Ann. Sc. Math. Québec, 1978, vol. II, No 2, pp. 305-309

POLYNÔMES TRIGONOMÉTRIQUES EXTRÉMAUX

Raymond Leblanc

RÉSUMÉ

Soit V l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques à coefficients réels et de degré $\leq n$. Nous présentons une caractérisation des génératrices extrémales du cône T_n des polynômes non négatifs de V. Ce résultat est connu [I, p. 78] mais la preuve que nous proposons est beaucoup plus simple.

Un polynôme trigonométrique de degré n est une expression de la forme

$$P(\theta) = \tfrac{1}{2} a_0 + \Sigma\, a_k \cos k\,\theta + b_k \sin k\,\theta\ ,\ k = 1,2,\ldots,n\ ,$$

où a_0, a_k, b_k sont réels.

Il est bien connu qu'un polynôme trigonométrique de degré n (non identiquement nul) ne peut avoir, sur $[0,2\pi[$, plus de $2n$ zéros.

Définition 1. Un sous-ensemble C dans un espace vectoriel V est un cône si

i) $0 \in C$

ii) $x \in C\ ,\ y \in C \Rightarrow x + y \in C$

iii) $\lambda > 0\ ,\ x \in C \Rightarrow \lambda x \in C$

Définition 2. Dans un cône C, une demi-droite $D \subseteq C$ est une génératrice extrémale si

$$(x \in D \;,\; x = y + z \;,\; y \in C \;,\; z \in C) \Rightarrow y \in D \;,\; z \in D \;.$$

Dans cet article nous proposons une caractérisation des génératrices extrémales de T_n où

$$T_n = \{P(\theta) \;:\; P(\theta) \geq 0 \;,\; \text{degré de } \; P \leq n\}$$

est le cône des polynômes trigonométriques non négatifs dans l'espace vectoriel V des polynômes trigonométriques de degré $\leq n$. Nous dirons que $P \in T_n$ est extrémal si P appartient à une génératrice extrémale de T_n . Pour les systèmes de Tchebycheff généraux, on connaît une caractérisation des génératrices extrémales de leur cône positif [1, p. 78] mais la preuve que nous proposons ici pour le cône particulier T_n est beaucoup plus simple et présente un intérêt propre.

Théorème. Un polynôme trigonométrique $P \in T_n$ est extrémal si et seulement si

$$P(\theta) = \alpha \,\Pi\, (1 - \cos\,(\theta - \alpha_i)) \;,\; i = 1,2,\ldots,n \;,$$

où $\alpha_i \in [0,2\pi[$, $\alpha > 0$.

Preuve. (=>) .

Soit $P \in T_n$, un polynôme extrémal. Alors P est de degré n nécessairement. Car sinon

$$P(\theta) = \tfrac{1}{2}\,(1 + \cos\,\theta)\; P(\theta) + \tfrac{1}{2}\,(1 - \cos\,\theta)\; P(\theta)$$

où $\lambda\, P(\theta) \neq (1 \pm \cos\,\theta)\; P(\theta) \in T_n$, contredisant le fait que P est extrémal. De plus P possède au moins un zéro puisque si $P(\theta) > 0$, on peut trouver un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout réel λ on ait

$$\lambda\; P(\theta) \neq (P(\theta) \pm \varepsilon) \in T_n$$

et

$$P(\theta) = \tfrac{1}{2}\,(P(\theta) + \varepsilon) + \tfrac{1}{2}\,(P(\theta) - \varepsilon)$$

contredisant de nouveau le fait que P est extrémal.

A l'aide d'un théorème généralisé sur les maxima et minima, on sait que si

$$P \geq 0 \quad \text{et} \quad P(\alpha) = 0 \quad \text{pour un} \quad \alpha \in [0,2\pi[$$

alors

$$P(\alpha) = P^1(\alpha) = \ldots = P^{2k-1}(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad P^{2k}(\alpha) \neq 0$$

pour un certain entier k . P étant analytique on a aussi

$$P(\theta) = A(\theta - \alpha)^{2k} + \mathcal{O}((\theta - \alpha)^{2k+1}) \ , \quad A \neq 0 \ .$$

Sans perdre de généralité pour la suite on suppose $\alpha = 0$. Alors

$$(1) \quad \lim_{\theta\to 0} \frac{P(\theta)}{\theta^{2k}} = A > 0 \ .$$

Posons $Q(\theta) = (1 - \cos\theta)^k$. Alors

$$(2) \quad \lim_{\theta\to 0} \frac{Q(\theta)}{\theta^{2k}} = \lim_{\theta\to 0} \left(\frac{1 - \cos\theta}{\theta^2}\right)^k = \frac{1}{2^k} \ .$$

Soit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\ell$ les zéros distincts de $P(\alpha)$ dans $[0,2\pi[$, et posons

$$Q^*(\theta) = \Pi\ (1 - \cos\ (\theta - \alpha_i))^{k_i} \ , \quad i = 1,2,\ldots,\ell$$

où $2k_i$ est la multiplicité du zéro α_i . Ainsi $P(\theta)$ et $Q^*(\theta)$ appartiennent tous deux à T_n et à l'aide de (1) et (2), on obtient que la fonction $\phi(\theta)$ définie sur $\{\theta \in R : Q^*(\theta) \neq 0\}$ par

$$\phi(\theta) = P(\theta)/Q^*(\theta)$$

peut être prolongée en une fonction continue sur R , strictement positive, qui atteint donc son minimum $\lambda > 0$. Nous avons alors la représentation suivante

$$P(\theta) = \lambda\, Q^*(\theta) + (P(\theta) - \lambda\, Q^*(\theta))$$

et P étant extrémal, on conclut que le degré de Q^* est n et que $P(\theta) = \alpha\, Q^*(\theta)$, $\alpha > 0$.

(<=) Il est facile de vérifier que si $P \geq 0$ possède $2n$ zéros sur $[0,2\pi[$ alors P est extrémal parce que si $P = P_1 + P_2$, $P_1 \geq 0$, $P_2 \geq 0$ et si α est un zéro de P d'ordre k alors

$$0 \leq P_1 \leq P = A((\theta - \alpha)^k) + \mathcal{O}((\theta - \alpha)^{k+1})$$

et par la règle de l'Hospital il s'ensuit que

$$P_1(\alpha) = P_1'(\alpha) = \dots = P^{k-1}(\alpha) = 0 .$$

Ainsi α est aussi un zéro de P_1 d'ordre au moins égal à k . Le même argument s'applique à P_2 et alors P , P_1 , P_2 ont les mêmes $2n$ zéros. Donc

$$P_1 = \lambda_1 P , \quad P_2 = \lambda_2 P , \quad \lambda_1 > 0 , \quad \lambda_2 > 0 .$$

Q.E.D.

Puisque $T_n \cap -T_n = \{0\}$, par [3, p. 167], on obtient

Corollaire. Si $P \in T_n$, alors

$$P(\theta) = \Sigma \lambda_i Q_i(\theta) , \quad i = 1,2,\dots,m ,$$

où $\lambda_i > 0$, $\Sigma \lambda_i = 1$ et Q_i est extrémal dans T_n .

Pour le système de Tchebycheff $\{1,t,\dots,t^n\}$ un résultat analogue au théorème de la page 2 est présenté dans [2].

REMERCIEMENT

Je tiens à exprimer ma gratitude au professeur S. Dubuc pour ses nombreuses suggestions dans ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

[1] KARLIN, S. et STUDDEN, J.W., Tchebycheff Systems: With Applications in Analysis and Statistics, John Wiley, 1966.

[2] LEBLANC, R., Représentation des Polynômes Positifs sur [-1,1] , Can. Math. Bull., Vol. 15, pp. 601-602.

[3] ROCKAFELLAR, R.T., Convex Analysis, Princeton University Press, 1970.

Département de Mathématiques
Université du Québec à Trois-Rivières
C.P. 500
Trois-Rivières, Québec
Canada
G9A 5H7

Manuscrit reçu le 6 avril 1977.
Révisé le 20 juin 1977.