Ann. Sc. Math. Québec, 1979, Vol. III, No 1, pp. 143-154

NOMBRES RÉELS ET COMPLEXES DANS LES TOPOS SPATIAUX

Christiane Rousseau

0. INTRODUCTION

La notion de topos a été introduite comme généralisation de la notion de catégorie de faisceaux. Ces dernières années on a montré que tout topos élémentaire peut être muni d'un langage interne qui permet d'y faire des mathématiques à peu près comme dans les ensembles, à condition de n'utiliser ni l'axiome du choix ni le tiers exclu ([3],[5]). Dans ce papier nous nous limitons à considérer des catégories de faisceaux sur un espace topologique, ou topos spatiaux. Nous montrons comment nous pouvons, à l'aide du langage, y considérer des objets que nous appellerons objets de nombres réels, ou objets de nombres complexes, appelés ainsi parce que nous pouvons y développer soit l'analyse réelle, soit l'analyse complexe.

Une catégorie de faisceaux sur un espace topologique X, $Sh(X)$, est munie d'un "objet de nombres naturels", c'est-à-dire d'un objet qui vérifie la formulation catégorique (avec diagrammes) des axiomes de Peano. Cet objet est le faisceau $\mathbb{N}_X$ donné par:

$$\mathbb{N}_X(U) = \{f : U \to \mathbb{N} \mid f \text{ est localement constante}\} .$$

Sur cet objet $\mathbb{N}_X$ nous imitons les constructions classiques pour obtenir des "objets de nombres entiers et rationnels", $\mathbb{Z}_X$ et $\mathbb{Q}_X$:

$$\mathbb{Z}_X(U) = \{f : U \to \mathbb{Z} \mid f \text{ est localement constante}\} ,$$

$$\mathbb{Q}_X(U) = \{f : U \to \mathbb{Q} \mid f \text{ est localement constante}\} .$$

Ces constructions peuvent se faire par diagrammes. Cependant, nous pouvons aussi faire ces constructions à l'aide du langage interne en utilisant notre intuition ensembliste. Par exemple $\mathbb{Z}_X$ est construit comme $\mathbb{N}_X \times \mathbb{N}_X/\cong$, où $\cong$ est le sous-faisceau de $(\mathbb{N}_X \times \mathbb{N}_X)^2$ donné par:

$$\cong(U) = \{((n,m),(n',m')) \in (\mathbb{N}_X \times \mathbb{N}_X)^2(U) \mid n+m'=n'+m\} .$$

Ce que dans le langage on construit comme quotient par une relation d'équivalence s'interprète comme quotient de faisceaux. De même la formulation catégorique des axiomes de Peano devient, dans le langage, la formulation ordinaire. C'est en ce sens que notre langage "fonctionne": si nous faisons une construction ou une preuve dans le langage et si nous interprétons chaque étape de cette construction ou preuve, nous obtenons une construction ou preuve dans les faisceaux.

Nous nous intéressons maintenant au problème de construire l'objet des nombres réels dans un topos, dans le but suivant: si nous avons un objet de nombres réels, nous pouvons faire de l'analyse (constructive) dans le topos, puis interpréter nos résultats pour obtenir des résultats sur les faisceaux. Classiquement, nous avons au moins deux constructions équivalentes des nombres réels: celles de Cauchy et Dedekind. Ces constructions ne sont plus équivalentes dans un topos: dans le topos $Sh(X)$, où X est localement connexe, l'objet des réels de Cauchy est donné par $\mathbb{R}_C$, où $\mathbb{R}_C(U) = \{f : U \to \mathbb{R} \mid f$ est localement constante$\}$, et celui des réels de Dedekind par $\mathbb{R}_X$, où $\mathbb{R}_X(U) = \{f : U \to \mathbb{R} \mid f$ continue$\}$. Ces deux objets sont des "bons objets" de nombres réels: $\mathbb{R}_C$ est le faisceau trivial de fibre $\mathbb{R}$, donc simplement une copie de $\mathbb{R}$: faire de l'analyse sur $\mathbb{R}_C$ revient à faire de l'analyse sur $\mathbb{R}$. Et $\mathbb{R}_X$ est un faisceau qu'il est intéressant d'étudier et pour lequel le point de vue des topos n'est pas dénué d'intérêt.

Il apparaît naturel de définir deux objets de nombres complexes dans $Sh(X)$: $\mathbb{C}_C = \mathbb{R}_C \times \mathbb{R}_C$ et $\mathbb{C}_X = \mathbb{R}_X \times \mathbb{R}_X$. S'intéressant maintenant aux fonctions continues dans le topos, c'est-à-dire aux morphismes $f : \mathbb{C}_X \to \mathbb{C}_X$ qui vérifient la formule:

$$\forall z \in \mathbb{C}_X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall z' \quad |z-z'| < \delta \to |f(z)-f(z')| < \varepsilon$$

(on notera $\mathrm{Cont}_{Sh(X)}(\mathbb{C}_X,\mathbb{C}_X)$ l'ensemble de ces morphismes), on s'aperçoit qu'il y a une bijection entre $\mathrm{Cont}_{Sh(X)}(\mathbb{C}_X,\mathbb{C}_X)$ et l'ensemble $\mathrm{Cont}(X\times\mathbb{C},\mathbb{C})$ des fonctions continues de $X \times \mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

$$\mathrm{Cont}(X\times\mathbb{C},\mathbb{C}) \stackrel{\sim}{\to} \mathrm{Cont}_{Sh(X)}(\mathbb{C}_X,\mathbb{C}_X) .$$

La bijection marche ainsi:

$$f : X \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ continue} \mapsto \hat{f} : \mathbb{C}_X \to \mathbb{C}_X$$

$\hat{f}_U(h)(x) = f(x,h(x))$, $h \in \mathbb{C}_X(U)$, $x \in U$.

Dans l'autre sens:

$$\overline{f} : X \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \leftarrow\!\shortmid f : \mathbb{C}_X \to \mathbb{C}_X$$

$\overline{f}(x,z) = f_X(c_z)(x)$ où c_z est la section constante de valeur z .

Cette bijection est démontrée dans [4] et exploitée ainsi: nous démontrons le théorème de division de Weierstrass à une variable dans un topos et l'interprétons dans le topos $Sh(\mathbb{C}^{n-1})$, en espérant obtenir le théorème classique de Weierstrass à n variables. Pour ceci, nous interprétons les fonctions holomorphes $f : \mathbb{C}_X \to \mathbb{C}_X$ dans $Sh(\mathbb{C}^{n-1})$: nous obtenons les fonctions $\overline{f} : \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C} = \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ continues et holomorphes dans la dernière variable. Pour obtenir exactement les fonctions holomorphes $\overline{f} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ nous nous apercevons qu'il faut introduire un nouvel objet H , faisceau de germes de fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}^{n-1}$, et se restreindre aux fonctions $f : \mathbb{C}_X \to \mathbb{C}_X$ qui satisfont $f(H) \subset H$. Il faut aussi, en un sens, "faire de l'analyse complexe sur H" . Or toute l'analyse complexe que nous avons développée sur $\mathbb{C}_X$ fonctionne sur H . H apparaît donc naturellement comme un "objet de nombrescomplexes", c'est-à-dire comme un objet sur lequel faire de l'analyse complexe.

Depuis, la pratique nous a indiqué d'autres objets qu'il s'imposait de considérer comme des objets de nombres réels ou complexes. Nous allons donc donner ici une définition axiomatique des nombres réels (resp. complexes), qui soit à la fois satisfaite par les exemples que nous a indiqués la pratique, et nous permette de plus de faire de l'analyse dans le topos.

Classiquement, il n'existe qu'un seul objet de nombres réels. La construction de Dedekind répond au besoin d'ajouter à $\mathbb{Q}$ les suprema qui manquent. Mais du fait que les réels de Dedekind coïncident avec les réels de Cauchy, ils deviennent solution universelle au problème de compléter $\mathbb{Q}$ comme espace métrique. Les différentes constructions classiques des nombres réels peuvent donc être considérées comme des solutions à un même problème universel: celui de compléter $\mathbb{Q}$, par exemple. Dans ce papier nous voulons, en un deuxième temps, montrer que les différents objets de nombres réels dans un topos spatial peuvent également, en tant qu'espaces topologiques, être considérés comme des solutions à un même problème universel. Pour ce faire, nous regardons l'objet des réels formels introduit par Joyal: un espace formel est une algèbre de Heyting complète (pensée comme l'objet des ouverts d'un espace topologique). L'espace formel des nombres réels est l'algèbre de Heyting $\mathrm{Ouv}(R)$ libre, engendrée par les intervalles ouverts (a,b) rationnels, munis de quelques relations qui seront précisées ci-dessous. Dans les topos spatiaux, tous les objets de nombres réels ont les mêmes ouverts, qui coïncident précisément avec $\mathrm{Ouv}(R)$. Ces objets ne sont donc que des représentations différentes d'un même espace formel.

1. AXIOMATISATION DES NOMBRES RÉELS ET COMPLEXES-EXEMPLES

Nous rappelons maintenant la construction des réels de Cauchy et des réels de Dedekind (cf.[3]).

Réels de Cauchy:

Considérons d'abord le faisceau $\mathbb{Q}_X^{\mathbb{N}_X}$ donné par:

$$\mathbb{Q}_X^{\mathbb{N}_X}(U) = \{f : \mathbb{N}_{X|U} \to \mathbb{Q}_{X|U} \mid f \text{ morphisme de faisceaux}\} .$$

On considère ensuite le sous-faisceau $\mathrm{Cau} \rightarrowtail \mathbb{Q}_X^{\mathbb{N}_X}$ des suites de Cauchy défini par:

$$f \in \mathrm{Cau} \quad \text{ssi} \quad \forall n \in \mathbb{N}_X^+ \quad \exists N \in \mathbb{N}_X \quad \forall p,q \geq N \quad |f(p)-f(q)| < \frac{1}{n} .$$

Alors $\mathbb{R}_C$ est donné par $\mathrm{Cau}/\sim$ où:

$$f \sim f' \text{ ssi } \forall n \in \mathbb{N}_X^+ \quad \exists N \in \mathbb{N}_X \quad \forall p \geq N \quad |f(p)-f'(p)| < \frac{1}{n} .$$

Réels de Dedekind:

On considère le faisceau $P(\mathbb{Q}_X)$ des parties de $\mathbb{Q}_X$ défini par:

$$P(\mathbb{Q}_X)(U) = \{A \mid A \text{ sous-faisceau de } \mathbb{Q}_X|_U\} .$$

Alors $\mathbb{R}_X$ est le sous-faisceau de $P(\mathbb{Q}_X)$ donné par: $r = (U,L) \in \mathbb{R}_X$ ssi

1) $L = \{q \mid \exists q' \in L \text{ , } q' > q\}$ $\qquad U = \{q \mid \exists q' \in U \text{ , } q' < q\}$

2) $\forall q \in L \quad \forall q' \in U \quad q < q'$

3) $\forall n \in \mathbb{N}_X^+ \quad \exists q \in U \quad \exists q' \in L \quad q - q' < \frac{1}{n}$.

Remarque. Cette dernière définition diffère de la définition classique en ce qu'un nombre réel est un couple de coupures, l'une inférieure, l'autre supérieure. Si l'on s'était limité aux coupures inférieures, on aurait obtenu le faisceau de germes de fonctions semi-continues inférieurement et non plus continues.

Nous donnons maintenant la description axiomatique des nombres réels. Nous avons cru nécessaire de distinguer trois définitions différentes de nombres réels, correspondant à trois groupes d'axiomes non équivalents et nous expliquerons plus tard le pourquoi de cette distinction.

Axiomes des nombres réels:

Un objet $\mathbb{R}$ est un objet de nombres réels ssi:

1) $\mathbb{Q}_X \subset \mathbb{R}_C \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{R}_X$, où les inclusions sont des inclusions d'anneaux.

2) $\mathbb{R}$ est un corps muni d'un écart au sens de Mulvey:

$\forall x \in \mathbb{R} \qquad x \# 0 \leftrightarrow x \in \text{Unités } (\mathbb{R})$, où $x \# 0$ est défini comme $|x| > 0$.

3) Axiome fort: $\mathbb{R}$ est complet sous les limites de suites de Cauchy :

$f : \mathbb{N}_X \to \mathbb{R}$ est une suite de Cauchy ssi $\forall n \in \mathbb{N}_X^+ \quad \exists N \in \mathbb{N}_X \quad \forall p,q \geq N$

$|f(p)-f(q)| < \frac{1}{n}$,

f converge ssi $\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}_X^+ \quad \exists n \in \mathbb{N}_X \quad \forall p \geq N \quad |f(p)-a| < \frac{1}{n}$;

ou

3') Axiomes faibles:

i) $\forall f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uniformément continue

$$\int_b^a f\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(a+\frac{b-a}{n}\,i) \in \mathbb{R}\ .$$

ii) $\forall f : U \to \mathbb{R}_X$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}_X$, si f est C^∞ et standard au sens de Fourman [1] i.e. $f(\mathbb{R}_C \cap U) \subset \mathbb{R}_C$, alors $f(\mathbb{R}\cap U) \subset \mathbb{R}$.

ou

ii') $\forall f : U \to \mathbb{R}_X$ réelle-analytique et standard, alors $f(\mathbb{R}\cap U) \subset \mathbb{R}$.

Remarques.

1) L'écriture "$\forall f : U \to \mathbb{R}_X$" se situe dans le langage du topos et s' interprête: "pour tout ouvert V de X et tout morphisme $f : V|_U \to \mathbb{R}_X|_U$ ...

2) Le premier axiome assure que $\mathbb{Q}_X$ est "dense" dans $\mathbb{R}$: en effet, toute fonction $f : \mathbb{Q}_X \to \mathbb{R}_X$, uniformément continue sur tout intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{Q}_X$, se prolonge à une fonction unique $f : \mathbb{R}_X \to \mathbb{R}_X$ continue.

3) Ces axiomes peuvent être considérés dans tout topos élémentaire avec objet de nombres naturels.

4) Les axiomes ii) et ii') assurent en particulier que $\forall x \in \mathbb{R}$, e^x , $\sin x$, $\cos x$, etc., sont dans $\mathbb{R}$.

5) Nous avons ici essentiellement trois groupes d'axiomes: un objet de nombres réels doit satisfaire soit 3) , soit 3') i) et ii) , soit 3') i) et ii') . Nous discuterons du bien fondé de cette multiplicité d'axiomes après avoir donné des exemples.

6) Classiquement, ces axiomes caractérisent $\mathbb{R}$ à cause de l'axiome 1) puisque réels de Dedekind et de Cauchy coïncident.

7) Probablement, tout objet de nombres réels contient $\mathbb{R}_C$. A défaut de preuve, nous le mettons comme axiome.

Exemples.

1) $\mathbb{R}_C$, si X est localement connexe, satisfait les axiomes forts, i.e. 1) , 2) , 3) .

2) $\mathbb{R}_X$ satisfait les axiomes forts.

3) $\mathbb{R}_\infty$, le faisceau de germes de fonctions C^∞ sur une variété C^∞ X , est un objet de nombres réels satisfaisant 3') i) , ii) et ii') .

4) $\mathbb{R}_\omega$, le faisceau de germes de fonctions réelle-analytiques sur une variété réelle-analytique, est un objet de nombres réels satisfaisant 3') , i) et ii') .

Remarque. Nous avons cru nécessaire de distinguer trois groupes d'axiomes: 1), 2), 3), ou 1), 2), 3') i) et ii), ou 1), 2), 3') i) et ii') . En effet, $\mathbb{R}_\omega$ ne satisfait que les axiomes les plus faibles, à savoir le troisième groupe. Toutefois, en ce qui concerne $\mathbb{R}_\infty$, nous préférons de beaucoup l'axiome ii) , grâce auquel on peut démontrer l'existence de fonctions de la forme $f(x) = 0$ si $x \leq 0$, et $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x > 0$, (fonctions plates), lesquelles sont très utilisées en analyse différentielle. Comme en général on ne mélange pas l'analyse différentielle et l'analyse "réelle-analytique", que $\mathbb{R}_\infty$ apparaît naturellement dans le premier contexte et $\mathbb{R}_\omega$ dans le second, il ne nous a pas paru gênant d'avoir des axiomes distincts pour l'analyse différentielle et l'analyse réelle-analytique. D'autre part, l'axiome 3) est beaucoup plus fort que les axiomes 3') i) et ii) et permet de pousser l'analyse beaucoup plus loin. C'est pourquoi, nous mentionnons tous les objets qui le vérifient. Il apparaît évident que la motivation derrière tous ces axiomes est d'obtenir de "bons objets pour l'analyse".

Nous donnons maintenant une axiomatisation analogue des nombres complexes.

Axiomes des nombres complexes:

$\mathbb{C}$ est un objet de nombres complexes ssi:

1) $\mathbb{Q}_X \times \mathbb{Q}_X \subset \mathbb{R}_C \times \mathbb{R}_C \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{R}_X \times \mathbb{R}_X$, où les inclusions sont des inclusions d'anneaux.

2) $\mathbb{C}$ est un corps avec écart: $\forall z \in \mathbb{C}$ $\quad z \in \text{Unités}(\mathbb{C}) \leftrightarrow z \# 0$.

3) Axiome fort: $\mathbb{C}$ est Cauchy complet.

ou

3') Axiomes faibles:

i) $\forall\gamma : [a,b] \cap \mathbb{Q}_X \to \mathbb{C}$ uniformément de classe C^1 ,

$\forall f : \mathrm{Im}\gamma \to \mathbb{C}$ uniformément continue, alors:

$$\int_\gamma f\,dz = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\gamma(a+\frac{b-a}{n}\,i))\gamma'(a+\frac{b-a}{n}\,i) \in \mathbb{C} .$$

ii) $\forall f : U \cap \mathbb{C}_X \to \mathbb{C}_X$, holomorphe et standard, i.e. $f(U\cap\mathbb{C}_C) \subset \mathbb{C}_C$, alors $f(U\cap\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}$.

Exemples.

1) $\mathbb{C}_C = \mathbb{R}_C^2$, $\mathbb{C}_X = \mathbb{R}_X^2$, sont des objets de nombres complexes au sens fort.

2) $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{R}_\infty^2$, $\mathbb{C}_\omega = \mathbb{R}_\omega^2$, sont des objets de nombres complexes au sens faible.

3) H , le faisceau de germes de fonctions holomorphes sur une variété analytique X , est un objet de nombres complexes au sens fort.

Remarque. Il existe des objets de nombres complexes, comme H , qui ne peuvent s'écrire comme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, où $\mathbb{R}$ est un objet de nombres réels, ce qui justifie une axiomatisation particulière pour les nombres complexes.

Théorème. $\mathbb{R}_C$, $\mathbb{R}_X$, $\mathbb{R}_\infty$, $\mathbb{R}_\omega$, sont des objets de nombres réels. $\mathbb{C}_C$, $\mathbb{C}_X$, $\mathbb{C}_\infty$, $\mathbb{C}_\omega$, H , sont des objets de nombres complexes.

Démonstration. Il faut montrer que ces objets vérifient 3) ou 3') .

a) La convergence dans le topos Sh(X) s'interprète comme la convergence uniforme sur tout compact ([4]). Donc $\mathbb{R}_C$, $\mathbb{R}_X$, $\mathbb{C}_C$, $\mathbb{C}_X$, H sont complets au sens de Cauchy et les autres ne le sont pas.

b) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}_\infty$ s'interprète comme $\overline{f} : U \cap [a,b] \to \mathbb{R}$, U ouvert de X , et si U a pour coordonnées locales $t_1,\dots,t_n$, alors

$$\frac{\partial}{\partial t_i}\int_a^b \overline{f}(t,x)\,dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t_i} f(t,x)\,dx ,$$ et on itère. Donc

$$\int_a^b f(t,x)\,dx \in \mathbb{R}_\infty(U) .$$ $\mathbb{R}_\infty$ satisfait donc 3') i) .

c) Par un argument similaire $\mathbb{R}_\omega$ satisfait 3') i) , et $\mathbb{C}_\infty$ et $\mathbb{C}_\omega$ satisfont 3') i) .

d) Une fonction standard $f : U \to \mathbb{R}_X$ s'interprète comme une fonction $f : \overline{U} \subset X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, constante dans la première variable ($\overline{U}$ ouvert de $X \times \mathbb{R}$) . Donc $f(\mathbb{R}_\infty) \subset \mathbb{R}_\infty$ si f est C^∞ , et $f(\mathbb{R}_\omega) \subset \mathbb{R}_\omega$ si f est réelle-analytique.

3) De même $\mathbb{C}_\infty$ et $\mathbb{C}_\omega$ satisfont 3') ii) .

2. RELATION AVEC LES RÉELS FORMELS DE JOYAL

Définition. Un espace formel au sens de Joyal est une algèbre de Heyting complète, c'est-à-dire un treillis distributif avec des suprema arbitraires.

Remarque. L'idée de départ de la topologie est que les points d'un espace topologique ne jouent qu'un rôle secondaire par rapport au rôle joué par le treillis des ouverts. Il apparaît donc intéressant de mettre l'emphase sur cette dernière notion et de ne penser à un espace topologique qu'à travers son treillis d'ouverts. D'où l'introduction de la notion d'espace formel. Remarquons que classiquement, connaissant $\mathrm{Ouv}(X)$ où X est espace métrique, on peut retrouver X comme l'ensemble des ultrafiltres.

Nous décrivons maintenant les réels formels au sens de Joyal: $\mathrm{Ouv}(R)$ est l'algèbre de Heyting complète libre engendrée par les intervalles rationnels qui satisfont précisément les relations suivantes ($I(a,b)$ dénotera l'intervalle rationnel formel ouvert d'extrémités $a,b \in \mathbb{Q}$) :

1) $I(a,b) = 0$ si $a \geq b$

2) $I(a,b) \wedge I(a',b') = I(a \vee a', b \wedge b')$

3) $I(a,b) \vee I(a',b') = I(a,b')$ si $a < a' < b < b'$

4) $I(a,b) = \bigvee\limits_{a<\alpha<\beta<b} I(\alpha,\beta)$

5) $1 = \bigvee\limits_{a<b} I(a,b)$.

De la même manière, on peut définir l'objet des complexes formels $\mathrm{Ouv}(C)$, comme l'algèbre de Heyting complète engendrée par $\mathrm{Ouv}(R)^2$.

Théorème. Tous les objets de nombres réels (resp. complexes) ont les mêmes ouverts.

Démonstration. On a une bijection entre les ouverts de $\mathbb{R}_X$ dans $Sh(X)$ et les ouverts de $X \times \mathbb{R}$:

$$\mathrm{Ouv}_{Sh(X)}(\mathbb{R}_X) \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} \mathrm{Ouv}(X \times \mathbb{R})$$

$$U \mapsto \varphi(U) = \overline{U} = \{(t,x) \mid \exists s \in U(V) s(t) = x\}$$

$$\hat{U} = \psi(U) \leftarrow U$$

où $\hat{U}(V) = \{f : V \to \mathbb{R} \mid f \text{ continue et pour tout } t \in V\ (t,f(t)) \in U\}$.

Ces deux fonctions sont inverses l'une de l'autre. Pour les détails, voir [4] dans le cas complexe. On montre de même que $\mathrm{Ouv}_{Sh(X)}(\mathbb{R}_C) \cong \mathrm{Ouv}(X \times \mathbb{R})$.

Donc si $\mathbb{R}_C \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{R}_X$ les fonctions restriction suivantes deviennent des isomorphismes:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ouv}_{Sh(X)}(\mathbb{R}_X) \arrow[r] \arrow[dr, "\sim"'] & \mathrm{Ouv}_{Sh(X)}(\mathbb{R}) \arrow[r] & \mathrm{Ouv}_{Sh(X)}(\mathbb{R}_C) \arrow[dl, "\sim"] \\ & \mathrm{Ouv}(X \times \mathbb{R}) & \end{tikzcd}$$

Ce théorème n'est pas nouveau: il nous a été indiqué par Michael Fourman. Cependant, ce que nous trouvons intéressant de noter ici, c'est l'unité nouvelle qu'il donne à la notion de nombres réels (resp. complexes): tous les objets de nombres réels (resp. complexes) ne sont qu'un même espace formel. De plus, Edouard Valentine a montré que $\mathrm{Ouv}_{Sh(X)}(\mathbb{R}_X)$ coïncide précisément avec $\mathrm{Ouv}(R)$ l'espace formel des nombres réels. Comme $\mathrm{Ouv}(R)$ est construit comme solution à un problème universel, tous nos objets de nombres réels sont, en tant qu'espaces formels, solutions d'un même problème universel. Il en est de même des objets de nombres complexes.

Maintenant, parmi nos exemples d'objets de nombres complexes, nous avons noté que H, contrairement aux autres objets, ne s'écrivait pas sous la forme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, pour un objet de nombres réels $\mathbb{R}$. Mais par la remarque précédente, on a $\mathrm{Ouv}(H) \cong \mathrm{Ouv}(C)$. Or $\mathrm{Ouv}(C)$ est l'algèbre de Heyting engendrée par $\mathrm{Ouv}(R)^2$. Donc H n'a plus, en tant qu'espace formel, une structure différente des autres objets de nombres complexes. H retrouve, en tant qu'espace formel, une structure de produit: par là, nous entendons que $\mathrm{Ouv}(H)$ est l'algèbre de Heyting complète engendrée par un produit d'algèbres de Heyting: $\mathrm{Ouv}(H)$ est engendrée par $\mathrm{Ouv}(R)^2$. Ceci correspond bien à l'idée de produit d'espaces topologiques, vu du point de vue des ouverts.

Les réels formels de Joyal furent introduits spécialement pour les topos non spatiaux, pour remédier aux propriétés pathologiques des réels de Dedekind: ceux-ci n'étaient plus localement compacts, etc. Comme dans les topos spatiaux, les réels formels coïncidaient avec les réels de Dedekind, il n'avait pas semblé intéressant de les considérer dans ce contexte, mais ces quelques remarques donnent une justification de cette notion, même dans ce cas particulier.

RÉFÉRENCES

[1] FOURMAN, M., Comparaison des réels lisses d'un topos. Structures lisses sur un topos élémentaire, Cah. Top. et Géom. Diff. Amiens, 1975.

[2] FOURMAN, M., HYLAND, M., Sheaf models for analysis, Proc. of the Durham Symposium 1977. A paraître dans SLN.

[3] MULVEY, C., Intuitionistic algebra and representations of rings, Mem. A.M.S. 148 (1974), p. 3-57.

[4] ROUSSEAU, C., Topos theory and complex analysis, Thèse, à paraître dans les Proc. of the Durham Symposium, 1977 (SLN).

[5] SCHLOMIUK, D., Logique des topos, Presses de l'Univ. de Montréal, 1976.

[6] VALENTINE, E., Sur les généralisations des nombres réels, Mémoire UQAM 1976.

Department of Mathematics
Burnside Hall
McGill University
805, rue Sherbrooke ouest
Montréal, Québec
H3A 2K6

Manuscrit reçu le 1er novembre 1977
Revisé le 2 février 1978.