Ann. Sc. Math. Québec, 1979, Vol. III, No 1, pp. 107-118

FONCTIONS ADDITIVES DONT L'ORDRE MOYEN EST a log log n

Armel Mercier

1. INTRODUCTION

Une fonction arithmétique est une fonction définie sur l'ensemble des entiers naturels et à valeurs dans $\mathbb{C}$. On sait qu'une fonction arithmétique f, réelle ou complexe, est dite additive si l'on a

$$f(mn) = f(m) + f(n)$$

toutes les fois que $(m,n) = 1$. On appellera $\overline{f}(n)$ l'ordre moyen de $f(n)$, où

$$\overline{f}(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(k) \ .$$

Soit g une fonction additive à valeurs réelles telle que $g(p^k)$ dépend seulement de k et $g(p^k) = O(2^{k/2})$, $k \geq 1$. Pour cette classe de fonctions additives, S.L. Segal [7] a trouvé une formule asymptotique pour $\sum_{n \leq x} g(n)$. Récemment, l'ordre de grandeur de $\sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv 0 (p_0)}} g(n)$, p_0 étant un nombre premier fixe mais arbitraire, a été aussi étudié [2].

Nous nous proposons ici d'étudier l'ordre de grandeur de $\sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv \ell (k)}} f(n^\beta)$, pour tout $k, \ell, \beta \in \mathbb{N}$, (pour $\beta = 1$, voir [6]), où f est une fonction additive telle que pour $a \in \mathbb{R}_+$, $\sum_p \frac{f(p^\beta) - a}{p}$ converge absolument et $f(p^r) = O(2^{r/2})$,

$r \geq 2$. Ces résultats sont obtenus à l'aide de méthodes élémentaires et de plus nous utilisons le fait que $\pi(x) = O\left(\frac{x}{\log x}\right)$ lequel s'obtient aussi à l'aide de considérations élémentaires (voir [1]).

2. RESULTATS

Théorème 1. Soit f une fonction additive et soient a une constante positive et $\beta \in \mathbb{N}$ telles que $\sum_p \frac{f(p^\beta) - a}{p}$ converge absolument et $f(p^r) = O(2^{r/2})$, $r \geq 2$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{\substack{n\leq x\\ n\equiv 0(k)}} f(n^\beta) = \frac{ax \log\log x}{k} + Ax + o(x) ,$$

où

$$A = \frac{1}{k}\left(aB_1 + \sum_{\substack{p\\ r\geq 2}} \frac{f(p^{r\beta}) - f(p^{(r-1)\beta})}{p^r} - \sum_{\substack{p|k\\ r\geq 1}} \frac{f(p^{r\beta}) - f(p^{(r-1)\beta})}{p^r} \right.$$

$$\left. + f(k^\beta) + \sum_p \frac{f(p^\beta) - a}{p} + \sum_{\substack{p^t\|k\\ r\geq 1}} \frac{f(p^{(r+t)\beta}) - f(p^{(r+t-1)\beta})}{p^r} \right)$$

et

$$B_1 = \gamma + \sum_p \left\{ \log\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p} \right\} ,$$

γ étant la constante d'Euler.

Démonstration. Pour tout $k \in N$, on a

$$\sum_{\substack{n\leq x\\ n\equiv 0(k)}} f(n^\beta) = \sum_{\substack{n\leq x\\ n\equiv 0(k)}} \left(\sum_{p^r|n} (f(p^{r\beta}) - f(p^{(r-1)\beta})) = \sum_{mk\leq x} \sum_{p^r|mk} (f(p^{r\beta}) - f(p^{(r-1)\beta})) \right).$$

Soit $(p^r,k) = p^t$, $0 \leq t \leq r$, alors $p^r|mk$ entraîne que $p^{r-t}|mk_1$ où $k = k_1p^t$. Mais $(k_1,p^{r-t}) = 1$, d'où $p^{r-t}|m$ i.e. $m = m_1p^{r-t}$. Puisque

$m \leq \frac{x}{k}$, alors $m_1 \leq \frac{x}{kp^{r-t}} = \frac{x}{[k,p^r]}$. Donc le nombre d'entiers $n \leq x$, $n \equiv 0(k)$, tel que $p^r | n$ est égal à $\left[\frac{x}{kp^{r-t}}\right]$, d'où

$$\sum_{\substack{n\leq x\\ n\equiv 0(k)}} f(x^{\beta}) = \sum_{\substack{p^r\leq x\\ r\geq 1\\ p\nmid k}} (f(p^{r\beta}) - f(p^{(r-1)\beta}))\left[\frac{x}{kp^r}\right] + \sum_{\substack{p^r\leq x\\ p^t\|k\\ 1\leq t\leq r-1}} ((f(p^{r\beta}) - f(p^{(r-1)\beta}))\left[\frac{x}{kp^{r-t}}\right]$$

$$+ \sum_{\substack{p^r\leq x\\ r\geq 1\\ (p^r,k)=p^r}} ((f(p^{r\beta}) - f(p^{(r-1)\beta}))\left[\frac{x}{k}\right] .$$

De cette égalité on obtient (en tenant compte que x est grand),

(1)

$$\sum_{\substack{n\leq x\\ n\equiv 0(k)}} f(n^{\beta}) = \sum_{p\leq x} f(p^{\beta})\left[\frac{x}{kp}\right] + \frac{x}{k}\sum_{\substack{p^r\leq x\\ r\geq 2}} \frac{f(p^{r\beta}) - f(p^{(r-1)\beta})}{p^r} - \frac{x}{k}\sum_{\substack{p|k\\ r\geq 1}} \frac{f(p^{r\beta}) - f(p^{(r-1)\beta})}{p^r}$$

$$+ \frac{x}{k}\sum_{\substack{p^t\|k\\ r\geq 1}} \frac{f(p^{(r+t)\beta}) - f(p^{(r+t-1)\beta})}{p^r} + \frac{x}{k}\sum_{p^r|k} f(p^{r\beta}) - f(p^{(r-1)\beta})$$

$$+ 0\left(\sum_{\substack{p^r\leq x\\ r\geq 2}} |f(p^r)|\right) .$$

Puisque $f(p^r) = 0(2^{r/2})$, alors

$$\sum_{\substack{p^r \le x \\ r \ge 2}} |f(p^r)| = 0\left(\sum_{2 \le r \le \frac{\log x}{\log 2}} \sum_{p \le x^{1/r}} 2^{r/2} \right) = 0\left(\pi(x^{1/2}) \sum_{r \le \frac{\log x}{\log 2}} 2^{r/2} \right)$$

$$= 0\left(\frac{x^{1/2}}{\log x} \; 2^{1/2} \; \frac{\log x}{\log 2} \right) = 0\left(\frac{x}{\log x} \right) .$$

La seconde somme de (1) converge. En effet,

$$\sum_{\substack{p^r \le x \\ r \ge 2}} \frac{|f(p^{r\beta}) - f(p^{(r-1)\beta})|}{p^r} = 0\left(\sum_{\substack{p^r \le x \\ r \ge 2}} \left(\frac{2^{\beta/2}}{p} \right)^r \right) = 0\left(\sum_{r=2}^{\infty} \sum_p \left(\frac{2^{\beta/2}}{p} \right)^r \right) = 0\left(2^{\beta+1} \sum_p \frac{1}{p(p-2^{\beta/2})} \right) = 0(1) .$$

On sait que $\sum_{p>y} \frac{1}{p^k} = 0\left(\frac{1}{y^{k-1} \log y} \right)$, $k \ge 2$ lorsque $y \to \infty$, alors

$$\sum_{\substack{p^r > x \\ 2 \le r \le \frac{\log x}{\log 2}}} \frac{f(p^{r\beta}) - f(p^{(r-1)\beta})}{p^r}$$

$$= 0\left(\sum_{r=2}^{\log x/\log 2} \sum_{p > x^{1/r}} \frac{f(p^{r\beta}) - f(p^{(r-1)\beta})}{p^r} \right)$$

$$= 0\left(\sum_{r=3}^{\log x/\log 2} \sum_{p > x^{1/r}} \frac{f(p^{r\beta}) - f(p^{(r-1)\beta})}{p^r} \right) + 0\left(\sum_{p > x^{1/2}} \frac{1}{p^2} \right)$$

$$= 0\left(\sum_{r=3}^{\log x/\log 2} \frac{|f(p^{r\beta}) - f(p^{(r-1)\beta})| r x^{1/r}}{x \log x} \right) + 0\left(\frac{1}{\sqrt{x} \log x} \right)$$

$$= 0\left(\frac{1}{x \log x} \sum_{r=3}^{\log x/\log 2} r x^{1/r} \, 2^{r/2} \right) + 0\left(\frac{1}{\sqrt{x} \log x} \right)$$

$$= 0\left(\frac{1}{x \log x} \; x^{1/3} \; 2^{1/2 \frac{\log x}{\log 2}} \log^2 x \right) + 0\left(\frac{1}{\sqrt{x} \log x} \right)$$

$$= 0\left(\frac{\log x}{x^{1/6}} \right) = 0\left(\frac{1}{\log x} \right)$$

Donc

(2)

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv 0(k)}} f(n^{\beta}) = \sum_{p\le x} f(p^{\beta})\left[\frac{x}{kp}\right] + \frac{x}{k}\left\{\sum_{\substack{p\\ r\ge 2}} \frac{f(p^{r\beta}) - f(p^{(r-1)\beta})}{p^{r}} \quad \sum_{\substack{p\mid k\\ r\ge 1}} \frac{f(p^{r\beta}) - f(p^{(r-1)\beta})}{p^{r}}\right.$$

$$\left. + f(k^{\beta}) + \sum_{\substack{p^{t}\|k\\ r\ge 1}} \frac{f(p^{(r+t)\beta}) - f(p^{(r+t-1)\beta})}{p^{r}}\right\} + 0\left(\frac{x}{\log x}\right),$$

mais

(3)

$$\sum_{p\le x} f(p^{\beta})\left[\frac{x}{kp}\right] = \sum_{p\le x} (f(p^{\beta}) - a)\left[\frac{x}{kp}\right] + a\sum_{p\le x}\left[\frac{x}{kp}\right],$$

alors utilisant le fait que $\sum_{p} \frac{f(p^{\beta}) - a}{p}$ converge absolument, nous obtenons

(4)

$$\sum_{p\le x} (f(p^{\beta}) - a)\left[\frac{x}{kp}\right] = \frac{x}{k}\sum_{p\le x} \frac{f(p^{\beta}) - a}{p} + 0\left(\sum_{p\le x} |f(p^{\beta}) - a|\right)$$

$$= \frac{x}{k}\sum_{p} \frac{f(p^{\beta}) - a}{p} + \frac{x}{k}\sum_{p>x} \frac{f(p^{\beta}) - a}{p} + 0\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

$$= \frac{x}{k}\sum_{p} \frac{f(p^{\beta}) - a}{p} + o(x) + 0\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

Or,

$$\sum_{p\le x}\left[\frac{x}{kp}\right] = \sum_{p\le x} \frac{x}{kp} + 0(\pi(x)),$$

et

$$\sum_{p\le x} \frac{1}{p} = \log\log x + B_1 + 0\left(\frac{1}{\log x}\right), \quad \text{(voir [4])},$$

où

$$B_1 = \gamma + \sum_p \left\{\log\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p}\right\}, \quad \pi(x) = 0(x/\log x)$$

alors

(5)

$$\sum_{p\le x} \left[\frac{x}{kp}\right] = \frac{x \log \log x}{k} + \frac{x}{k} B_1 + 0\left(\frac{x}{\log x}\right) .$$

Remplaçant les équations (4) et (5) dans (3) et substituant cette nouvelle équation dans (2), nous obtenons le résultat désiré.

Corollaire 1.1. Soit $\omega(n) = \sum_{p|n} 1$, alors pour tout $\beta, k \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{\substack{n\le x \\ n\equiv 0(k)}} \omega(n^\beta) = \frac{x \log \log x}{k} + \frac{x}{k}\left(B_1 + \omega(k^\beta) - \sum_{p|k} \frac{1}{p}\right) + o(x) .$$

Soit $\Omega(n) = \sum_{p^a|n} 1$, alors on a le résultat suivant:

Corollaire 1.2. Pour tout $\beta, k \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{\substack{n\le x \\ n\equiv 0(k)}} \Omega(n^\beta) = \frac{\beta\, x \log \log x}{k} + Ax + o(x) ,$$

où

$$A = \frac{1}{k}\left(\beta B_1 + \sum_{\substack{p \\ r\ge 2}} \frac{\beta}{p^r} + \Omega(k^\beta)\right) .$$

Corollaire 1.3. Soit $d(n)$ le nombre de diviseurs de n , alors pour tout $\beta, k \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{\substack{n\le x \\ n\equiv 0(k)}} \log d(n^\beta) = \log(\beta+1) \frac{x \log \log x}{k} + Ax + o(x) ,$$

où

$$A = \frac{1}{k}\left(B_1 \log(\beta+1) + \sum_{\substack{p \\ r\geq 2}} \frac{\log\left(1+\frac{\beta}{r\beta+1-\beta}\right)}{p^r} - \sum_{\substack{p|k \\ r\geq 1}} \frac{\log\left(1+\frac{\beta}{r\beta+1-\beta}\right)}{p^r} \right.$$

$$\left. + \log d(k^\beta) + \sum_{\substack{p^t\|k \\ r\geq 1}} \frac{\log\left(1+\frac{\beta}{(r+t)\beta+1-\beta}\right)}{p^r} \right)$$

Théorème 2. Soit f une fonction additive et soient a une constante positive et $\beta \in N$ telles que $\sum_p \frac{f(p^\beta)-a}{p}$ converge absolument et $f(p^r) = 0(2^{r/2})$, $r \geq 2$. Alors pour tout $\ell, k \in N$, $(\ell,k) = 1$, nous avons

$$\sum_{\substack{n\leq x \\ n\equiv \ell(k)}} f(n^\beta) = \frac{ax \log\log x}{k} + Ax + o(x)$$

où

$$A = \frac{1}{k}\left(aB_1 + \sum_{\substack{p \\ r\geq 2}} \frac{f(p^{r\beta}) - f(p^{(r-1)\beta})}{p^r} - \sum_{\substack{p|k \\ r\geq 1}} \frac{f(p^{r\beta}) - f(p^{(r-1)\beta})}{p^r} + \sum_p \frac{f(p^\beta)-a}{p} \right).$$

Démonstration. On a

$$\sum_{\substack{n\leq x \\ n\equiv \ell(k)}} f(n^\beta) = \sum_{\substack{n\leq x \\ n\equiv \ell(k)}} \left(\sum_{\substack{p^r|n \\ r\geq 1}} f(p^{r\beta}) - f(p^{(r-1)\beta}) \right) .$$

Il s'agit maintenant de trouver le nombre d'entiers $n \leq x$ tel que $n\equiv\ell(k)$ et $p^r|n$, p étant un nombre premier fixe mais arbitraire. Puisque $p^r|n$, alors $n = n_1p^r$ d'où $n_1p^r \equiv \ell(k)$.

Soit $(p^r,k) = d$, si $d > 1$, la congruence ci-dessus ne possède pas de solution tandis que si $d = 1$, alors $n_1p^r\equiv\ell(k)$ possède exactement une solution.

Or $1 \le n = n_1 p^r \le x$ i.e. $0 \le n_1 \le \frac{x}{p^r}$ d'où le nombre de solutions est

$$\left[\frac{x+p^r}{kp^r}\right] \text{ ou } \left[\frac{x+p^r}{kp^r}\right] + 1 \quad \text{(voir [5])} .$$

Donc le nombre de solutions est

$$\left[\frac{x+p^r}{kp^r}\right] + b_1 = \frac{x}{kp^r} + b_x \text{ , } -1 \le b_x \le 2 .$$

Utilisant cette dernière égalité, nous obtenons

$$\sum_{\substack{n\le x \\ n\equiv \ell(k)}} f(n^\beta) = \sum_{\substack{p^r\le x \\ r\ge 1}} (f(p^{r\beta}) - f(p^{(r-1)\beta}))\left(\frac{x}{kp^r}+b_x\right) - \sum_{\substack{p^r\le x \\ r\ge 1 \\ p|k}} (f(p^{r\beta}) - f(p^{(r-1)\beta}))\left(\frac{x}{kp^r}+b_x\right)$$

$$= \frac{x}{k}\sum_{p\le x} \frac{f(p^\beta)}{p} + \frac{x}{k}\sum_{\substack{p^r\le x \\ r\ge 2}} \frac{f(p^{r\beta}) - f(p^{(r-1)\beta})}{p^r} - \frac{x}{k}\sum_{\substack{p|k \\ r\ge 1}} \frac{f(p^{r\beta}) - f(p^{(r-1)\beta})}{p^r}$$

$$+ O\left(\sum_{\substack{p^r\le x \\ r\ge 2}} |f(p^r)|\right) + O\left(\sum_{p\le x} b_x\ f(p^\beta)\right) .$$

Effectuant des calculs semblables à ceux exécutés dans la démonstration du théorème 1, nous obtenons le résultat escompté.

Corollaire 2.1. Pour tout $\beta, k, \ell \in \mathbb{N}$, $(\ell, k) = 1$, on a

$$\sum_{\substack{n\le x \\ n\equiv \ell(k)}} \log d(n^\beta) = \log(\beta+1)\ \frac{x \log\log x}{k} + Ax + o(x)$$

où

$$A = \frac{1}{k}\left(B_1 \log(\beta+1) + \sum_{\substack{p \\ r\ge 2}} \frac{\log\left(1+\frac{\beta}{r\beta+1-\beta}\right)}{p^r} - \sum_{\substack{p|k \\ r\ge 1}} \frac{\log\left(1+\frac{\beta}{r\beta+1-\beta}\right)}{p^r}\right).$$

Théorème 3. Soit f une fonction additive et soient a une constante positive et $\beta \in \mathbb{N}$ telles que $\sum_p \frac{f(p^\beta) - a}{p}$ converge absolument et $f(p^r) = O(2^{r/2})$, $r \geq 2$. Alors pour tout $k, \ell \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv \ell(k)}} f(n^\beta) = \frac{ax \log \log x}{k} + Ax + o(x)$$

où

$$A = \frac{1}{k}\left(aB_1 + \sum_{\substack{p \\ r \geq 2}} \frac{f(p^{r\beta}) - f(p^{(r-1)\beta})}{p^r} + f(d^\beta) + \sum_{\substack{p^t \| d \\ p \nmid \frac{k}{d} \\ r \geq 1}} \frac{f(p^{(r+t)\beta}) - f(p^{(r+t-1)\beta})}{p^r} \right.$$

$$+ \sum_{\substack{p | d \\ p | \frac{k}{d} \\ r \geq 1}} \frac{f(p^{r\beta}) - f(p^{(r-1)\beta})}{p^r} - \sum_{\substack{p | d \\ r \geq 1}} \frac{f(p^{r\beta}) - f(p^{(r-1)\beta})}{p^r}$$

$$\left. - \sum_{\substack{p | \frac{k}{d} \\ r \geq 1}} \frac{f(p^{r\beta}) - f(p^{(r-1)\beta})}{p^r} + \sum_p \frac{f(p^\beta) - a}{p} \right)$$

où $d = (k, \ell)$.

Démonstration. On a pour tout $k, \ell \in \mathbb{N}$

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv \ell(k)}} f(n^\beta) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv \ell(k)}} \sum_{\substack{p^r | n \\ r \geq 1}} (f(p^{r\beta}) - f(p^{(r-1)\beta})) .$$

Il s'agit maintenant de trouver le nombre d'entiers $n \leq x$ tel que $n \equiv \ell(k)$ et $p^r | n$, p étant un nombre premier fixe mais arbitraire. Soit $d = (k, \ell)$, alors $n \equiv 0(d)$ et $n \equiv 0(p^r)$ entraîne $n \equiv 0([d, p^r])$, i.e. $n = n_1[d, p^r]$. Posons $(d, p^r) = p^t$, $0 \leq t \leq r$, alors $n \equiv \ell(k)$ implique

$n_1dp^{r-t}\equiv\ell(k)$ i.e. $n_1p^{r-t}\equiv\ell_1(k_1)$ où $k_1=\frac{k}{d}$, $\ell_1=\frac{\ell}{d}$. Soit $(p^{r-t},k_1)=d_1$, si $d_1>1$ alors la congruence $n_1p^{r-t}\equiv\ell_1(k_1)$ ne possède pas de solution tandis que si $d=1$, la congruence ci-dessus possède exactement une solution. Or $1\le n=ndp^{r-t}\le x$ i.e. $0\le n_1\le\frac{x}{dp^{r-t}}$, d'où le nombre de solutions est

$$\frac{x}{kp^{r-t}}+b_x\ ,\quad -1\le b_x\le 2\ .$$

Donc

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv\ell(k)}} f(n^\beta) &= \sum_{\substack{p^r\le x\\ r\ge 1\\ p\nmid k_1\\ p\nmid d}}\left(f(p^{r\beta})-f(p^{(r-1)\beta})\right)\left(\frac{x}{kp^r}+b_x\right)\\
&\quad+\sum_{\substack{p^r\le x\\ r\ge 2\\ p\nmid k_1\\ p^t\|d\\ 1\le t\le r-1}}\left(f(p^{r\beta})-f(p^{(r-1)\beta})\right)\left(\frac{x}{kp^{r-t}}+b_x\right)\\
&\quad+\sum_{\substack{p^r\le x\\ r\ge 1\\ (p^r,d)=p^r}}\left(f(p^{r\beta})-f(p^{(r-1)\beta})\right)\left(\frac{x}{k}+b_x\right)\\
&=\frac{x}{k}\left\{\sum_{\substack{p^r\le x\\ r\ge 1}}\frac{f(p^{r\beta})-f(p^{(r-1)\beta})}{p^r}-\sum_{\substack{p\mid k_1\\ r\ge 1}}\frac{f(p^{r\beta})-f(p^{(r-1)\beta})}{p^r}\right.\\
&\quad-\sum_{\substack{p\mid d\\ r\ge 1}}\frac{f(p^{r\beta})-f(p^{(r-1)\beta})}{p^r}+\sum_{\substack{p\mid k_1\\ p\mid d\\ r\ge 1}}\frac{f(p^{r\beta})-f(p^{(r-1)\beta})}{p^r}\\
&\quad\left.+\sum_{\substack{p^t\|d\\ p\nmid k_1\\ 1\le t\le r-1}}\frac{f(p^{r\beta})-f(p^{r-1)\beta})}{p^{r-t}}+\sum_{p^r\|d}f(p^{r\beta})\right\}+O\left(\frac{x}{\log x}\right)\end{aligned}$$

par des calculs effectués dans les théorèmes 4.1 et 4.5. Le reste de la démonstration se fait d'une façon analogue aux théorèmes 4.1 et 4.5.

R.L. Duncan [3] a étudié la fonction additive Ω_m définie par

$$\Omega_m(n) = \alpha_1^m + \ldots + \alpha_s^m \quad \text{si} \quad n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_s^{\alpha_s}$$

et m un entier ≥ 0 . Il est à remarquer que $\Omega_0(n) = \omega(n)$ et $\Omega_1(n) = \Omega(n)$ deux fonctions bien connues [4].

Corollaire 3.1. Pour $\beta, k, \ell \in N$, on a

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv \ell (k)}} \Omega_m(n^\beta) = \beta^m \frac{x \log \log x}{k} + Ax + o(x)$$

où

$$A = \frac{1}{k}\left(\beta^m B_1 + \beta^m \sum_{\substack{p \\ r \geq 2}} \frac{r^m - (r-1)^m}{p^r} + \Omega_m(d^\beta) + \beta^m \sum_{\substack{p^t \| d \\ p \nmid \frac{k}{d} \\ r \geq 1}} \frac{(r+t)^m - (r\ t-1)^m}{p^r} \right.$$

$$\left. + \beta^m \sum_{\substack{p \mid d \\ p \mid \frac{k}{d} \\ r \geq 1}} \frac{r^m - (r-1)^m}{p^r} - \beta^m \sum_{\substack{p \mid d \\ r \geq 1}} \frac{r^m - (r-1)^m}{p^r} - \beta^m \sum_{\substack{p \mid \frac{k}{d} \\ r \geq 1}} \frac{r^m - (r-1)^m}{p^r} \right)$$

où $d = (k, \ell)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] APOSTOL, T.M., Introduction to analytic number theory, Springer-Verlag, 1976.

[2] DE KONINCK, J.M. et MERCIER, A., Remarque sur un article de T.M. Apostol, Canad. Math. Bull., Vol. 20 (1), 1977, 77-88.

[3] DUNCAN, R.L., A class of additive arithmetical functions, Amer. Math. Month., 69, (1962), 34-36.

[4] HARDY, G.H. and WRIGHT, E.M., An introduction to the theory of numbers, fourth edition, Oxford University Press, London, 1968.

[5] LANDAU, E., Remarks on the paper of Mr. Kluyver on page 305 of Vol. VI, Koningl. Akad. Wetensch. Amsterdam Proc. Sect. Sci., 7 (1905), 66-77.

[6] MERCIER, A., Etude de certaines sommes de fonctions arithmétiques, thèse de doctorat, Université Laval.

[7] SEGAL, S.L., On prime-independant additive functions, Archiv der mathematik, Vol. XVII (1966), 329-332.

Module de mathématiques
Université du Québec à Chicoutimi
930, rue Jacques-Cartier est
Chicoutimi, Québec

Manuscrit reçu le 7 décembre 1977.