes arbitraires, est la solution la plus générale de (3.11) dans cette classe de fonctions.

Remarque 3.2. Tous les exemples des applications donnés dans [2] concernent des cas où les équations aux dérivées partielles qui sont considérées ont la force constante parce qu'elles sont elliptiques ou hypoelliptiques. L'exemple 3.3 est essentiellement différent.

RÉFÉRENCES

[1] HÖRMANDER, L., Linear partial differential operators, Die Grundlehren der Math. Wissenschaften, Band 116, Academic Press, New York Springer-Verlag, Berlin, 1963.

[2] SWIATAK, H., The regularity of the locally integrable and continuous solutions of nonlinear functional equations, Trans. Amer. Math. Soc. 221 (1) (1976), 97-118.

Department of Mathematics
McGill University
Montreal, Quebec

Manuscrit reçu le 16 juin 1978.