Ann. Sc. Math. Québec, 1979, Vol. III, No 1, pp. 95-106

QUELQUES PROBLÈMES OUVERTS CONCERNANT LES GRAPHES FORTEMENT HAMILTONIENS

Anton Kotzig et Jacques Labelle

INTRODUCTION

Depuis quelques années, plusieurs résultats ont été obtenus dans l'étude des graphes dits fortement hamiltoniens.

Nous présentons aux lecteurs de nombreux problèmes restés ouverts dans ce sujet.

Soit $G = (X,A)$, $A \subset P_2(X)$, un *graphe simple*. X est l'ensemble des *sommets*; $a = \{x,y\} \in A$ est *l'arête* joignant les sommets x et y; $d_G(x)$ = nombre d'arêtes passant par x.

Définition 1. Un sous-graphe $H = (X,L)$ de G (i.e. $L \subset A$) est dit un *facteur linéaire* de G si $\forall x \in X$, $d_H(x) = 1$.

Remarque 1. Si G possède un facteur linéaire H alors $|X|$ est pair. En effet, $2|L| = \sum_{x \in X} d_H(x) = |X|$.

Définition 2. Une *factorisation linéaire* de G est une partition de A, $A = L_1 \cup L_2 \cup \ldots \cup L_k$, telle que $\forall i = 1,2,\ldots,k$, $H_i = (X,L_i)$ soit un facteur linéaire de G.

* *Recherche supportée par les subventions DGES-FCAC-77 et CNRC-A9232 dans le cas du premier auteur.*

Remarque 2. Si G admet une telle factorisation, alors G est *régulier de degré* k (i.e. $\forall x$, $d_G(x) = k$) . (Un graphe *cubique* est un graphe régulier de degré 3.)

Exemple 1. Le graphe cubique de la figure 1 n'admet aucun facteur linéaire. Les graphes cubiques des figures 2 et 3 admettent les facteurs linéaires mais aucune factorisation linéaire. (Voir [3].)

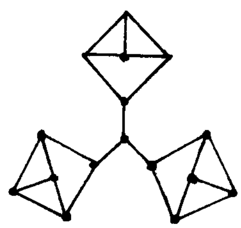


Fig. 1

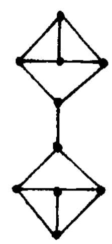


Fig. 2

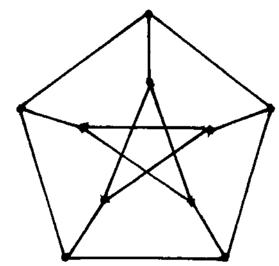


Fig. 3

Définition 3. Une factorisation linéaire, $A = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_k$, d'un graphe G est dite *hamiltonienne* si $\forall i \neq j$, $L_i \cup L_j$ est un *cycle hamiltonien* de G (i.e. un cycle passant une et une seule fois par chacun des sommets de G).

Exemple 2. Considérons le graphe suivant (figure 4) *d'ordre* 12. (i.e. $|G| = |X| = 12$) . Vérifier que la factorisation (figure 5) est hamiltonienne et que la factorisation (figure 6) ne l'est pas.

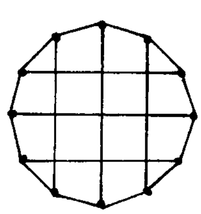


Fig. 4

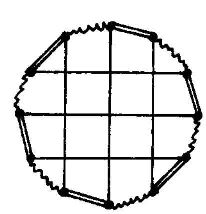


Fig. 5

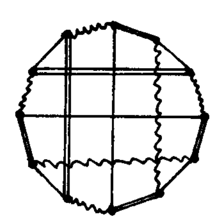


Fig. 6

Définition 4. Un graphe admettant une factorisation linéaire hamiltonienne est dit *fortement hamiltonien*.

Exemple 3. Les graphes représentés par les figures 7, 8, 9 et 10 sont fortement hamiltoniens et de degré 2, 3, 3 et 4 respectivement.

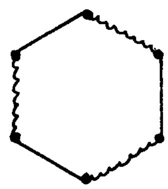


Fig. 7

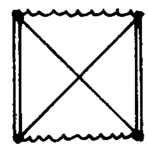


Fig. 8

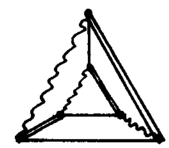


Fig. 9

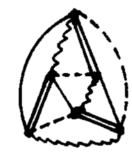


Fig. 10

Définition 5. Un graphe fortement hamiltonien est dit *purement hamiltonien* si toutes ses factorisations linéaires sont hamiltoniennes.

Définition 6. Soit $\delta(G)$ le nombre de factorisations linéaires d'un graphe quelconque G .

Exemple 4. Pour les quatre graphes purement hamiltoniens suivants (figures 11, 12, 13 et 14), la valeur de $\delta(G)$ est respectivement un, deux, dix et un million. (Voir théorème 2.)

Définition 7. Soient G et G' des graphes fortement hamiltoniens cubiques. Soient $D = \{L_1, L_2, L_3\}$ et $D' = \{L'_1, L'_2, L'_3\}$ des factorisations hamiltoniennes de ces graphes. Soient x un sommet de G et x' un sommet de G' . Le *mariage* ω des graphes G et G' , par rapport aux sommets x et y et aux factorisations D et D' , est le graphe $G \,\omega\, G'$ obtenu en éliminant de $G \cup G'$ les sommets x et y et en remplaçant les arêtes $\{a,x\}$, $\{b,x\}$, $\{c,x\}$, $\{y,u\}$, $\{y,v\}$, $\{y,w\}$ par les arêtes $\{a,u\}$, $\{b,v\}$, $\{c,w\}$. (Voir figure 15).

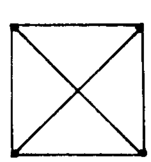


Fig. 11

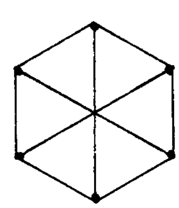


Fig. 12

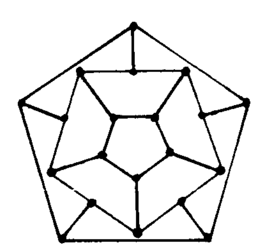


Fig. 13

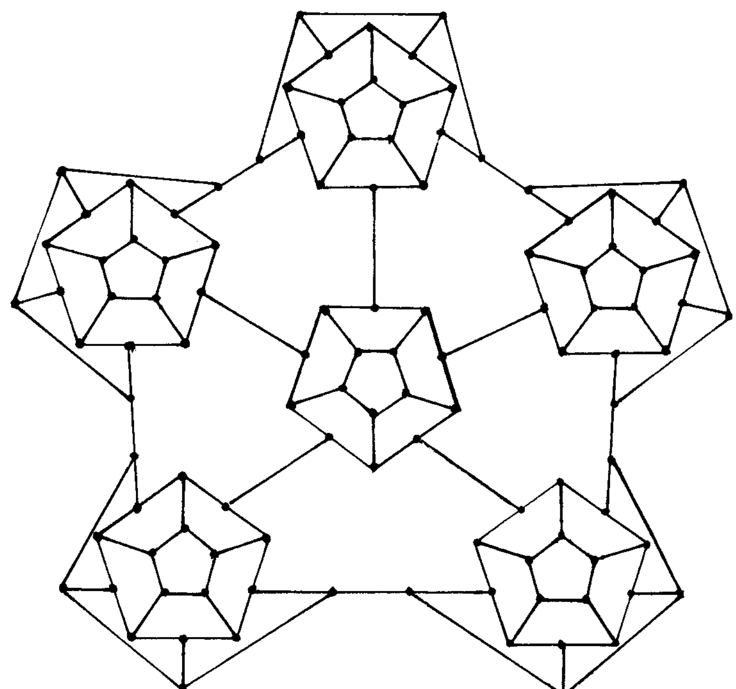


Fig. 14

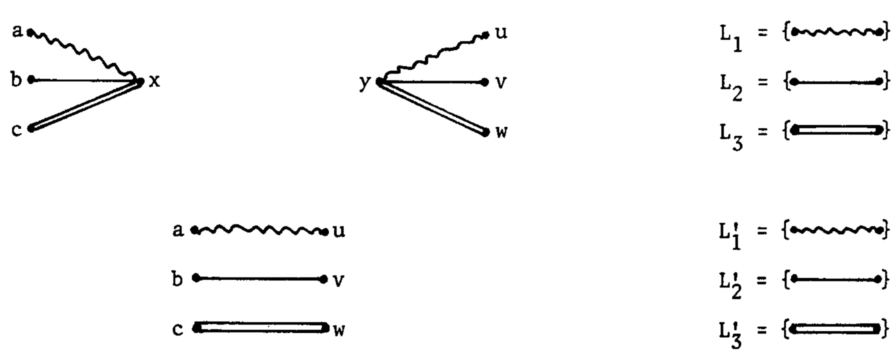


Fig. 15

Il est facile de voir que $G \omega G'$ est fortement hamiltonien.

Théorème 1. G et G' sont purement hamiltoniens si et seulement si $G\omega G'$ est purement hamiltonien. Preuve: voir [6], page 77.

Théorème 2. On a $\delta(G) \cdot \delta(G') = \delta(G\omega G')$. Preuve: voir [6], page 75.

Exercice 1. Prouver ces deux théorèmes.

Soit $G = (X,A)$ un graphe connexe.

Définition 8. Un *séparateur de cardinalité* k de G est un ensemble d'arêtes $S = \{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$ tel que $G - S = (X,A-S)$ ne soit pas connexe et $\forall j$, $1 \leq j \leq k$, $H_j = (G-S) \cup \{a_j\}$ soit connexe.

Remarque 3. Il est bien connu que si S est un séparateur de G , alors $G - S$ contient exactement deux composantes (appelées les *rives* du séparateur S).

Définition 9. Un séparateur est *trivial* si au moins une de ses rives ne contient aucun cycle. Sinon il est dit *non-trivial.*

Exemple 5. La figure 16 donne un séparateur trivial de cardinalité 4. La figure 17 illustre un séparateur non-trivial de cardinalité 3.

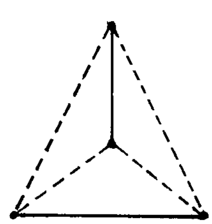


Fig. 16

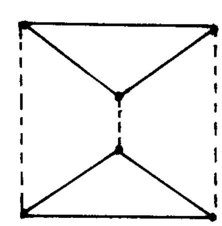


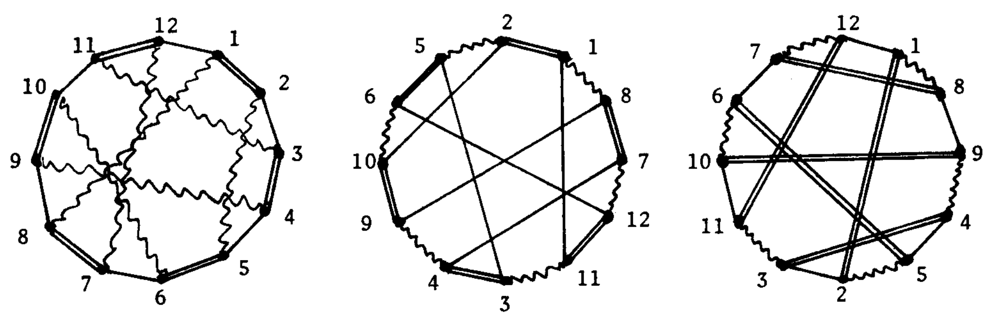
Fig. 17

Remarque 4. Par un mariage ω de deux graphes cubiques et fortement hamiltoniens, nous obtenons toujours un graphe cubique fortement hamiltonien admettant un séparateur non-trivial de cardinalité 3. La réciproque est aussi vraie.

Problème 1. Trouver la construction et les propriétés des graphes cubiques purement hamiltoniens sans séparateur non-trivial de cardinalité trois.

Définition 10. Soit G un graphe fortement hamiltonien cubique et $\{L_1,L_2,L_3\}$ une factorisation hamiltonienne de G . Les trois *graphes de cordes* de G sont les graphes isomorphes G_1 , G_2 , G_3 où G_i s'obtient en traçant le cycle $C_i = L_j \cup L_k$ $(j\neq i, k\neq i)$ autour d'un cercle et les arêtes de L_i comme cordes de ce cercle.

Exemple 6. $L_1 = \{\ \}$, $L_2 = \{\ \}$, $L_3 = \{\ \}$



$G = G_1$ G_2 G_3

Fig. 18

Problème 2. Caractériser les graphes cubiques fortement hamiltoniens qui possèdent une factorisation hamiltonienne dont les trois graphes de cordes sont isomorphes au sens fort. (Deux graphes de cordes sont *isomorphes au sens fort* si l'un s'obtient de l'autre par un nombre fini de rotation,et de réflexions.) Ces graphes sont dits *fortement hamiltoniens symétriques*.

Remarque 5. Pour $|G| < 12$, les graphes fortement hamiltoniens symétriques sont:

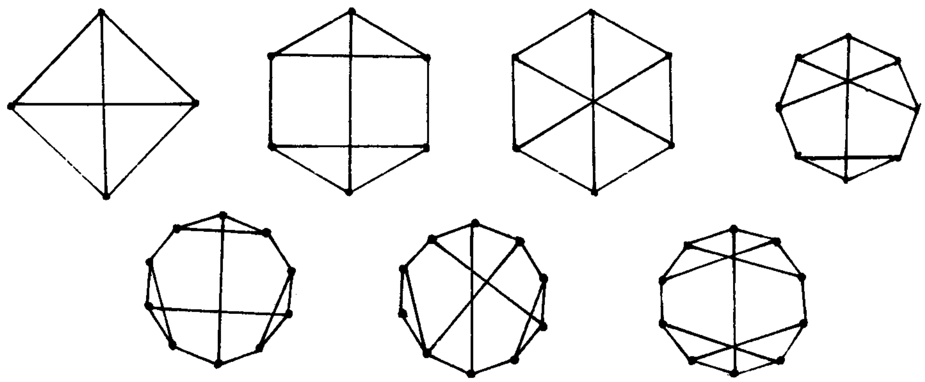


Fig. 19

Définition 11. Soit $k > 1$. Le graphe $M_k = (X_k, A_k)$ est défini par:

$X_k = \{1,2,\ldots,2k\}$,

$A_k = \{\{1,2\},\{2,3\},\ldots,\{2k-1,2k\},\{2k,1\},\{1,1+k\},\{2,2+k\},\ldots,\{k,2k\}$.

La factorisation linéaire $D_k = \{L_1, L_2, L_3\}$ de M_k est:

$$L_1 = \{\{2i-1,2i\} \mid i=1,2,\ldots,k\}$$

$$L_2 = \{\{2i,2i+1\} \mid i=1,\ldots,k-1\} \cup \{\{2k,1\}\}$$

$$L_3 = \{\{i,i+k\} \mid i=1,\ldots,k\} .$$

Exercice 2. Montrer que D_2 et D_{2n+1} $(n=1,2,\ldots)$ sont des factorisations hamiltoniennes mais que D_{2n} $(n=2,3,\ldots)$ ne l'est pas. Montrer que M_{2n} $(n=2,3,\ldots)$ n'est pas fortement hamiltonien. Montrer que $\delta(M_{2n}) = \frac{1}{3}(2^{2n-1}+1)$ et que $\delta(M_{2n+1}) = 1 + \frac{1}{3}(2^{2n}-1)$.

Problème 3. Pour un s donné, trouver la valeur maximum de $\delta(G)$ où $|G| = s$ et G est cubique (respectivement cubique fortement hamiltonien, cubique purement hamiltonien, cubique fortement hamiltonien symétrique).

Définition 12. Soit G un graphe cubique et $V(G)$ son graphe représentatif (voir [2] page 383).

Exemple 7.

G $\qquad\qquad$ $V(G)$

Fig. 20

Théorème 3. Si $|G|$ est pair alors

i) $V(G)$ contient au moins un facteur linéaire.

ii) G contient un facteur linéaire => $V(G)$ contient deux facteurs linéaires disjoints.

iii) G admet une factorisation linéaire => $V(G)$ admet une factorisation linéaire.

iv) G planaire <=> $V(G)$ planaire.

v) G hamiltonien <=> $V(G)$ est décomposable en deux cycles hamiltoniens.

Démonstration. Voir [4].

Problème 4. Montrer que G est fortement hamiltonien si et seulement si $V(G)$ est fortement hamiltonien.

Remarque 6. Le problème 4 est résolu mais non-publié.

Définition 13. Un U-*graphe* est un graphe cubique *uniquement coloriable* (i.e. n'admettant qu'une seule factorisation linéaire; $\delta(G) = 1$) .

Remarque 7. Si G est un U-graphe, alors G est fortement hamiltonien et donc purement hamiltonien.

Problème 5. Est-ce que les deux graphes de la Figure 21 sont les seuls U-graphes sans séparateur non-trivial de cardinalité 3 ?

Remarque 8. Un ω-mariage de deux U-graphes est un U-graphe.

Problème 6. Montrer que tout U-graphe s'obtient à partir de U-graphes sans séparateur non-trivial de cardinalité 3 (voir problème 5) après un nombre fini d'ω-mariages.

Définition 14. Soit G un graphe cubique et x un sommet de G. Soit $G' = K_4$ et y un sommet de G'. Le ω-mariage $G\omega G'$ s'appelle la *Δ-extension de* G en x.

Remarque 9. Toute Δ-extension d'un graphe fortement hamiltonien (U-graphe) est un graphe fortement hamiltonien (U-graphe).

Définition 15. Soit $G = (X,A)$ un graphe cubique fortement hamiltonien et $D = \{L_1,L_2,L_3\}$ une factorisation hamiltonienne de G. L'arête $u = \{x,y\} \in A$ (disons $u \in L_1$) est dite *paire* (respectivement *impaire*) si les deux chemins de x à y le long du cycle $C_1 = L_2 \cup L_3$ sont de longueur paire (respectivement impaire).

Remarque 10. Les arêtes de G sont toutes impaires si et seulement si G est *bichromatique* (i.e. il existe un 2-coloriage des sommets de G).

Problème 7. Trouver la construction et les propriétés des graphes cubiques bichromatiques fortement hamiltoniens.

Remarque 11. Si G est cubique bichromatique fortement hamiltonien, alors $|G| \equiv 2 \pmod{4}$ (voir [7]).

Problème 8. Trouver la construction et les propriétés des graphes cubiques fortement hamiltoniens dont toutes les arêtes sont paires. Soit C_p cette classe de graphes.

Remarque 12. C'est principalement l'étude de la classe C_p qui a été entreprise dans [7].

Pour $G \in C_p$, on a $|G| \equiv 4 \pmod{8}$. De plus, la Figure 22 donne le seul graphe de cette classe ayant moins de 28 sommets et qui soit sans triangle.

Exercice 3. Montrer que tout graphe fortement hamiltonien cubique s'obtient de K_4 ou d'un graphe (sans triangle) de C_p à l'aide d'un nombre fini de Δ-extensions.

Problème 9. Trouver la construction et les propriétés des graphes fortement hamiltoniens de degré 4.

La planarité est une propriété importante des graphes. Il existe des graphes fortement hamiltoniens planaires de degré 2, 3 et 4. (Voir Figures 7, 9 et 10.)

Problème 10. Existe-t-il un graphe fortement hamiltonien planaire qui soit régulier de degré 5 ? (Voir [6], page 162, problème 19.)

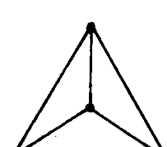
Soit K_m le graphe complet d'ordre m .

Théorème 4. Si n ou $2n-1$ est premier, alors K_{2n} est fortement hamiltonien.

Démonstration. Voir [6], pages 79 et 80.

Problème 11. Trouver toutes les valeurs de m pour lesquelles K_m est fortement hamiltonien.

Remarque 13. Les graphes K_{16} , K_{28} et K_{36} sont fortement hamiltoniens (voir [1]).



K_4

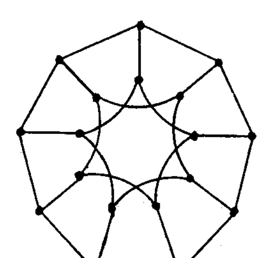


Fig. 21

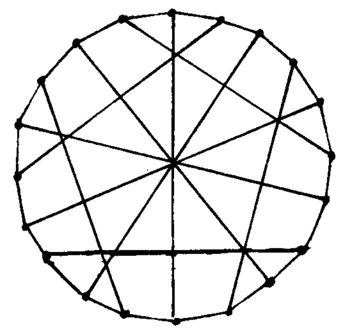


Fig. 22

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANDERSON, B.A., "A class of starter induced 1-factorizations", Graphs and combinatorics (Proc. Capital. Conf. on Graph Theory and Combinatorics, George Washington Unio, Washington, D.C., 1973), pp. 180-185, Lecture Notes in Math., Vol. 406, Spring. Berlin, 1974, Math. Review 51, # 268.

[2] BERGE, C., "Graphes et hypergraphes", deuxième édition, Dunod 1973.

[3] KÖNIG, D., "Theorie der endlichen und unendlichen Graphen" (en allemand), Chelsea Publishing. Co. New York, N.Y. 1950.

[4] KOTZIG, A., "On the theory of finite regular graphs of degree three and four" (en slovaque), Casop. pest. matem., 82 (1957), 76-92, Math. Review 19, # 876.

[5] KOTZIG, A., "Construction of Hamiltonian graphs of third degree" (en russe), Casop. pest. matem., 87 (1962), 148-168, Math. Review 25, # 2004.

[6] KOTZIG, A., "Hamiltonian graphs and Hamiltonian circuits", Theory of Graph and its Applications, Proc. of the Symposium held in Smolenice in June 1963, Publ. House of the Czechoslovak Academy of Sciences, (1964), 63-82, Math. Review 39, # 3462.

[7] KOTZIG, A. et LABELLE, J., "On Strongly Hamiltonian Graphs", Utilitas Mathematica, Vol. 14 (1978), pp. 99-116.

Anton Kotzig
Centre de recherches mathématiques
Université de Montréal
C.P. 6128
Montréal, Québec
H3C 3J7

Jacques Labelle
Département de mathématiques
Université du Québec à Montréal
C.P. 8888
Montréal, Québec

Manuscrit reçu le 31 mars 1978.
Revisé le 7 juin 1978.