Ann. Sc. Math. Québec, 1979, Vol. III, No 1, pp. 63-80

CÔNES TANGENTS À UN SOUS-ENSEMBLE CONVEXE FERMÉ

Jean-Pierre Aubin

0. INTRODUCTION

Les *cônes tangents* $T_X(x)$ (où $x \in X$) à un sous-ensemble convexe fermé non vide X d'un espace de Hilbert U jouent un rôle crucial pour démontrer l'existence des points critiques $\overline{x}$ d'une correspondance S, pour montrer que $L + S$ est surjective et pour démontrer l'existence de trajectoires invariantes monotones d'équations différentielles multivoques.

Ceci justifie la présentation "intégrée" des principales propriétés de ces cônes tangents et des moyens de les caractériser.

Après avoir défini les cônes tangents et normaux, nous montrons que $T_X(x) \subset T_Y(x)$ si $x \in X \subset Y$, que $T_{\overline{A(X)}}(Ax) = \overline{AT_X(x)}$, que $T_{X\times Y}(x,y) = T_X(x) \times T_Y(y)$, que $T_{Z\cap Y}(x) = T_Z(x) \cap T_Y(x)$ (lorsque $0 \in \text{Int}\,(Z-Y)$) et plus généralement, que $T_{Z\cap L^{-1}(Y)}(x) = T_Z(x) \cap L^{-1}T_Y(Lx)$ (lorsque $0 \in \text{Int}\,(LZ-Y)$). On montre de même que si $X = \{y \in Y$ tels que $\varphi(y) \leq 1\}$, alors $T_X(x) = T_Y(x) \cap \partial\varphi(x)^-$ où $\partial\varphi(x)^-$ est le cône polaire négatif du sous-différentiel d'une fonction convexe semi-continue inférieurement φ.

Ces formules permettent de caractériser les cônes tangents à de nombreux ensembles; on "calcule" ainsi les cônes tangents à une boule, un cube, un simplexe et un cône.

---

* *Annexe à l'article "Analyse fonctionnelle non linéaire et applications" paru dans le Vol. 2, No 1 des Annales.*

Nous caractérisons ensuite les cônes tangents à l'aide de la dérivée directionnelle à droite $Dd_X(x)(u)$ de la fonction distance d_X définie par $d_X(x) = \inf\{\|x-y\| \mid y \in X\}$ et nous montrons que le cône normal est engendré par le sous-différentiel $\partial d_X(x)$ de d_X, qui est convexe faiblement compact et contient l'origine. Lorsque l'intérieur de X est non vide, on construit des sous-ensembles convexes faiblement compacts *ne contenant pas l'origine* qui engendrent le cône normal qui permettent de caractériser l'intérieur du cône tangent.

On termine en établissant les propriétés de continuité des diverses correspondances introduites.

1. DÉFINITION DES CÔNES TANGENTS ET NORMAUX

Nous commençons par donner une définition "naturelle" du cône tangent $T_X(x)$ en $x \in X$ à un sous-ensemble convexe fermé X d'un espace de Hilbert U.

Définition 1. Soit X un ensemble convexe fermé non vide. Le cône tangent $T_X(x)$ à X en $x \in X$ est le cône fermé (de sommet 0) engendré par $X - x$:

(1) $$T_X(x) = \overline{\bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda(X-x)}\,.$$

Puisque X est convexe, il est évident que $T_X(x)$ est un *cône convexe fermé*. On remarque que

(2) $$X \subset x + T_X(x)$$

et par suite, que $T_X(x)$ a un intérieur non vide dès que l'intérieur de X est non vide.

Remarquons aussi que

(3) $$\begin{cases} \text{i)} & T_{\{x\}}(x) = \{0\} \\ \text{ii)} & \text{si } x \in \operatorname{Int} X\,, \quad T_X(x) = U \end{cases}$$

puisque $X - x = \{0\}$ dans le premier cas et puisque $X - x$ contient un voisinage de l'origine dans le second.

Nous introduisons maintenant la notion duale de cône normal.

Définition 2. Soit X un sous-ensemble convexe fermé de U. Le "cône normal" $N_X(x)$ à X en $x \in X$ est défini par

$$N_X(x) = \{p \in U^* \text{ tels que } \langle p,x\rangle = \max \{\langle p,y\rangle \mid y \in X\}\} . \tag{4}$$

Proposition 1. Le cône normal $N_X(x)$ est le cône polaire négatif $T_X(x)^-$ du cône tangent $T_X(x)$ défini par

$$T_X(x)^- = \{p \in U^* \text{ tels que } \langle p,u\rangle \le 0 \quad \forall u \in T_X(x)\} . \tag{5}$$

Par suite

$$T_X(x) = N_X(x)^- \text{ puisque } T_X(x) \text{ est un cône convexe fermé.}$$

Démonstration.

a) Si $p \in T_X(x)^-$, alors $\langle p,y-x\rangle \le 0$ pour tout $y \in X$ puisque $v = y - x \in T_X(x)$ lorsque $y \in X$. Donc

$$p \in N_X(x) .$$

b) *Inversement,* soit $p \in N_X(x)$ et $v = \lim_{n\to\infty} \lambda_n(y_n - x) \in T_X(x)$, où $\lambda_n \in R_+$ et $y_n \in X$. Alors

$$\langle p,v\rangle \le 0 \text{ puisque } \langle p,\lambda_n(y_n-x)\rangle = \lambda_n\langle p,y_n-x\rangle \le 0 \text{ pour tout } n . \square$$

Les relations (3) impliquent alors par polarité que

$$\begin{cases} \text{i)} & N_{\{x\}}(x) = U^* \\ \text{ii)} & \text{si } x \in \operatorname{Int} X \text{, alors } N_X(x) = \{0\} . \end{cases} \tag{6}$$

Si $\varphi : U \to]-\infty,+\infty]$ est une fonction convexe semi-continue inférieurement de domaine

$$Z = \{z \in U \text{ tel que } \varphi(z) < +\infty\} \text{ non vide,}$$

Définition 3. On appelle "sous-différentiel" $\partial\varphi(x)$ de φ en x le sous-ensemble convexe fermé (éventuellement vide) défini par

(7) $$\partial\varphi(x) = \{p \in U^* \text{ tels que } \varphi(x) - \varphi(y) \le \langle p, x-y\rangle \quad \forall y \in U\} .$$

Remarquons que si $\varphi = \psi_Z$ est l'*indicateur* de Z défini par $\psi_Z(x) = 0$ si $x \in Z$ et $\psi_Z(x) = +\infty$ sinon, alors

(8) $$\partial\psi_Z(x) = N_Z(x) .$$

2. OPÉRATIONS SUR LES CÔNES TANGENTS

Nous allons exposer quelques "règles de calcul" des cônes tangents. Dans ce qui suit, X, Y, Z, représentent des *sous-ensembles convexes fermés non vides.*

Proposition 1. Si $X \subset Y$ et si $x \in X$, alors

(1) $$T_X(x) \subset T_Y(x) \quad \text{et} \quad N_Y(x) \subset N_X(x) .$$

Démonstration. Il est clair que si $p \in N_Y(x)$, alors $\langle p,x\rangle = \max \{\langle p,y\rangle \mid y \in Y\} \ge \max \{\langle p,y\rangle \mid y \in X\} \ge \langle p,x\rangle$ et par suite, que $p \in N_X(x)$. Donc $N_Y(x) \subset N_X(x)$ et, par polarité, on en déduit que $T_X(x) \subset T_Y(x)$. □

Proposition 2. Si $X^i \subset U^i$ pour $i = 1,\ldots,n$ et si $x = \prod_{i=1}^n X^i \subset U = \prod_{i=1}^n U^i$. Alors,

(2) $$T_X(x) = \prod_{i=1}^n T_{X^i}(x^i) \quad \text{et} \quad N_X(x) = \prod_{i=1}^n N_{X^i}(x^i) .$$

Démonstration. Soit $p = (p_1,\ldots,p_n) \in U^* = \prod_{i=1}^n U^{i*}$ un élément de $N_X(x)$, où $x = (x^1,\ldots,x^n)$. Alors

$$\langle p,x\rangle = \sum_{i=1}^n \langle p_i, x^i\rangle = \max \left\{ \sum_{i=1}^n \langle p_i, y^i\rangle \mid y^i \in X^i \right\}$$
$$= \sum_{i=1}^n \max \{\langle p_i, y^i\rangle \mid y^i \in X^i\} .$$

Ceci équivaut à écrire que $\langle p_i, x^i\rangle = \max\{\langle p_i, y^i\rangle \mid y^i \in X^i\}$ pour $i = 1,\ldots,n$, c'est-à-dire que $p_i \in N_{X^i}(x^i)$ pour tout $i = 1,\ldots,n$. Donc, par polarité,

$$T_X(x) = \prod_{i=1}^{n} T_{X^i}(x^i) \ . \square$$

Proposition 3. Soient U et V deux espaces de Hilbert, $X \subset U$ un sous-ensemble convexe fermé et $A \in \mathcal{L}(U,V)$. Alors

$$T_{\overline{A(x)}}(Ax) = \overline{AT_X(x)} \quad \text{et} \quad N_{\overline{A(X)}}(Ax) = A^{*-1} N_X(x) \tag{3}$$

Démonstration.

a) Il est clair que $A^*p \in N_X(x)$ si et seulement si $p \in N_{\overline{A(X)}}(Ax)$.

b) On déduit l'égalité sur les cônes tangents puisque $[-A^{*-1} N_X(x)] = \text{adh}[A\, T_X(x)]$ d'après le théorème des bipolaires.

Comme conséquence immédiate, on obtient le résultat suivant:

Proposition 4. Supposons que X et Y soient deux sous-ensembles convexes fermés de U . Alors

$$T_{\overline{X+Y}}(x+y) = \overline{T_X(x)+T_Y(y)} \quad \text{et} \quad N_{\overline{X+Y}}(x+y) = N_X(x) \cap N_Y(y) \ .$$

Nous allons établir maintenant une propriété qui permet de caractériser les cônes tangents à de nombreux ensembles. Pour cela, nous utilisons le théorème de dualité suivant:

Théorème 1. Soient U et V deux espaces de Hilbert, $L \in \mathcal{L}(U,V)$ un opérateur linéaire continu, $\varphi : U \to]-\infty,+\infty]$ et $\psi : V \to]-\infty,+\infty]$ des fonctions convexes semi-continues inférieurement de domaines non vides $Z \subset U$ et $Y \subset V$.

Supposons que:

$$0 \in \text{Int}\,(LZ - Y) \ . \tag{4}$$

Désignons par $X = \{x \in Z$ tels que $Lx \in Y\}$ le domaine de $x \to \varphi(x) + \psi(Lx)$ et supposons que,

(5) $$\bar{x} \in X \text{ vérifie } \varphi(\bar{x}) + \psi(L\bar{x}) = \min_{x\in X} [\varphi(x) + \psi(Lx)] .$$

Alors

(6) $$0 \in L^*\partial\psi(L\bar{x}) + \partial\varphi(\bar{x}) .$$

Démonstration.

a) Désignons par B la boule unité de U et par $\psi^*(q) = \sup_{y\in V} (\langle q,v\rangle - \psi(y))$ la *fonction conjuguée* de ψ. Posons

(7) $$v = \sup_{n\geq 1} \inf_{q\in V^*} \sup_{z\in nB} [\psi^*(q) - \langle q,Lz\rangle - \varphi(z)] .$$

b) Puisque B est faiblement compact, puisque $z \to -\varphi(z) - \langle q,Lz\rangle$ est concave et faiblement semi-continue supérieurement et puisque $q \to \psi^*(q) - \langle q,Lz\rangle$ est convexe, le théorème du max inf implique que

$$\begin{aligned} v &= \sup_{n\geq 1} \sup_{z\in nB} \inf_{q\in V^*} [\psi^*(q) - \langle q,Lz\rangle - \varphi(z)] \\ &= \sup_{z\in Z} \inf_{q\in V^*} [\psi^*(q) - \langle q,Lz\rangle - \varphi(z)] \\ &= -\inf_{x\in X} [\varphi(x) + \psi(Lx)] = -\varphi(\bar{x}) - \psi(L\bar{x}) . \end{aligned}$$

c) D'autre part, la définition même de v implique l'existence d'une suite d'éléments $q_n \in V^*$ telle que

(8) $$\forall z \in Z , \quad \limsup_{n\to\infty} [\psi^*(q_n) - \langle q_n,Lz\rangle - \varphi(z)] \leq v .$$

L'hypothèse (4) implique l'existance de $\eta > 0$ tel que $\eta B \subset Y - LZ$. On peut alors associer à tout $x \in \eta B$ des éléments $y_x \in Y$ et $z_x \in Z$ tels que $x = y_x - Lz_x$. Donc:

$$\begin{aligned} \langle q_n,x\rangle &= \langle q_n,y_x\rangle - \langle L^*q_n,z_x\rangle \\ &\leq \psi^*(q_n) + \psi(y_x) - \langle L^*q_n,z_x\rangle \end{aligned}$$

et par suite, $\forall x \in \eta B$

(9) $$\limsup_{n\to\infty} \langle q_n,x\rangle \leq v + \varphi(z_x) + \psi(y_x) < +\infty .$$

Cela implique que la suite q_n est *bornée*. Elle est donc faiblement relativement compacte. On peut alors en extraire une sous-suite convergeant *faiblement* vers $\overline{q} \in V^*$. Puisque $q \to \psi^*(q) - \langle q, Lz\rangle$ est *faiblement* semi-continue inférieurement, l'inégalité (8) implique que

$$\forall z \in Z, \quad \psi^*(\overline{q}) - \langle \overline{q}, Lz\rangle - \varphi(z) \le v \tag{10}$$

Puisque $v = -\varphi(\overline{x}) - \psi(L\overline{x})$, on obtient, en prenant $z = \overline{x}$, que $\psi^*(\overline{q}) - \langle \overline{q}, L\overline{x}\rangle \le -\psi(L\overline{x})$, c'est-à-dire que $\overline{q} \in \partial\psi(L\overline{x})$. On peut alors écrire l'inégalité (10) sous la forme

$$\varphi(\overline{x}) - \varphi(z) \le \langle -L^*\overline{q}, \overline{x} - z\rangle \quad \forall z \in Z . \tag{11}$$

Ceci exprime que $-L^*\overline{q} \in \partial\varphi(\overline{x})$ et par suite, que $0 = L^*\overline{q} - L^*\overline{q} \in L^*\partial\psi(L\overline{x}) + \partial\varphi(\overline{x})$. □

Théorème 2. Soient U et V deux espaces de Hilbert, $L \in \mathcal{L}(U,V)$ et $Z \subset U$ et $Y \subset V$ deux sous-ensembles convexes fermés vérifiant

$$0 \in \operatorname{Int}(LZ - Y) . \tag{12}$$

Considérons alors l'ensemble convexe fermé X défini par

$$X = \{x \in Z \text{ tels que } Lx \in Y\} . \tag{13}$$

Alors:

$$T_X(x) = T_Z(x) \cap L^{-1}T_Y(Lx) \quad \text{et} \quad N_X(x) = N_Z(x) + L^*N_Y(Lx) . \tag{14}$$

Démonstration.

a) Prenons $r \in N_Z(x)$, $q \in N_Y(Lx)$ et $p = r + L^*q$. Si $y \in X$, on obtient $\langle p,x\rangle = \langle r,x\rangle + \langle q,Lx\rangle \ge \langle r,y\rangle + \langle q,Ly\rangle = \langle p,y\rangle$ puisque $y \in Z$ et $Ly \in Y$.

b) Prenons $p \in N_X(x)$, qui vérifie $\langle p,x\rangle = \max\{\langle p,z\rangle \mid z \in Z \text{ et } Lz \in Y\}$. On applique le *théorème 1* de dualité avec $\varphi(y) = \psi_Y(y)$ et $\psi(z) = \psi_Z(z) - \langle p,z\rangle$, dont les domaines sont Y et Z. Il implique que

$0 \in L^*N_Y(Lx) + N_Z(x) - p$ puisque $\partial\varphi(x) = N_Y(x)$ et $\partial\psi(x) = N_Z(x) - p$.

c) On obtient alors

$$T_X(x) = (N_Z(x) + L^*N_Y(Lx))^- = T_Z(x) \cap (L^*N_Y(Lx))^- = T_Z(x) \cap L^{-1}T_Y(Lx) \ . \ \square$$

Proposition 4. Considérons deux sous-ensembles convexes fermés Z et Y de U tels que

(15) $$0 \in \mathrm{Int}\ (Z - Y) \ .$$

Alors:

(16) $$T_{Z\cap Y}(x) = T_Z(x) \cap T_Y(x) \quad \text{et} \quad N_{Z\cap Y}(x) = N_Z(x) + N_Y(x) \ .$$

Démonstration. On prend $V = U$ et $L = 1$ dans le théorème précédent. $\square$

Proposition 5. Considérons $n + 1$ sous-ensembles convexes fermés Z et Y^i $(i = 1,\ldots,n)$ de U vérifiant

(17) $$\exists \eta > 0 \ \text{tel que} \ Z \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} (Y^i + \eta B) \right) \neq \emptyset \ .$$

Alors, si $X = Z \cap \bigcap_{i=1}^{n} Y^i$,

(18) $$T_X(x) = T_Z(x) \cap \bigcap_{i=1}^{n} T_{Y^i}(x) \quad \text{et} \quad N_X(x) = N_Z(x) + \sum_{i=1}^{n} N_{Y^i}(x) \ .$$

Démonstration. On prend $V = U^n$, L défini par $Lx = (x,\ldots,x)$ et $Y = \prod_{i=1}^{n} Y^i$ dans le théorème précédent. Les hypothèses (17) expriment que $0 \in \mathrm{Int}\ (LZ - Y)$. Le *théorème 2* implique (18). $\square$

Proposition 6. Considérons n espaces de Hilbert U^i , n sous-ensembles convexes fermés Z^i de U^i et n opérateurs $L_i \in \mathcal{L}(U^i,V)$. Supposons que

(19) $$0 \in \mathrm{Int}\left(\sum_{i=1}^{n} L_i(Z^i) - Y \right) .$$

Considérons l'ensemble X défini par

$$X = \left\{ x \in \prod_{i=1}^{n} Z^i \quad \text{tels que} \quad \sum_{i=1}^{n} L_i x^i \in Y \right\} . \tag{20}$$

Alors

$$\begin{cases} T_X(v) = \left\{ v = (v^1, \dots, v^n) \in \prod_{i=1}^{n} U^i \quad \text{tels que} \right. \\ \left. v^i \in T_{Z^i}(x^i) \quad \text{pour} \quad i = 1, \dots, n \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} L_i v^i \in T_Y\left(\sum_{i=1}^{n} L_i x^i\right) \right\} \end{cases} \tag{21}$$

et

$$N_X(x) = \prod_{i=1}^{n} \left(N_{Z^i}(x^i) + L_i^* N\left(\sum_{i=1}^{n} L_i x^i\right)\right) . \tag{22}$$

Démonstration. On applique le *théorème 2* avec $U = \prod_{i=1}^{n} U^i$, $Z = \prod_{i=1}^{n} Z^i$ où L est défini par $Lx = \sum_{i=1}^{n} L_i x^i$. L'hypothèse (19) implique que $0 \in \text{Int}\,(LZ - Y)$. Les conclusions (21) et (22) résultent de (14) puisque $L^*p = (L_1^*p, \dots, L_n^*p)$. □

Théorème 3. Considérons un sous-ensemble convexe fermé Y de U et n fonctions convexes semi-continues inférieurement $\varphi_i : U \to]-\infty, +\infty]$ de domaine Z^i non vide.

On suppose que:

$$\begin{cases} \text{i)} \quad \exists x_0 \in Y \quad \text{tel que} \quad \varphi_i(x_0) < 1 \quad \text{pour} \quad i = 1, \dots, n \\ \text{ii)} \quad \exists x_i \in Y \quad \text{tel que} \quad \varphi_i \quad \text{soit continue en} \quad x_1 \quad \text{pour} \quad i = 1, \dots, n \end{cases} \tag{23}$$

Considérons l'ensemble X défini par:

$$X = \{ x \in Y \quad \text{tels que} \quad \varphi_i(x) \leq 1 \quad \text{pour} \quad i = 1, \dots, n \} . \tag{24}$$

Alors, si $I(x) = \{ i = 1, \dots, n$ tels que $\varphi_i(x) = 1 \}$, on obtient

$$T_X(x) = T_Y(x) \cap \bigcap_{i \in I(x)} \partial\varphi_i(x)^- \tag{25}$$

et

$$N_X(x) = N_Y(x) + \sum_{i \in I(x)} \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda \partial\varphi_i(x) . \tag{26}$$

Démonstration.

a) Prenons $p \in N_Y(x) + \sum_{i\in I(x)} \lambda^i \partial\varphi_i(x)$. On en déduit que pour tout $y \in Y$,

$$\text{(27)} \qquad \langle p,y\rangle \leq \langle p,x\rangle + \sum_{i\in I(x)} \lambda^i(\varphi_i(y) - \varphi_i(x)) \ .$$

Puisque $\varphi_i(x) = 1$ si $i \in I(x)$, on en déduit que $\langle p,y\rangle \leq \langle p,x\rangle$ pour tout $y \in X$.

b) *Inversement,* prenons $p \in N_X(x)$. Alors $\langle p,x\rangle = \max \{\langle p,y\rangle \mid y \in Y$ et $\varphi_i(y) \leq 1$ pour $i = 1,\ldots,n\}$. Puisque la condition de Slater (23) i) est satisfaite, on en déduit l'existence de multiplicateurs $\lambda^i \geq 0$ vérifiant $\Sigma\lambda^i(\varphi_i(x) - 1) = 0$ et

$$\text{(28)} \qquad \langle p,x\rangle = \max_{y\in Y} \left(\langle p,y\rangle - \sum_{i=1}^{n} \lambda^i(\varphi_i(y) - 1\right)$$

Autement dit, $\lambda^i = 0$ dès que $\varphi_i(x) < 1$ et $x \in Y$ minimise sur Y la fonction $y \to \varphi(y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i\varphi_i(y) - \langle p,y\rangle$, dont le domaine est $Z_x = \bigcap_{i\in I(x)} Z^i$. L'hypothèse (23) ii) implique que $0 \in \operatorname{Int}(Z_x - Y)$ et le *théorème 1* de dualité avec $L = 1$ et $\psi = \psi_Y$ implique que $0 \in N_Y(x) + \partial\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda^i\varphi_i\right)(x) - p$. Puisque les fonctions φ_i sont continues en x_1 , on déduit du *théorème 1* de dualité avec $L = 1$, $\varphi = \lambda^1\varphi_1$ et $\psi = \sum_{i=2}^{n} \lambda^i\varphi_i - q$ où $q \in \partial(\Sigma\lambda^i\varphi_i)(x)$ que $q \in \lambda^1\partial\varphi_1(x) + \partial\left(\sum_{i=2}^{n} \lambda^i\varphi_i\right)(x)$. Par suite, on montre que $q \in \sum_{i=1}^{n} \lambda^i\partial\varphi_i(x)$. On obtient donc que $p \in N_Y(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda^i\partial\varphi_i(x) = N_Y(x) + \sum_{i\in I(x)} \lambda^i\partial\varphi_i(x)$ car $\lambda^i = 0$ si $\varphi_i(x) < 1$.

c) Puisque $N_X(x) = N_Y(x) + \sum_{i\in I(x)} \bigcup_{\lambda\geq 0} \lambda\partial\varphi_i(x)$, on en déduit par polarité que $T_X(x) = T_Y(x) \cap \bigcap_{i\in I(x)} \partial\varphi_i(x)^- $. □

3. EXEMPLES

a) *Cône tangent à la boule unité d'un espace de Hilbert.*

Proposition 1. Soit B la boule unité d'un espace de Hilbert U. Si $\|x\| = 1$, alors

$$T_B(x) = \{Jx\}^- \quad \text{et} \quad N_B(x) = \bigcup_{\lambda\geq 0} \lambda Jx \tag{1}$$

où $J \in \mathcal{L}(U,U^*)$ est l'opérateur de dualité de U sur U^*.

Démonstration. L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique que si $\|x\| = 1$ et si $\|y\| \leq 1$, alors $\langle Jx,y\rangle \leq \|x\|\,\|y\| = 1 = \langle Jx,x\rangle$. Donc $Jx \in N_B(x)$. *Inversement*, si $\langle p,x\rangle = \max_{y\in B} \langle p,y\rangle = \|p\|_*$ alors $\left\langle \frac{p}{\|p\|_*}, x\right\rangle = 1$. Ceci implique que $p = \|p\|_* Jx$. Donc $N_B(x) = \bigcup_{\lambda\geq 0} \lambda Jx$ et $T_B(x) = \{Jx\}^-$.

b) *Cône tangent à un pavé de* R^n.

Proposition 2. Soit $X = \prod_{i=1}^{n} [a_i,b_i]$ un pavé de R^n. Alors $v \in T_X(x)$ si, pour tout $i = 1,\dots,n$

$$v_i \in \begin{cases} R_+ & \text{si } x_i = a_i \\ R & \text{si } x_i \in \,]a_i,b_i[\\ -R_+ & \text{si } x_i = b_i \end{cases} \tag{2}$$

Démonstration. D'après la *proposition* 2 du §2, $T_X(x) = \prod_{i=1}^{n} T_{[a_i,b_i]}(x_i)$ et $N_X(x) = \prod_{i=1}^{n} N_{[a_i,b_i]}(x_i)$. Or il est clair que $N_{[a_i,b_i]}(a_i) = -R_+$, $N_{[a_i,b_i]}(x_i) = \{0\}$ si $x \in [a_i,b_i]$ et $N_{[a_i,b_i]}(b_i) = R_+$. Par suite $T_{[a_i,b_i]}(x)$ est l'ensemble des éléments v_i vérifiant (2). □

c) *Cône tangent à un cône convexe fermé.*

Proposition 3. Soit P un cône convexe fermé. Alors

$$(3)\qquad \begin{cases} v \in T_P(x) \text{ si et seulement si } \langle p,v\rangle \le 0 \text{ lorsque} \\ p \in P^- \text{ vérifie } \langle p,x\rangle = 0 \end{cases}$$

et $N_P(x) = P^- \cap \{x\}^\perp$.

Démonstration.

a) Il est clair que $P^- \cap \{x\}^\perp$ est contenu dans $N_P(x)$.

b) *Inversement,* si $p \in N_P(x)$, alors $\langle p,x\rangle = \max \{\langle p,y\rangle \mid y \in P\}$. Cela implique que $p \in P^-$ et que $\langle p,x\rangle = 0$.

c) Alors $T_P(x) = (P^- \cap \{x\}^\perp)^- = \overline{P + \mathbb{R}x}$ est l'ensemble des éléments vérifiant (3). □

d) *Cône tangent à la semelle d'un cône.*

Proposition 4. Soient P un cône convexe fermé, $p_0 \in P^-$, $p_0 \neq 0$, et $M = \{x \in P \text{ tels que } \langle p_0,x\rangle = -1\}$ une semelle du cône P . Alors

$$(4)\qquad \begin{cases} v \in T_M(x) \text{ si } \langle p_0,v\rangle = 0 \text{ et } \langle p,v\rangle \le 0 \text{ lorsque} \\ p \in P^- \text{ vérifie } \langle p,x\rangle = 0 \end{cases}$$

et $N_M(x) = \ker p_0 + (P^- \cap \{x^\perp\})$.

Démonstration. On utilise d'abord le *théorème 2* avec $Z = P$, $V = \mathbb{R}$, $L = p_0$ et $Y = \{-1\}$. Il est clair que $0 \in \operatorname{Int}(LZ - Y) = (-\mathbb{R}_+ + \{1\})$. Alors $N_M(x) = N_P(x) + p_0\mathbb{R}$ puisque $N_{\{-1\}}\{-1\} = \mathbb{R}$ et $L^*\lambda = \lambda p_0$ et $T_M(x) = T_P(x) \cap p_0^{-1}(0) = T_P(x) \cap \ker p_0$. On utilise alors la caractérisation de $N_P(x)$ et de $T_P(x)$ donnée dans la *proposition 3.*

4. CARACTÉRISATION DES CÔNES TANGENTS

Nous allons caractériser le cône tangent $T_X(x)$ à l'aide de la dérivée à droite de la fonction distance à X. Cette caractérisation permet d'étendre la notion de cône tangent à tout sous-ensemble (convexe fermé ou non) de U à l'aide de la notion de dérivée directionnelle de Clarke.

Nous montrons de même que le cône normal est engendré par le sous-différentiel $\partial d_X(x)$ de la fonction distance. Nous construisons aussi des semelles compactes du cône normal lorsque X a un intérieur non vide, ce qui nous permet de donner d'autres caractérisations du cône tangent et de son intérieur. Considérons la fonction distance d_X définie par

$$d_X(y) = \inf_{z \in X} \|y-z\| \quad . \tag{1}$$

Elle est *lipschitzienne de rapport 1*. Elle est également *convexe* lorsque X est convexe: en effet, si x et $y \in U$, on peut associer à tout $\varepsilon > 0$ des éléments x_ε et $y_\varepsilon \in X$ tels que $\|x-x_\varepsilon\| \leq d_X(x) + \varepsilon$ et $\|y-y_\varepsilon\| \leq d_X(y) + \varepsilon$. Donc $d_X(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \|\lambda x + (1-\lambda)y - \lambda x_\varepsilon - (1-\lambda)y_\varepsilon\| \leq \lambda d_X(x) + (1-\lambda)d_X(y) + \varepsilon$. En faisant tendre ε vers 0, on démontre que d_X est convexe.

Puisque d_X est *convexe* et *continue*, elle est *dérivable à droite* au sens où pour tout $x \in U$, $\forall v \in U$, la limite suivante existe:

$$-\|v\| \leq \lim_{\theta \to 0^+} \frac{d_X(x+\theta v) - d_X(x)}{\theta} = \inf_{\theta > 0} \frac{d_X(x+\theta v) - d_X(x)}{\theta} \leq \|v\| \tag{2}$$

Nous la désignons par $Dd_X(x)(v)$.

On peut montrer que $Dd_X(x)(v)$ est convexe continue positivement homogène par rapport à v et semi-continue supérieurement par rapport à (x,v). On peut montrer que c'est aussi la fonction d'appui du sous-différentiel $\partial d_X(x)$:

$$\partial d(x) = \{p \in U^* \text{ tels que } \langle p,v\rangle \leq Dd_X(x)(v) \quad \forall v \in U\} \tag{3}$$

qui est un sous-ensemble *convexe fermé contenu dans la boule unité*.

Proposition 1. Soit X un sous-ensemble convexe fermé de U. Alors

$$T_X(x) = \{v \in U \text{ tels que } Dd_X(x)(v) \leq 0\} = \partial d_X(x)^- \tag{4}$$

et

$$N_X(x) = \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda \partial d_X(x) . \tag{5}$$

Démonstration.

a) Il est clair que si $v = y - x \in X - x$, alors

$$Dd_X(x)(v) \leq d_X(x+v) - d_X(x) = d_X(y) - d_X(x) = 0 .$$

Puisque $v \to d_X(x)(v)$ est positivement homogène et continue, on en déduit que tout $v \in T_X(x)$ vérifie $Dd_X(x)(v) \leq 0$.

b) La propriété (3) montre que $Dd_X(x)(v) \leq 0$ si et seulement si $v \in \partial d_X(x)^-$. Donc $T_X(x) \subset \partial d_X(x)^-$ et par suite, $\partial d_X(x)^{--} \subset N_X(x)$.

c) Nous allons montrer que $N_X(x) \subset \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda \partial d_X(x)$. Prenons en effet $p \in N_X(x)$; alors $\langle p,x \rangle = \max \{\langle p,y \rangle \mid y \in X\}$. Soit $z \in X$ tel que $\|y-z\| \leq d_X(y)$. Alors

$$\langle -p,x \rangle \leq \langle -p,z \rangle = \langle -p,y \rangle + \langle -p,z-y \rangle \leq \langle -p,y \rangle + \|p\|_* d_X(y)$$

et par suite,

$$\forall y \in U , \quad d_X(x) - d_X(y) \leq \left\langle \frac{p}{\|p\|_*} , x-y \right\rangle \tag{6}$$

(puisque $d_X(x) = 0$). Ceci exprime que $\frac{p}{\|p\|_*} \in \partial d_X(x)$. On a donc montré que

$$N_X(x) = \partial d_X(x)^{--} = \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda \partial d_X(x) \tag{7}$$

et par suite, que $T_X(x) = \partial d_X(x)^-$.

En d'autres termes, nous avons montré que le *cône normal* $N_X(x)$ *est engendré* par $\partial d_X(x)$, qui est un sous-ensemble *convexe faiblement compact* (car il est contenu dans la boule unité). Mais $\partial d_X(x)$ n'est pas une semelle du cône normal car

$d_X(x)$ contient 0 pour tout x . (En effet, si $x \in X$,

$Dd_X(x)(v) = \inf\limits_{\theta>0} \frac{d_X(x+\theta v)}{\theta} \geq 0$ pour tout $v \in V$.)

Il est utile de construire des semelles faiblement compactes des cônes normaux (lorsqu'elles existent). Ceci est possible lorsque l'intérieur de X est non vide.

Proposition 2. Supposons que l'intérieur d'un sous-ensemble convexe fermé $X \subset U$ soit non vide. Prenons $x_0 \in \operatorname{Int} X$. Si $x \in \partial X$, frontière de X , alors l'ensemble $M_X(x)$ défini par

$$M_X(x) = \{p \in N_X(x) \text{ tels que } \langle p, x-x_0\rangle = 1\} \tag{8}$$

est une "semelle faiblement compacte" du cône normal $N_X(x)$. De plus, si B_* désigne la boule unité de U^* ,

$$\exists a > 0 \text{ tel que } \forall x \in \partial X , \quad M_X(x) \subset aB_* . \tag{9}$$

Si l'on pose $\mu(x,v) = \sup\{\langle p,v\rangle \mid p \in M_X(x)\}$, alors

$$T_X(x) = \{v \in U \text{ tels que } \mu(x,v) \leq 0\} \tag{10}$$

et

$$\operatorname{Int} T_X(x) = \{v \in U \text{ tels que } \mu(x,u) < 0\} . \tag{11}$$

Démonstration.

a) Puisque $x_0 \in \operatorname{Inf} X$, il existe $\eta > 0$ tel que $x_0 + \eta B \subset X$. Prenons $x \in \partial X$. Le théorème de séparation implique qu'il existe $p \neq 0$, $p \in U^*$ tel que $\langle p,x\rangle = \sup\{\langle p,y\rangle \mid y \in \operatorname{Inf} X\} \geq \langle p,x_0\rangle + \eta \sup\limits_{z\in B} \langle p,z\rangle = \langle p,x_0\rangle + \eta\|p\|_*$. Cela implique que $M_X(x)$ est non vide. Il est clair que $M_X(x)$ est convexe fermé et ne contient pas l'origine. Puisque $x_0 - x + \eta B \subset X - x \subset T_X(x)$, tout élément $p \in M_X(x)$ vérifie $\langle p,x_0-x\rangle + \eta \sup\limits_{y\in B} \langle p,y\rangle = -1 + \eta\|p\|_* \leq 0$. Donc (9) a lieu avec $a = \eta^{-1}$.

b) Montrons que $M_X(x)$ engendre le cône normal. Si $p \in N_X(x)$ est différent de 0, on déduit que $<p,x_0-x> + \eta \sup_{y \in B} <p,y> \leq 0$. Donc $<p,x-x_0> \geq \eta \|p\|_* > 0$ et par suite, $p = \lambda q$ où $\lambda = <p,x-x_0>$ et $q = \frac{p}{<p,x-x_0>}$ appartient à $M_X(x)$.

c) Puisque $\mu(x,v)$ est la fonction d'appui de $M_X(x)$ et puisque $M_X(x)$ engendre $N_X(x)$, on en déduit que $T_X(x)$ est l'ensemble des éléments v tels que $\mu(x,v) \leq 0$.

d) Puisque $\mu(x,v)$ est la fonction d'appui de l'ensemble convexe compact faible $M_X(x)$ elle est continue en v et par suite, l'ensemble des v tels que $\mu(x,v) < 0$ est *ouvert*. Il est donc contenu dans l'intérieur de $T_X(x)$.

Inversement, soit $v \in \operatorname{Int} T_X(x)$. Il existe $\alpha > 0$ tel que $v + \alpha B \subset T_X(x)$. Donc $v + \frac{\alpha(x-x_0)}{\|x-x_0\|} \in T_X(x)$, ce qui entraîne que

$<p,v> + \frac{\alpha}{\|x-x_0\|} = \left\langle p, v + \frac{\alpha(x-x_0)}{\|x-x_0\|} \right\rangle \leq 0$ lorsque $p \in M_X(x)$. Donc

$\mu(x,v) \leq \frac{-\alpha}{\|x-x_0\|} < 0$. Ceci implique (11).

5. PROPRIÉTÉS DE CONTINUITÉ

Nous allons étudier les propriétés de continuité des différentes correspondances $x \to N_X(x)$, $T_X(x)$, $\partial d_X(x)$, $M_X(x)$, $N_X(x)$ que nous avons définies ci-dessus.

Nous munissons U de la *topologie initiale* et son dual U^* de la *topologie faible*.

Proposition 1. Soit $X \subset U$ un sous-ensemble convexe fermé. Alors la correspondance $x \to N_X(x)$ est fermée et la correspondance $x \to \partial d_X(x)$ est semi-continue supérieurement. Si U est de dimension finie, la correspondance $x \to T_X(x)$ est semi-continue inférieurement.

Démonstration.

a) Montrons que $N_X(\cdot)$ est *fermée*. Considérons une suite généralisée d'éléments (x_n,p_n) du graphe de $N_X(\cdot)$ convergeant vers (x,p) . Soit y un élément arbitraire de X . Les inégalités $<p_n,y> \leq <p_n,x_n>$ impliquent que $<p,y> \leq <p,x>$ puisque p_n converge *faiblement* vers p et x_n converge *fortement* vers x . Donc $p \in N_X(x)$.

b) De même, la correspondance $\partial d_X(\cdot)$ est *fermée* puisque la fonction $Dd_X(x)(v)$ est semi-continue supérieurement par rapport à x et puisque le graphe de $\partial d_X(\cdot)$ est l'ensemble des couples (x,p) tels que $<p,v> - Dd_X(x)(v) \leq 0$ pour tout $v \in U$. D'autre part, les images $\partial d_X(\cdot)$ demeurent dans la boule unité B_* de U^* , qui est *faiblement compacte*. Donc $\partial d_X(\cdot)$ est semi-continue supérieurement.

c) Montrons que $T_X(\cdot)$ est semi-continue inférieurement. Considérons une suite d'éléments $x_n \in X$ convergeant vers $x \in X$ et fixons $v \in T_X(x)$. Puisque $T_X(x_n)$ et $N_X(x_n)$ sont des cônes polaires dans des espaces de dimension finie, on sait que l'on peut écrire v de façon unique sous la forme

$$v = v_n + p_n \quad \text{où} \quad v_n \in T_X(x_n) \ , \quad p_n \in N_X(x_n) \quad \text{et} \quad <p_n,v_n> = 0 \ .$$

Ceci implique que $\|p_n\|_* \leq \|v\|$ et par suite, que l'on peut extraire une sous-suite convergeant vers un élément $p \in U^*$.

Puisque $N_X(\cdot)$ est fermée, on en déduit que $p \in N_X(x)$. Donc une sous-suite de v_n converge vers $v - p$.

Puisque $<p_n,v_n> = 0$, il en résulte que $<p,v> = 0$. Cela implique que $p = 0$ et par suite, que la suite de $v_n \in T_X(x_n)$ converge vers v . Donc $T_X(\cdot)$ est semi-continue inférieurement. □

Proposition 2. Supposons que l'intérieur d'un ensemble convexe fermé X soit non vide. Alors la correspondance $M_X(\cdot)$ est semi-continue supérieurement de X dans U^* (faible) et μ est semi-continue supérieurement sur $\partial X \times U$.

La correspondance $x \to \operatorname{Int} T_X(x)$ est ouverte (au sens où son graphe est ouvert dans $X \times U$) .

Démonstration.

a) Comme les images $M_X(x)$ demeurent dans une boule de rayon $a > 0$, qui est faiblement compacte, il suffit de montrer que $M_X(\cdot)$ est *fermée*. Considérons une suite d'éléments (x_n, p_n) du graphe de $M_X(\cdot)$ convergeant vers (x,p) . Nous savons déjà que $p \in N_X(x)$ puisque $N_X(\cdot)$ est fermée. Puisque x_n converge fortement vers x et p_n converge faiblement vers p , les égalités $\langle p_n, x_n - x_0\rangle = 1$ impliquent que $\langle p, x - x_0\rangle = 1$. Donc $p \in M_X(x)$.

b) Puisque $\mu(x,v)$ est la fonction d'appui de la correspondance semi-continue supérieurement $M_X(\cdot)$, alors $\mu(\cdot,\cdot)$ est semi-continue supérieurement sur $\partial X \times U$. Prenons en effet une suite d'éléments (x_n, v_n) de $\partial X \times U$ convergeant vers un élément (x,v) de $X \times U$. Soit $p_n \in M_X(x_n)$ vérifiant $\langle p_n, v_n\rangle = \mu(x_n, v_n)$. Puisque $M_X(x_n) \subset aB_*$ d'après la *proposition 2* du §4, on peut extraire de p_n une sous-suite convergeant faiblement vers p , qui appartient à $M_X(x)$ d'après la première assertion de la proposition. Puis v_n converge fortement vers v , alors une sous-suite de $\mu(x_n, v_n) = \langle p_n, v_n\rangle$ converge vers $\langle p, v\rangle \leq \mu(x,v)$, ce qui implique que μ est semi-continue supérieurement.

Centre de recherche de mathématiques de la décision
Université Paris IX Dauphine
Paris, France

Manuscrit reçu le 15 janvier 1978.