Ann. Sc. Math. Québec, 1979, Vol. III, No 1, pp. 81-94

# RÉSEAUX MODULAIRES ALÉATOIRES AVEC RETARD

Silviu Guiasu, Louise Martin et Corina Reischer

## 0. INTRODUCTION

Les réseaux modulaires avec retard ont été étudiés du point de vue strictement déterministe dans le travail [1], en obtenant des résultats concernant la complétude d'un ensemble de modules avec retard. La théorie strictement déterministe des réseaux modulaires avec retard s'avère être toutefois trop rigide dans la modélisation des évolutions réelles, celles-ci demandant un traitement probabiliste élastique. Dans ce travail, on étudie la structure des modules aléatoires avec retard, les opérations de composition de ces modules dans le cadre des réseaux, ainsi que l'évolution des connexions intérieures.

## 1. MODULE ALÉATOIRE AVEC RETARD

Soit $A$ un alphabet fini. Notons,

$$[\alpha_1,\dots,\alpha_n \; ; \; t-\delta_1,\dots,t-\delta_n]$$

l'événement qui consiste en: aux $n$ lignes d'entrée d'un module, nous avons respectivement les signaux (ou les lettres) $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ respectivement aux moments $t-\delta_1,\dots,t-\delta_n$ , où $t \in \mathbb{Z}$ , $\alpha_i \in A$ , $(i=1,\dots,n)$ et $\delta_i \in \mathbb{N}^*$ . Les nombres naturels ou nuls $\delta_1,\dots,\delta_n$ s'appellent des retards et ils caractérisent le module donné. Un *module aléatoire avec retard* est une famille de correspondances aléatoires

*Travail fait dans le cadre de la subvention CNR A-4236 du Conseil National de Recherches du Canada.*

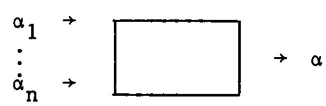
$$(1.1) \qquad A^n \xrightarrow{p([\alpha;t] \mid [\alpha_1,\ldots,\alpha_n\ ;\ t-\delta_1,\ldots,t-\delta_n])} A \qquad (t\in\mathbf{Z})$$

où $p([\alpha;t] \mid [\alpha_1,\ldots,\alpha_n\ ;\ t-\delta_1,\ldots,t-\delta_n])$ représente la probabilité qu'à la sortie du module on ait le signal $\alpha \in A$ au moment $t$ si aux $n$ lignes d'entrée du module, nous avons respectivement les signaux $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, respectivement aux moments $t-\delta_1,\ldots,t-\delta_n$. Nous avons

$$(1.2) \qquad \begin{aligned} & p([\alpha;t] \mid [\alpha_1,\ldots,\alpha_n\ ;\ t-\delta_1,\ldots,t-\delta_n]) \geq 0 \ , \\ & \sum_{\alpha\in A} p([\alpha;t] \mid [\alpha_1,\ldots,\alpha_n\ ;\ t-\delta_1,\ldots,t-\delta_n]) = 1 \ , \end{aligned}$$

pour tout $t \in \mathbf{Z}$ et pour tout $\alpha_i \in A$, $(i=1,\ldots,n)$.

Schématiquement, on note un module de la manière suivante:




le comportement du module étant décrit par la famille de correspondances aléatoires (1.1).

En bref, nous noterons un module aléatoire avec retard par

$$(1.3) \qquad P = P(\delta_1,\ldots,\delta_n) = \{p([\alpha;t]|[\alpha_1,\ldots,\alpha_n;t-\delta_1,\ldots,t-\delta_n])\,|\,t \in Z \ , \ \alpha \in A \ , \ \alpha_i \in A \ , \ (i=1,\ldots,n)\} \ .$$

Un module aléatoire avec retard (1.1) est *stationnaire* si

$$(1.4) \qquad p([\alpha;t]|[\alpha_1,\ldots,\alpha_n;t-\delta_1,\ldots,t-\delta_n]) = p([\alpha;0]|[\alpha_1,\ldots,\alpha_n;-\delta_1,\ldots,-\delta_n])$$

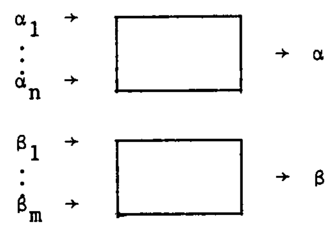
pour tout $t \in \mathbf{Z}$, $\alpha \in A$, $\alpha_i \in A$, $(i=1,\ldots,n)$.

## 2. OPÉRATIONS DE COMPOSITION

*a) La composition en parallèle de deux modules aléatoires indépendants.* Dans ce qui suivra, nous écrirons module ou module aléatoire, considérant qu'il s'agit de module aléatoire avec retard. Soient deux modules aléatoires

$$
(2.1)\qquad
\begin{aligned}
&A^n \xrightarrow{p_1([\alpha;t]\ |\ [\alpha_1,\dots,\alpha_n\ ;\ t-\delta_1,\dots,t-\delta_n])} A\\
&A^m \xrightarrow{p_2([\beta;t]\ |\ [\beta_1,\dots,\beta_m\ ;\ t-\lambda_1,\dots,t-\lambda_m])} A\ .
\end{aligned}
$$

Par leur composition (ou couplage) en parallèle,




on obtient le réseau modulaire aléatoire

$$
(2.2)\qquad A^{n+m} \xrightarrow{p([(\alpha,\beta);t]|[\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta_1,\dots,\beta_m;t-\delta_1,\dots,t-\delta_n,t-\lambda_1,\dots,t-\lambda_m])} A^2\ ,
$$

$$
(t\in\mathbf{Z})\ ,
$$

où

$$
(2.3)\qquad
\begin{aligned}
&p([\alpha,\beta);t]|[\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta_1,\dots,\beta_m;t-\delta_1,\dots,t-\delta_n,t-\lambda_1,\dots,t-\lambda_m]) =\\
&p_1([\alpha;t]|[\alpha_1,\dots,\alpha_n;t-\delta_1,\dots,t-\delta_n])p_2([\beta;t]|[\beta_1,\dots,\beta_m;t-\lambda_1,\dots,t-\lambda_m])\ .
\end{aligned}
$$

*b) La composition en parallèle de deux modules aléatoires dépendants.*

Le résultat de la composition en parallèle de deux modules aléatoires dépendants (2.1) est le réseau modulaire aléatoire (2.2) pour lequel l'égalité (2.3) n'est pas plus valide; par contre, on a l'égalité

$$
(2.4)\qquad
\begin{aligned}
&p([(\alpha,\beta);t]|[\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta_1,\dots,\beta_m;t-\delta_1,\dots,t-\delta_n,t-\lambda_1,\dots,t-\lambda_m]) =\\
&p_1([\alpha;t]|[\alpha_1,\dots,\alpha_n;t-\delta_1,\dots,t-\delta_n],[\beta_1,\dots,\beta_m;t-\lambda_1,\dots,t-\lambda_m])\ \cdot\\
&p_2([\beta;t]|[\alpha_1,\dots,\alpha_n;t-\delta_1,\dots,t-\delta_n],[\beta_1,\dots,\beta_m;t-\lambda_1,\dots,t-\lambda_m],[\alpha;t])
\end{aligned}
$$

ou l'égalité

$$
(2.5)\qquad
\begin{aligned}
&p([(\alpha,\beta);t]|[\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta_1,\dots,\beta_m;t-\delta_1,\dots,t-\delta_n,t-\lambda_1,\dots,t-\lambda_m]) =\\
&p_1([\alpha;t]|[\alpha_1,\dots,\alpha_n;t-\delta_1,\dots,t-\delta_n],[\beta_1,\dots,\beta_m;t-\lambda_1,\dots,t-\lambda_m],[\beta;t])\ \cdot\\
&p_2([\beta;t]|[\alpha_1,\dots,\alpha_n;t-\delta_1,\dots,t-\delta_n],[\beta_1,\dots,\beta_m;t-\lambda_1,\dots,t-\lambda_m])
\end{aligned}
$$

où

$$p_1([\alpha;t]|[\alpha_1,\ldots,\alpha_n;t-\delta_1,\ldots,t-\delta_n],[\beta_1,\ldots,\beta_m;t-\lambda_1,\ldots,t-\lambda_m],[\beta;t])$$

représente la probabilité qu'à la sortie du premier module, nous ayons le signal $\alpha$ au moment $t$ conditionné par le fait qu'aux $n$ lignes d'entrée du premier module, nous avons respectivement les signaux $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ respectivement aux moments $t-\delta_1,\ldots,t-\delta_n$ et aux lignes d'entrée du deuxième module, nous avons respectivement les signaux $\beta_1,\ldots,\beta_m$ respectivement aux moments $t-\lambda_1,\ldots,t-\lambda_m$ et à la sortie du deuxième module, on a le signal $\beta$ au moment $t$. Pour les autres probabilités qui apparaissent dans les égalités (2.4) et (2.5), l'interprétation est analogue.

Donc, pour pouvoir coupler en parallèle deux modules aléatoires dépendants, il faut connaître ou bien les familles de correspondances aléatoires

$$A^{n+m} \xrightarrow{p_1([\alpha;t]|[\alpha_1,\ldots,\alpha_n;t-\delta_1,\ldots,t-\delta_n],[\beta_1,\ldots,\beta_m;t-\lambda_1,\ldots,t-\lambda_m])} A$$

et

$$A^{n+m+1} \xrightarrow{p_2([\beta;t]|[\alpha_1,\ldots,\alpha_n;t-\delta_1,\ldots,t-\delta_n],[\beta_1,\ldots,\beta_m;t-\lambda_1,\ldots,t-\lambda_m],[\alpha;t])} A$$

et dans ce cas, nous appliquons les égalités (2.4) pour le calcul de (2.2), ou bien les familles de correspondances aléatoires

$$A^{n+m+1} \xrightarrow{p_1([\alpha;t]|[\alpha_1,\ldots,\alpha_n;t-\delta_1,\ldots,t-\delta_n],[\beta_1,\ldots,\beta_m;t-\lambda_1,\ldots,t-\lambda_m],[\beta;t])} A$$

et

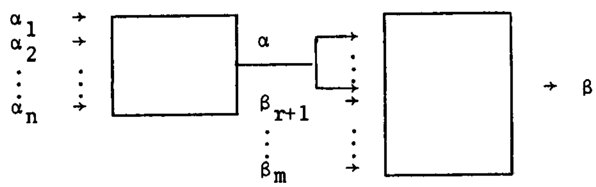
$$A^{n+m} \xrightarrow{p_2([\beta;t]|[\alpha_1,\ldots,\alpha_n;t-\delta_1,\ldots,t-\delta_n],[\beta_1,\ldots,\beta_m;t-\lambda_1,\ldots,t-\lambda_m])} A$$

et dans ce cas, nous appliquons les égalités (2.5) pour le calcul de (2.2).

Qu'il s'agisse de modules aléatoires indépendants ou dépendants, nous noterons avec $P = P_1 \otimes P_2$ le résultat de la composition en parallèle de deux modules aléatoires $P_1 = P_1(\delta_1,\ldots,\delta_n)$ et $P_2 = P_2(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$. Evidemment, $P = P(\delta_1,\ldots,\delta_n\ ,\ \lambda_1,\ldots,\lambda_m)$.

c) *La composition en série d'ordre $r$ de deux modules aléatoires.*

Considérons deux modules aléatoires (2.1) tels que $\lambda_i = \lambda_1$ , $(i=2,3,\ldots,r)$ , où $1 \le r \le m$ . Le résultat de la composition (ou couplage) en série d'ordre $r$ de ces deux modules




est le réseau modulaire aléatoire

(2.6)

$$A^{n+m-r} \xrightarrow{p([\beta;t]|[\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta_{r+1},\ldots,\beta_m;t-(\lambda_1+\delta_1),\ldots,t-(\lambda_1+\delta_n),t-\lambda_{r+1},\ldots,t-\lambda_m])} A$$

où

$$(2.7)\quad \begin{aligned} &p([\beta;t]|[\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta_{r+1},\ldots,\beta_m;t-(\lambda_1+\delta_1),\ldots,t-(\lambda_1+\delta_n),t-\lambda_{r+1},\ldots,t-\lambda_m]) = \\ &\sum_{\alpha\in A} p_1([\alpha;t-\lambda_1]|[\alpha_1,\ldots,\alpha_n;t-(\lambda_1+\delta_1),\ldots,t-(\lambda_1+\delta_n)]) \cdot \\ &p_2([\beta;t]|[\alpha,\ldots,\alpha,\beta_{r+1},\ldots,\beta_m;t-\lambda_1,\ldots,t-\lambda_1,t-\lambda_{r+1},\ldots,t-\lambda_m]) . \end{aligned}$$

Notons par $P = P_1 \oplus_{1\ldots r} P_2$ le réseau modulaire aléatoire qui résulte du couplage en série d'ordre $r$ , dans les positions $1,\ldots,r$ des modules aléatoires $P_1$ et $P_2$ . Evidemment, si $P_1 = P_1(\delta_1,\ldots,\delta_n)$ et $P_2 = P_2(\lambda_1,\ldots,\lambda_1,\lambda_{r+1},\ldots,\lambda_m)$ , alors $P = P(\lambda_1+\delta_1,\ldots,\lambda_1+\delta_n,\lambda_{r+1},\ldots,\lambda_m)$ . De façon analogue, on définit le réseau modulaire aléatoire qui résulte du couplage en série d'ordre $r$ , dans les positions $i_1,\ldots,i_r$ des deux modules aléatoires $P_1 = P_1(\delta_1,\ldots,\delta_n)$ et $P_2 = P_2(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$ , $\lambda_{i_1} = \ldots = \lambda_{i_r}$ , c'est-à-dire le réseau modulaire $P = P_1 \oplus_{i_1\ldots i_r} P_2$ .

## 3. L'ÉVOLUTION DE LA CONNEXION INTÉRIEURE DES MODULES

Soit un module aléatoire $P$ donné par (1.3). Nommons $E(P)$ *l'entrée* du module $P$ , où $E(P)$ est la famille de répartitions aléatoires

$$(3.1) \quad E(P) = \{p([\alpha_1,\ldots,\alpha_n;t-\delta_1,\ldots,t-\delta_n]) \mid t \in \boldsymbol{Z} \ , \ \alpha_i \in A \ , \ (i=1,\ldots,n)\}$$

où $p([\alpha_1,\ldots,\alpha_n;t-\delta_1,\ldots,t-\delta_n])$ représente la probabilité qu'aux $n$ lignes d'entrée du module aléatoire soient reçus respectivement les signaux $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, respectivement aux moments $t-\delta_1,\ldots,t-\delta_n$. En fait, $E(P)$ représente une famille d'espaces finis de probabilité, à chaque moment $t$, l'espace de probabilité correspondant aux événements élémentaires $\{[\alpha_1,\ldots,\alpha_n;t-\delta_1,\ldots,t-\delta_n] \mid \alpha_i \in A \ ,(i=1,\ldots,n)\}$. Nous avons

$$(3.2) \quad \begin{gathered} p([\alpha_1,\ldots,\alpha_n;t-\delta_1,\ldots,t-\delta_n]) \geq 0 \\ \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in A} p([\alpha_1,\ldots,\alpha_n;t-\delta_1,\ldots,t-\delta_n]) = 1 \end{gathered}$$

pour tout $t \in \boldsymbol{Z}$.

Etant donné le module aléatoire $P$, défini par (1.3) et l'entrée du module $E(P)$ donnée par (3.1), nommons $S(P)$ la sortie du module $P$, où $S(P)$ est la famille de répartitions

$$(3.3) \quad S(P) = \{p([\alpha;t]) \mid t \in \boldsymbol{Z} \ , \ \alpha \in A\}$$

où $p([\alpha;t])$ représente la probabilité qu'à la sortie du module aléatoire $P$, on ait le signal $\alpha \in A$, au moment $t$, où

$$(3.4) \quad \begin{aligned} &p([\alpha;t]) = \\ &\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in A} p([\alpha;t] \mid [\alpha_1,\ldots,\alpha_n;t-\delta_1,\ldots,t-\delta_n]) p([\alpha_1,\ldots,\alpha_n;t-\delta_1,\ldots,t-\delta_n]) \end{aligned}$$

pour tout $\alpha \in A$ et $t \in \boldsymbol{Z}$. Evidemment, étant donné le module $P$ et l'entrée $E(P)$, la sortie $S(P)$ est complètement déterminée par les égalités (3.4). En fait, la sortie $S(P)$ du module $P$ représente une famille d'espaces finis de probabilité; au moment $t$, l'espace de probabilité correspondant aux événements élémentaires $\{[\alpha;t] \mid \alpha \in A\}$ avec les probabilités $\{p([\alpha;t]) \mid \alpha \in A\}$.

L'entrée $E(P)$ est stationnaire si pour tous signaux $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ de $A$

$$p([\alpha_1,\ldots,\alpha_n;t-\delta_1,\ldots,t-\delta_n]) = p([\alpha_1,\ldots,\alpha_n;-\delta_1,\ldots,-\delta_n]) \tag{3.5}$$

pour tout $t \in \mathbf{Z}$ . Si le module $P$ et l'entrée $E(P)$ sont stationnaires, alors la sortie $S(P)$ est stationnaire, c'est-à-dire

$$p([\alpha;t]) = p([\alpha;0]) \tag{3.6}$$

pour tout $t \in \mathbf{Z}$ et $\alpha \in A$ .

Quand on parle de l'évolution d'un module aléatoire $P$ défini par (1.3), ainsi que de l'évolution de l'entrée $E(P)$ et de la sortie $S(P)$ , à chaque moment $t \in \mathbf{Z}$ , on introduit les entropies suivantes [3,4]

(3.7)
$$H_t(E(P)) = -\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in A} p([\alpha_1,\ldots,\alpha_n;t-\delta_1,\ldots,t-\delta_n]) \log p([\alpha_1,\ldots,\alpha_n;t-\delta_1,\ldots,t-\delta_n]) ,$$

$$H_t(S(P)) = -\sum_{\alpha \in A} p([\alpha;t]) \log p([\alpha;t]) , \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} H_t(S(P)|E(P)) = -\sum_{\alpha \in A} \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in A} & p([\alpha;t]|[\alpha_1,\ldots,\alpha_n;t-\delta_1,\ldots,t-\delta_n]) \cdot \\ & p([\alpha_1,\ldots,\alpha_n;t-\delta_1,\ldots,t-\delta_n]) \log p([\alpha;t]|[\alpha_1,\ldots,\alpha_n;t-\delta_1,\ldots,t-\delta_n]) \end{aligned} \tag{3.9}$$

mesurent respectivement l'incertitude aux moments $t-\delta_1,\ldots,t-\delta_n$ à l'entrée du module, l'incertitude au moment $t$ à la sortie du module et l'incertitude au moment $t$ à la sortie conditionnée par les entrées aux moments $t-\delta_1,\ldots,t-\delta_n$ . De manière analogue, on peut introduire $H_t(E(P) \mid S(P))$ représentant l'incertitude aux $n$ lignes d'entrée du module aléatoire $P$ respectivement aux moments $t-\delta_1,\ldots,t-\delta_n$ conditionnée par la sortie au moment $t$ .

*Proposition 3.1.* La connexion entre l'entrée et la sortie du module aléatoire $P$ satisfait les inégalités

$$0 \le W_t(E(P),S(P)) \le \max\{H_t(E(P)),H_t(S(P))\} \tag{3.10}$$

pour tout $t \in \mathbf{Z}$ où, à gauche, nous avons l'égalité si et seulement si la sortie et l'entrée du module sont indépendantes.

*Démonstration.* La mesure de la connexion [2] entre l'entrée $E(P)$ , donnée par (3.1), et la sortie $S(P)$ , donnée par (3.3), du module $P$ , défini en (1.3) est au moment $t$

$$\begin{aligned} W_t(E(P),S(P)) &= H_t(E(P)) + H_t(S(P)) - H_t(E(P) \times S(P)) \\ &= H_t(E(P)) - H_t(E(P) \mid S(P)) \\ &= H_t(S(P)) - H_t(S(P) \mid E(P)) \end{aligned} \tag{3.11}$$

où $H_t(E(P) \times S(P))$ est l'entropie de l'espace fini de probabilité dont les événements élémentaires sont $([\alpha_1,\dots,\alpha_n;t-\delta_1,\dots,t-\delta_n],[\alpha;t])$ , avec $\alpha_i \in A$ , $(i=1,\dots,n)$ , $\alpha \in A$ , et les probabilités de ces événements élémentaires sont données par

$$\begin{aligned} &p([\alpha_1,\dots,\alpha_n;t-\delta_1,\dots,t-\delta_n]|[\alpha;t]) = \\ &p([\alpha;t]|[\alpha_1,\dots,\alpha_n;t-\delta_1,\dots,t-\delta_n])p([\alpha_1,\dots,\alpha_n;t-\delta_1,\dots,t-\delta_n]) \end{aligned} \tag{3.12}$$

où le nombre $p([\alpha_1,\dots,\alpha_n;t-\delta_1,\dots,t-\delta_n],[\alpha;t])$ représente la probabilité qu'aux $n$ lignes d'entrée du module $P$ , on ait respectivement les signaux $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ respectivement aux moments $t-\delta_1,\dots,t-\delta_n$ *et* qu'à la sortie du module $P$ , on ait le signal $\alpha$ au moment $t$ .

Puisque des propriétés de l'entropie des espaces finis de probabilité ([2]-[4]), nous avons

$$0 \le H_t(E(P) \mid S(P)) \le H_t(E(P)) \tag{3.13}$$

$$0 \le H_t(S(P) \mid E(P)) \le H_t(S(P)) \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned} 0 \le H_t(E(P) \times S(P)) &= H_t(E(P)) + H_t(S(P) \mid E(P)) \\ &= H_t(S(P)) + H_t(E(P) \mid S(P)) \le H_t(E(P)) + H_t(S(P)) \end{aligned} \tag{3.15}$$

alors, de (3.11), nous obtenons (3.10). Dans (3.13) - (3.15), nous avons l'égalité si et seulement si les espaces finis de probabilités $E(P)$ et $S(P)$ sont indépendants, donc $W_t(E(P),S(P)) = 0$ si et seulement si l'entrée et la sortie du module $P$ sont indépendants. $W_t(E(P),S(P))$ mesure la connexion, l'interdépendance entre l'entrée et la sortie du module $P$.

Q.E.D.

Il est très important de pouvoir calculer l'interdépendance entre l'entrée et la sortie d'un module aléatoire. La proposition 3.1 nous donne l'intervalle où la connexion entre l'entrée et la sortie du module aléatoire peut prendre des valeurs. Plus le module est structuré, plus $W_t(E(P),S(P))$ est grand. La distance entropique associée à un module aléatoire représente la quantité de l'incertitude qui existe sur l'entrée et la sortie d'un module si on enlève l'interaction entre l'entrée et la sortie. L'intervalle de variation de cette distance entropique est donné par la proposition suivante.

*Proposition 3.2.* La distance entropique entre l'entrée et la sortie du module aléatoire $P$ satisfait l'inégalité

$$0 \le \rho_t(E(P),S(P)) \le H_t(E(P)) + H_t(S(P)) \tag{3.16}$$

pour tout $t \in \mathbb{Z}$ ; à gauche, nous avons l'égalité si et seulement si, entre les événements élémentaires de l'entrée respectivement de la sortie, on peut établir une correspondance biunivoque, et à droite, nous avons l'égalité si et seulement si l'entrée et la sortie sont indépendants.

*Démonstration.* La distance entropique [2] entre l'entrée $E(P)$, donnée par (3.1) et la sortie $S(P)$, donnée par (3.3) du module aléatoire $P$, défini en (1.3), est mesurée par la quantité

$$\begin{aligned} \rho_t(E(P),S(P)) &= H_t(E(P) \times S(P)) - W_t(E(P) \times S(P)) \\ &= 2H_t(E(P) \times S(P)) - H_t(E(P)) - H_t(S(P)) \\ &= H_t(E(P) \mid S(P)) + H_t(S(P) \mid E(P)) \ . \end{aligned} \tag{3.17}$$

De (3.17), (3.15) et (3.10), nous obtenons la deuxième inégalité de (3.16) où l'égalité a lieu si et seulement si $E(P)$ et $S(P)$ sont indépendants. De la dernière égalité de (3.17) et des inégalités (3.13) et (3.14), il résulte la première égalité de (3.16). En tenant compte de l'expression des entropies qui apparaissent dans la deuxième égalité de (3.17), nous obtenons sans difficulté la forme explicite suivante pour la distance entropique entre l'entrée et la sortie du module P

$$(3.18)\quad \begin{aligned} &\rho_t(E(P),S(P)) = \\ &-\sum_{\alpha\in A}\ \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in A} p([\alpha;t]|[\alpha_1,\ldots,\alpha_n;t-\delta_1,\ldots,t-\delta_n]) \cdot \\ &p([\alpha_1,\ldots,\alpha_n;t-\delta_1,\ldots,t-\delta_n]) \cdot \\ &\log\{p([\alpha;t]|[\alpha_1,\ldots,\alpha_n;t-\delta_1,\ldots,t-\delta_n])p([\alpha_1,\ldots,\alpha_n;t-\delta_1,\ldots,t-\delta_n]|[\alpha;t])\} \end{aligned}$$

où $p([\alpha_1,\ldots,\alpha_n;t-\delta_1,\ldots,t-\delta_n]|[\alpha;t])$ représente la probabilité qu'aux lignes d'entrée du module P , on ait respectivement les signaux $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ respectivement aux moments $t-\delta_1,\ldots,t-\delta_n$ *si* à la sortie du module on a le signal $\alpha$ au moment $t$ . De (3.18), on voit que

$$\rho_t(E(P),S(P)) = 0$$

si et seulement si pour tout $\alpha \in A$ , $\alpha_i \in A$ , $(i=1,\ldots,n)$ , nous avons ou bien

$$(3.19)\qquad p([\alpha_1,\ldots,\alpha_n;t-\delta_1,\ldots,t-\delta_n]|[\alpha;t]) = 0$$

ou bien

$$(3.20)\quad p([\alpha;t]|[\alpha_1,\ldots,\alpha_n;t-\delta_1,\ldots,t-\delta_n])p([\alpha_1,\ldots,\alpha_n;t-\delta_1,\ldots,t-\delta_n]|[\alpha;t]) = 1 .$$

Mais (3.19) et (3.20) peuvent être satisfaits si et seulement si, entre les entrées *possibles* $[\alpha_1,\ldots,\alpha_n;t-\delta_1,\ldots,t-\delta_n]$ et les sorties *possibles* $[\alpha;t]$ il existe une correspondance biunivoque.

Q.E.D.

Les trois propositions suivantes nous permettent de calculer l'interdépendance entre l'entrée et la sortie de l'ensemble obtenu par le couplage en parallèle, respectivement en série, de deux modules aléatoires dépendants ou non. Ces propositions nous donnent ainsi la possibilité d'évaluer de proche en proche l'interdépendance entre l'entrée et la sortie d'un réseau modulaire aléatoire quelconque pour voir comment est structuré ce réseau du point de vue fonctionnel.

*Proposition* 3.3. Soient $P_1$ et $P_2$ deux modules aléatoires indépendants et soit $P = P_1 \otimes P_2$ . Si les entrées $E(P_1)$ et $E(P_2)$ sont indépendantes, alors

$$W_t(E(P),S(P)) = W_t(E(P_1),S(P_1)) + W_t(E(P_2),S(P_2) \ . \tag{3.21}$$

*Démonstration.* Nous avons

$$\begin{aligned} &W_tE(P),S(P)) = H_t(E(P)) + H_t(S(P)) - H_t(E(P) \times S(P)) = \\ (3.22)\quad &H_t(E(P_1) \times E(P_2)) + H_t(S(P_1) \times S(P_2)) - H_t(E(P_1) \times E(P_2) \times S(P_1) \times S(P_2)) = \\ &H_t(S(P_1) \times S(P_2)) - H_t(S(P_1) \times S(P_2) \mid E(P_1) \times E(P_2)) \ . \end{aligned}$$

Puisque $E(P_1)$ et $E(P_2)$ sont indépendantes, nous avons

$$H_t(E(P_1) \times E(P_2)) = H_t(E(P_1)) + H_t(E(P_2)) \ . \tag{3.23}$$

Puisque les modules aléatoires $P_1$ et $P_2$ sont supposés indépendants, nous avons

$$H_t(S(P_1) \times S(P_2) \mid E(P_1) \times E(P_2)) = H_t(S(P_1) \mid E(P_1)) + H_t(E(P_1) \mid S(P_1)) \ . \tag{3.24}$$

Un calcul simple nous montre que l'égalité (3.23) et l'indépendance des modules $P_1$ et $P_2$ impliquent l'indépendance des sorties $S(P_1)$ et $S(P_2)$ , c'est-à-dire

$$H_t(S(P_1) \times S(P_2)) = H_t(S(P_1)) + H_t(S(P_2)) \ . \tag{3.25}$$

Puisque

$$W_t(E(P_i),S(P_i)) = H_t(S(P_i)) - H_t(S(P_i) \mid E(P_i)) \ , \ (i=1,2) \ , \tag{3.26}$$

de la deuxième égalité de (3.22) et des égalités (3.24) - (3.26), nous obtenons (3.21).

Q.E.D.

Renonçons maintenant, pas seulement à l'indépendance des entrées $E(P_1)$ et

$E(P_2)$ , mais aussi à l'indépendance des modules $P_1$ et $P_2$ . Nous obtenons la proposition suivante.

*Proposition 3.4.* Soient $P_1$ et $P_2$ deux modules aléatoires quelconques et soit $P = P_1 \otimes P_2$ . Alors nous avons l'égalité

$$\begin{aligned} W_t(E(P),S(P)) = {} & W_t(E(P_1),S(P_1)) + W_t(E(P_2),S(P_2)) \\ & + W_t(E(P_1) \times S(P_1),E(P_2) \times S(P_2)) \\ & - W_t(E(P_1),E(P_2)) - W_t(S(P_1),S(P_2)) \; . \end{aligned} \tag{3.27}$$

*Démonstration.* Nous avons les égalités

$$\begin{aligned} & W_t(E(P),S(P)) - W_t(E(P_1),S(P_1)) - W_t(E(P_2),S(P_2)) = \\ & H_t(E(P_1) \times E(P_2)) + H_t(S(P_1) \times S(P_2)) - H_t(E(P_1) \times E(P_2) \times S(P_1) \times S(P_2)) - \\ & H_t(E(P_1)) - H_t(S(P_1)) + H_t(E(P_1) \times S(P_1)) - H_t(E(P_2)) - H_t(S(P_2)) + \\ & H_t(E(P_2) \times S(P_2)) = H_t(E(P_1)) + H_t(E(P_2) \mid E(P_1)) + H_t(S(P_1)) + \\ & H_t(S(P_2) \mid S(P_1)) - H_t(E(P_1) \times S(P_1)) - \\ & H_t(E(P_2) \times S(P_2) \mid E(P_1) \times S(P_1)) - H_t(E(P_1)) - H_t(S(P_1)) + \\ & H_t(E(P_1) \times S(P_1)) - H_t(E(P_2)) - H_t(S(P_2)) + H_t(E(P_2) \times S(P_2)) = \\ & -W_t(E(P_1),E(P_2)) - W_t(S(P_1),S(P_2)) + W_t(E(P_1) \times S(P_1),E(P_2) \times S(P_2)) \; . \end{aligned}$$

Rationnalisant les membres extrêmes des égalités précédentes, nous obtenons (3.27).

Q.E.D.

*Proposition 3.5.* Soient deux modules aléatoires

$$P_1 = P(\delta_1,\ldots,\delta_n) \; , \quad P_2 = P_2(\lambda_1,\ldots,\lambda_1 \; , \; \lambda_{r+1},\ldots,\lambda_m)$$

et soit $P = P_1 \ominus_{1,\ldots,r} P_2$ . Alors

$$W_t(E(P),S(P)) = H_tS(P_2)) - H_t(S(P_2) \mid E(P)) \; . \tag{3.28}$$

*Démonstration.* L'égalité (3.28) est une conséquence simple à cause de $W_t(E(P),S(P)) = H_t(S(P)) - H_t(S(P) \mid E(P))$ ainsi que de l'observation $S(P) = S(P_2)$ .

Q.E.D.

Observons toutefois qu'on peut appliquer aussi l'expression duale

$$(3.29) \qquad W_t(E(P),S(P)) = H_t(E(P)) - H_t(E(P) \mid S(P_2)) .$$

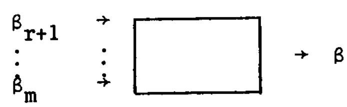
De plus, observons que

$$P = P_1 \circledast_{1,\dots,r} P_2 = P_1(\delta_1,\dots,\delta_n) \circledast_{1,\dots,r} P_2(\lambda_1,\dots,\lambda_1 , \lambda_{r+1},\dots,\lambda_m)$$
$$= P(\lambda_1+\delta_1,\dots,\lambda_1+\delta_n , \lambda_{r+1},\dots,\lambda_m) .$$

Nous avons donc

$$H_t(E(P)) = H_t(E(P_1(\lambda_1+\delta_1,\dots,\lambda_1+\delta_n)) + H_t(E(P_2^*(\lambda_{r+1},\dots,\lambda_m))|E(P_1(\lambda_1+\delta_1,\dots,\lambda_1+\delta_n)))$$

où $P_2^* = P_2^*(\lambda_{r+1},\dots,\lambda_m)$ est le sous-module de $P_2 = P_2(\lambda_1,\dots,\lambda_1 , \lambda_{r+1},\dots,\lambda_m)$




défini par les correspondances aléatoires

$$A^{m-r} \xrightarrow{p([\beta;t] \mid [\beta_{r+1},\dots,\beta_m;t-\lambda_{r+1},\dots,t-\lambda_m])} A$$

où

$$(3.30) \quad p([\beta;t] \mid [\beta_{r+1},\dots,\beta_m;t-\lambda_{r+1},\dots,t-\lambda_m]) =$$
$$\sum_{\beta_1,\dots,\beta_r \in A} p([\beta;t]|[\beta_1,\dots,\beta_r,\beta_{r+1},\dots,\beta_m;t-\lambda_1,\dots,t-\lambda_1,t-\lambda_{r+1},\dots,t-\lambda_m]) \cdot$$
$$p([\beta_1,\dots,\beta_r;t-\lambda_1,\dots,t-\lambda_1]) .$$

Dans le cas où

$$p([\beta_1,\dots,\beta_r;t-\lambda_1,\dots,t-\lambda_1]) = \begin{cases} p([\alpha;t-\lambda_1]) , & \text{si } \beta_1 = \dots = \beta_r = \alpha , \alpha \in A \\ 0 , \text{ autrement} \end{cases}$$

nous avons

$$p([\beta;t] \mid [\beta_{r+1},\ldots,\beta_m;t-\lambda_{r+1},\ldots,t-\lambda_m]) =$$

$$\sum_{\alpha\in A} p([\beta;t]|[\alpha,\ldots,\alpha,\beta_{r+1},\ldots,\beta_m;t-\lambda_1,\ldots,t-\lambda_1,t-\lambda_{r+1},\ldots,t-\lambda_m])p([\alpha;t-\lambda_1]) =$$

$$\sum_{\alpha\in A}\ \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in A} p([\beta;t]|[\alpha,\ldots,\alpha,\beta_{r+1},\ldots,\beta_m;t-\lambda_1,\ldots,t-\lambda_1,t-\lambda_{r+1},\ldots,t-\lambda_m]) \cdot$$

$$p([\alpha;t-\lambda_1]|[\alpha_1,\ldots,\alpha_n;t-(\lambda_1+\delta_1),\ldots,t-(\lambda_1+\delta_n)]) \cdot$$

$$p([\alpha_1,\ldots,\alpha_n;t-(\lambda_1+\delta_1),\ldots,(\lambda_1+\delta_n)]) .$$

## BIBLIOGRAPHIE

[1] MARTIN, L., REISCHER, C., ROSENBERG, I.G., Completeness Problems for Switching Circuits Constructed from Delayed Gates, Proceedings of the Eighth International Symposium of Multiple — Valued Logic, May 24-26, 1978, Rosemont, Illinois, IEEE, 142-148.

[2] GUIASU, S., Information theory with applications, McGraw-Hill, New York — Düsseldorf — London — Toronto, 1977.

[3] GUIASU, S., THEODORESCU, R., Incertitude et information. Les Presses de l'Université Laval, Québec, 1971.

[4] GUIASU, S., THEODORESCU, R., La théorie mathématique de l'information, Dunod, Paris, 1968.

*Silviu Guiasu*
*Université de Bucarest*
*Bucarest*
*Roumanie*

*Louise Martin et Corina Reischer*
*Département de mathématiques*
*Université du Québec à Trois-Rivières*
*Trois-Rivières, Québec, C.P. 500*
*G9A 5H9*

*Manuscrit reçu le 28 février 1978.*
*Revisé le 4 août 1978.*