Ann. Sc. Math. Québec, 1978, vol. II, No 2, pp. 253-280

D-ALGÈBRES ET THÉORÈME DE BECK GÉNÉRALISÉ

Richard Bertrand

1. INTRODUCTION

Au cours de cet article, on a voulu étudier la situation suivante: étant donné une adjonction $<F,G,\eta,\varepsilon> : X \to A$, le triple engendré $T = <GF,\eta,G\varepsilon F>$, un triple $<T',\eta',\mu'>$ sur X et une loi distributive $\mathbb{D} : T \to T'$, existe-t-il une adjonction $<-,-,-,-> : X \to \mathrm{Alg}\ \mathbb{D}$, où $\mathrm{Alg}\ \mathbb{D}$ est une certaine catégorie ayant pour objets les $\mathbb{D}$-algèbres, et un foncteur $\mathbb{K} : A \to \mathrm{Alg}\ \mathbb{D}$ (de comparaison!) ?

De plus, si ce dernier foncteur existe, quelles seraient les conditions nécessaires et suffisantes, sur le foncteur G et le triple T' , pour qu'il devienne un isomorphisme.

D'autre part, l'appendice présente deux nouvelles façons (plus courtes!) d'envisager la preuve de l'unicité du foncteur de comparaison canonique K des T-algèbres, et une application d'une de ces façons au théorème 3.

2. NOTATIONS ET DÉFINITIONS PRÉLIMINAIRES

Définition 1. On dit qu'un système $<T,\eta,\mu>$ est un triple dans une catégorie X , si $T : X \to X$ est un endofoncteur, $\eta : I_X \to T$ et $\mu : T^2 \to T$ sont des transformations naturelles telles que:

$$\mu \cdot \eta T = 1_T \quad (T_1) \quad , \quad \mu \cdot T\eta = 1_T \quad (T_2) \quad \text{et} \quad \mu \cdot \mu T = \mu \cdot T\mu \quad (T_3)$$

Subventionné par le Conseil national de recherches du Canada.

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\eta T"] \arrow[dr, "1_T"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\ & T \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T \arrow[r, "T\eta"] \arrow[dr, "1_T"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\ & T \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T^3 \arrow[r, "\mu T"] \arrow[d, "T\mu"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\ T^2 \arrow[r, "\mu"'] & T \end{tikzcd}$$

◁

Notons [4] que chaque adjonction $\langle F,G,\eta,\varepsilon\rangle : X \to C$ donne lieu à un triple $\langle GF,\eta,\ G\varepsilon F\rangle$ dans X .

Définition 2. Etant donné un triple $\langle T,\eta,\mu\rangle$ sur X , on appelle <u>T-algèbre</u>, un couple (h,x) formé d'un objet $x \in |X|$ et d'une flèche $h : T(x) \to x$ dans X telle que:

$$h \cdot \eta x = \mathrm{id}\ x \quad (A_1) \qquad \text{et} \quad h \cdot T(h) = h \cdot \mu x \quad (A_2)$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\eta x"] \arrow[dr, "\mathrm{id}\ x"'] & T(x) \arrow[d, "h"] \\ & x \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T^2(x) \arrow[r, "T(h)"] \arrow[d, "\mu x"'] & T(x) \arrow[d, "h"] \\ T(x) \arrow[r, "h"'] & x \end{tikzcd}$$

◁

Alg T est la catégorie usuelle des T-algèbres et Kl T la catégorie de Kleisli où la loi de composition, pour deux flèches quelconques f et g , est notée $f \circ g$.

Soit donné deux triples $\langle T,\eta,\mu\rangle$, $\langle T',\eta',\mu'\rangle$ sur une catégorie X .

Définition 3. Une <u>loi distributive</u> [1], $\mathbb{D} : T \to T'$ est une transformation naturelle $D : T \cdot T' \to T' \cdot T$ telle que

$$D \cdot T\eta' = \eta' T \quad (D_1) \quad , \quad \mu' T \cdot T' D \cdot D T' = D \cdot T\mu' \quad (D_2) \quad ,$$

$$D \cdot \eta T' = T'\eta \quad (D_3) \quad \text{et} \quad T'\mu \cdot DT \cdot TD = D \cdot \mu T' \quad (D_4)$$

$$
\begin{tikzcd}
T' \arrow[d, "\eta T'"'] \arrow[dr, "T'\eta"] & \\
TT' \arrow[r, "D"] & T'T \\
T \arrow[u, "T\eta'"] \arrow[ur, "\eta' T"'] &
\end{tikzcd}
\quad , \quad
\begin{tikzcd}
TT'T' \arrow[r, "DT'"] \arrow[d, "T\mu'"'] & T'TT' \arrow[r, "T'D"] & T'T'T \arrow[d, "\mu' T"] \\
TT' \arrow[rr, "D"] & & T'T \\
TTT' \arrow[u, "\mu T'"] \arrow[r, "TD"'] & TT'T \arrow[r, "DT"'] & T'TT \arrow[u, "T'\mu"']
\end{tikzcd}
$$

◁

Définition 4. Si $\mathbb{D} : T \to T'$ est une loi distributive sur X , on appelle <u>D-algèbre</u> [2], un couple (b,x) , où $x \in |X|$, $b : T(x) \to T'(x)$ est une flèche de X telle que

$$b \cdot \eta x = \eta' x \qquad (A_1') \qquad \text{et} \qquad b \cdot \mu x = \mu' x \cdot T'(b) \cdot D_x \cdot T(b) \qquad (A_2')$$

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "\eta x"] \arrow[dr, "\eta' x"'] & T(x) \arrow[d, "b"] \\
& T'(x)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
TT(x) \arrow[r, "\mu x"] \arrow[d, "T(b)"'] & T(x) \arrow[r, "b"] & T'(x) \\
TT'(x) \arrow[r, "D_x"'] & T'T(x) \arrow[r, "T'(b)"'] & T'T'(x) \arrow[u, "\mu' x"']
\end{tikzcd}
$$

◁

Exemples.

1) Si T' est le triple identité sur X et $\mathbb{D}$ est déterminée par la transformation naturelle identique sur T , 1_T , alors une $\mathbb{D}$-algèbre est une T-algèbre.

Dans ce qui suit, on fait $X = ENS$, la catégorie des "petits" ensembles.

2) Pour $T = (-) \times m$ le triple des actions d'un monoïde m à droite on a toujours une loi distributive, de $(-) \times m$ vers n'importe quel triple T' sur ENS ([1]) , définie par

$$\begin{aligned} Dx : T'(x) \times m &\to T'(x \times m) \\ (\omega, \alpha) &\mapsto T'(h_\alpha)(\omega) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} h_\alpha : x &\to x \times m \\ \xi &\mapsto (\xi, \alpha) \ . \end{aligned}$$

En particulier pour $T' = m' \times (-)$, le triple des actions, d'un monoïde m' , à gauche, alors [2] l'isomorphisme $(m'\times x) \times m \cong m' \times (x\times m)$ pour chaque $x \in |ENS|$ détermine une loi distributive $\mathbb{D} : (-) \times m \to m' \times (-)$ et les $\mathbb{D}$-algèbres sont les automates avec entrée et sortie.

3) Si on fait $T = (-) \times m$ et $T' = P$, le triple des parties, la loi distributive engendrée par les applications:

$$D_e : P(e) \times m \to P(e\times m)$$

$$(e_1,\alpha) \mapsto \{(s,\alpha) \mid s \in e_1\}$$

donne lieu à des $\mathbb{D}$-algèbres connues sous le nom d'automates non déterministiques ([2]).

4) En gardant $T' = P$, si on prend pour T , le triple monoïde libre, alors pour chaque ensemble e , on a une fonction

$$D_e : \quad TP(e) \to PT(e)$$

$$e_1\ldots e_n \mapsto \{(\alpha_1\ldots\alpha_n) \mid \alpha_i \in e_i\}$$

qui définit une loi distributive et les $\mathbb{D}$-algèbres sont les monoïdes non déterministiques ([2]).

3. LA CATÉGORIE DES $\mathbb{D}$-ALGÈBRES

Dans ce paragraphe, on s'est efforcé de trouver une catégorie de $\mathbb{D}$-algèbres satisfaisante pour notre étude ultérieure.

On va donc définir une catégorie, Alg $\mathbb{D}$ où les flèches $f : x \to x'$ dans $K\ell\ T'$ telles que $f \circ b = b' \circ (D_{x'}\cdot T(f))$ seront les flèches

$$f : (b,x) \to (b',x') \quad \text{dans Alg } \mathbb{D}$$

i.e. les flèches $f : x \to T'(x')$ dans X telles que

$$\mu'x' \cdot T'(f) \cdot b = \mu'x' \cdot T'(b') \cdot D_{x'} \cdot T(f) .$$

$$\begin{tikzcd}
T(x) \arrow[r, "b"] \arrow[d, "T(f)"'] & T'(x) \arrow[rr, "T'(b)"] & & T'T'(x') \arrow[d, "\mu' x'"] \\
TT'(x) \arrow[r, "D_{x'}"'] & T'T(x') \arrow[r, "T'(b')"'] & T'T'(x') \arrow[r, "\mu' x'"'] & T'(x')
\end{tikzcd}$$

Cette définition provenant du fait ([2]) que l'existence d'une loi distributive $\mathbb{D} : T \to T'$ est équivalente à la donnée d'un triple $\widetilde{T}$ sur $K\ell\, T'$ qui prolonge T. Une $\mathbb{D}$-algèbre étant une $\widetilde{T}$-algèbre, on a donc défini un morphisme entre ces $\mathbb{D}$-algèbres comme une flèche dans $\mathrm{Alg}\, \widetilde{T}$.

On a des foncteurs:

$$\widetilde{G}_{\mathbb{D}} : \mathrm{Alg}\, \mathbb{D} \longrightarrow \mathrm{Alg}\, T$$

$$\begin{tikzcd}
(b,x) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & (\mu' x \cdot T'(b) \cdot D_x \,,\, T'(x)) \arrow[d, "\mu' x' \cdot T'(f)"] \\
(b',x') \arrow[r, mapsto] & (\mu' x' \cdot T'(b') \cdot D_{x'} \,,\, T'(x'))
\end{tikzcd}$$

et

$$\widetilde{F}_{\mathbb{D}} : \mathrm{Alg}\, T \longrightarrow \mathrm{Alg}\, \mathbb{D}$$

$$\begin{tikzcd}
(h,x) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & (\eta' x \cdot h \,,\, x) \arrow[d, "\eta' x' \cdot f"] \\
(h',x') \arrow[r, mapsto] & (\eta' x' \cdot h' \,,\, x')
\end{tikzcd}$$

Proposition 1. $\widetilde{F}_{\mathbb{D}}$ est l'adjoint à gauche de $\widetilde{G}_{\mathbb{D}}$.

Démonstration. Pour chaque T-algèbre (h,x), on a une $\mathbb{D}$-algèbre $\widetilde{F}_{\mathbb{D}}(h,x)$ et une flèche

$$\widetilde{\eta}'(h,x) = \eta' x : (h,x) \to \widetilde{G}_{\mathbb{D}}(\widetilde{F}_{\mathbb{D}}(h,x)) = (T'(h) \cdot D_x \,,\, T'(x)) \quad \text{dans } \mathrm{Alg}\, T\,,$$

car

$$\eta'_x \cdot h = T'(h) \cdot \eta'_{T(x)} \overset{D_1}{=} T'(h) \cdot D_x \cdot T(\eta'_x)\,.$$

Montrons que chaque $\eta' x$ est universelle de (h,x) vers $\widetilde{G}_{\mathbb{D}}$.

Pour toute flèche $f : (h,x) \to \widetilde{G}_{\mathbb{D}}(\bar{b},\bar{x}) = (\mu'\bar{x} \cdot T'(\bar{b}) \cdot D_{\bar{x}} , T'(\bar{x}))$ dans Alg T ; i.e. $f : x \to T'(\bar{x})$ dans X avec $f \cdot h = \mu'\bar{x} \cdot T'(\bar{b}) \cdot D_{\bar{x}} \cdot T(f)$, on a:

$$\mu'\bar{x} \cdot T'(f) \cdot \eta' x \cdot h = \mu'\bar{x} \cdot \eta'_{T'(\bar{x})} \cdot f \cdot h \overset{T_1}{=} f \cdot h = \mu'\bar{x} \cdot T'(\bar{b}) \cdot D_{\bar{x}} \cdot T(f) .$$

Donc $f : \widetilde{F}_{\mathbb{D}}(h,x) = (\eta' x \cdot h , x) \to (\bar{b},\bar{x})$ est dans Alg $\mathbb{D}$. De plus,

$$\widetilde{G}_{\mathbb{D}}(f) \cdot \eta' x = \mu'\bar{x} \cdot T'(f) \cdot \eta' x = \mu'\bar{x} \cdot \eta'_{T'(\bar{x})} \cdot f \overset{T_1}{=} f$$

et s'il existe $f' : (\eta' x \cdot h , x) \to (\bar{b},\bar{x})$ dans Alg $\mathbb{D}$ avec $\widetilde{G}_{\mathbb{D}}(f') \cdot \eta' x = f$, alors

$$f' \overset{T_1}{=} \mu'\bar{x} \cdot \eta'_{T'(\bar{x})} \cdot f' = \mu'\bar{x} \cdot T'(f') \cdot \eta' x = \widetilde{G}_{\mathbb{D}}(f') \cdot \eta' x = f .$$

D'où f est l'unique flèche de Alg $\mathbb{D}$ qui fait commuter le diagramme:

$$\begin{tikzcd}
(h,x) \arrow[r, "\eta' x"] \arrow[dr, "f"'] & \widetilde{G}_{D}(\eta' x \cdot h , x) \arrow[d, "\widetilde{G}_{\mathbb{D}}(f)"] \\
& \widetilde{G}_{\mathbb{D}}(\bar{b},\bar{x})
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\widetilde{F}_{D}(h,x) = (\eta' x \cdot h , x) \arrow[d, dashed, "f"] \\
(\bar{b},\bar{x})
\end{tikzcd}$$

Q.E.D.

Remarque. De l'adjonction $\langle \widetilde{F}_{\mathbb{D}},\widetilde{G}_{\mathbb{D}},\widetilde{\eta}',\widetilde{\varepsilon}' \rangle : \text{Alg } T \to \text{Alg } \mathbb{D}$, on obtient un triple $\langle \widetilde{T}',\widetilde{\eta}',\widetilde{\mu}' \rangle$ dans Alg T qui est le même que celui défini par J. Beck [1]: i.e.

$$\widetilde{T}' : \text{Alg } T \longrightarrow \text{Alg } T$$

$$\begin{tikzcd}
(h,x) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & (T'(h) \cdot D_x , T'(x)) \arrow[d, "T'(f)"] \\
(h',x') \arrow[r, mapsto] & (T'(h') \cdot D_{x'} , T'(x'))
\end{tikzcd}$$

De plus $\widetilde{T}'$ relève T' , dans le sens que $G^T\widetilde{T}' = T'G^T$, $G^T\widetilde{\eta}' = \eta' G^T$ et $G^T\widetilde{\mu}' = \mu' G^T$.

4. COMPARAISON DE D-ALGEBRES

On a ainsi obtenu, au paragraphe précédent, une adjonction:

$$\mathrm{Alg}\ \mathbb{D} \underset{\widetilde{F}_{\mathbb{D}}}{\overset{\widetilde{G}_{\mathbb{D}}}{\rightleftarrows}} \mathrm{Alg}\ T \underset{F^T}{\overset{G^T}{\rightleftarrows}} X \ .$$

On veut maintenant définir un foncteur $\mathbb{K} : A \to \mathrm{Alg}\ \mathbb{D}$ qui prolonge l'unique foncteur de comparaison canonique $K : A \to \mathrm{Alg}\ T$, où $T = \langle GF,\eta,\ G\varepsilon F\rangle$ provient de l'adjonction $\langle F,G,\eta,\varepsilon\rangle : X \to A$.

Définition 5. Soit donné deux adjonctions $\langle F,G,\eta,\varepsilon,\phi\rangle : X \to A$, $\langle \overline{F},\overline{G},\overline{\eta},\overline{\varepsilon},\overline{\phi}\rangle : \overline{X} \to \overline{A}$ et un triple $\langle T',\eta',\mu'\rangle$ sur X ; on définit une <u>T'-application d'adjonctions</u> comme étant un couple de foncteurs $H : A \to \overline{A}$, $L : X \to \overline{X}$ tel que les diagrammes suivants commutent

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "G"] \arrow[dd, "H"'] & X \arrow[d, "T'"] & \\
 & X \arrow[r, "F"] \arrow[d, "L"] & A \arrow[d, "H"] \\
\overline{A} \arrow[r, "\overline{G}"'] & \overline{X} \arrow[r, "\overline{F}"'] & \overline{A}
\end{tikzcd} \qquad \mathrm{I}$$

$$\begin{tikzcd}
A(F(x),a) \arrow[r, "\phi_{x,a}"] \arrow[dd, "H_{F(x),a}"'] & X(x,G(a)) \arrow[d, "X(x,\eta'_{G(a)})"] \\
 & X(x,T'G(a)) \arrow[d, "L_{x,T'G(a)}"] \\
\overline{A}(HF(x),H(a)) \arrow[d, equal] & \overline{X}(L(x),LT'G(a)) \arrow[d, equal] \\
\overline{A}(\overline{F}L(x),H(a)) \arrow[r, "\overline{\Phi}_{L(x),H(a)}"'] & \overline{X}(L(x),\overline{G}H(a))
\end{tikzcd} \qquad \mathrm{II}$$

pour chaque $x \in |X|$, $a \in |A|$ où ϕ et $\overline{\Phi}$ sont les bijections naturelles canoniques provenant des adjonctions.

◁

On remarque si $T' = I_X$ le triple identité sur X, alors on retrouve la définition d'application d'adjonctions au sens de [4].

Proposition 2. Etant donné deux adjonctions $\langle F,G,\eta,\varepsilon,\phi\rangle : X \to A$ et $\langle\overline{F},\overline{G},\overline{\eta},\overline{\varepsilon},\overline{\phi}\rangle : \overline{X} \to \overline{A}$, un triple $\langle T',\eta',\mu'\rangle$ sur X et deux foncteurs $H : A \to \overline{A}$, $L : X \to \overline{X}$ vérifiant (I). Alors on a les équivalences suivantes:

$$\text{(II)} \iff L(\eta' \circ \eta) = \overline{\eta}L \quad \text{(III)} \iff \overline{\varepsilon}H \cdot HF\eta'G = H\varepsilon \quad \text{(IV)} .$$

Démonstration.

1) (II) => (III) .

Si on fait $a = F(x)$ dans (II), on obtient:

$$\begin{aligned}
(L(\eta' \circ \eta))x = L(\eta'_{T(x)} \cdot \eta x) &= L_{x,T'T(x)} \cdot X(x,\eta'_{T(x)})(\eta x) \\
&= L_{x,T'T(x)} \cdot X(x,\eta'_{T(x)}) \cdot \phi_{x,F(x)}(id_{F(x)}) \\
&\overset{II}{=} \overline{\phi}_{L(x),HF(x)} \cdot H_{F(x),F(x)}(id_{F(x)}) \\
&= \overline{\phi}(id_{HF(x)}) \overset{I}{=} \overline{\phi}(id_{\overline{F}L(x)}) = \overline{\eta}_{L(x)}
\end{aligned}$$

pour chaque $x \in |X|$.

2) (III) => (II) .

Soit $f : F(x) \to a$ une flèche dans A . Alors

$$\begin{aligned}
L_{x,T'G(a)} \cdot X(x,\eta'_{G(a)}) \cdot \phi_{x,a}(f) &= L_{x,T'G(a)} \cdot X(x,\eta'_{G(a)}) \cdot (G(f) \cdot \eta x) \\
&= L(\eta'_{G(a)} \cdot G(f) \cdot \eta x) \\
&= LT'G(f) \cdot L((\eta' \circ \eta)x) \overset{I}{=} \overline{G}H(f) \cdot (L(\eta' \circ \eta))x \\
&\overset{III}{=} \overline{G}(H(f)) \cdot \overline{\eta}_{L(x)} \\
&= \overline{\phi}_{L(x),H(a)} \cdot H_{F(x),a}(f) .
\end{aligned}$$

3) (II) => (IV) .

Pour $x = G(a)$ dans (II) , on a:

$$\bar{\varepsilon}_{H(a)} \cdot HF(\eta'_{G(a)}) \overset{\mathrm{I}}{=} \bar{\varepsilon}_{H(a)} \cdot \bar{F}L(\eta'_{G(a)})$$
$$= \bar{\phi}^{-1}_{LG(a),H(a)} \, (L(\eta'_{G(a)}))$$
$$= \bar{\phi}^{-1}_{LG(a),H(a)} \cdot L_{G(a),T'G(a)} \cdot X(G(a),\eta'_{G(a)}) \cdot (id_{G(a)})$$
$$\overset{\mathrm{II}}{=} H_{FG(a),a} \cdot \phi^{-1}_{G(a),a} \cdot (id_{G(a)}) = (H\varepsilon)_a$$

pour tout $a \in |A|$.

4) (IV) => (II) .

Soit $g : x \to G(a)$ un élément de $X(x,G(a))$. Alors:

$$\bar{\phi}^{-1}_{L(x),H(a)} \cdot L_{x,T'G(a)} \cdot X(x,\eta'_{G(a)})(g) = \bar{\phi}^{-1}_{L(x),H(a)} \, (L(\eta'_{G(a)} \cdot g))$$
$$= \bar{\varepsilon}_{H(a)} \cdot \bar{F}(L(\eta'_{G(a)} \cdot g))$$
$$\overset{\mathrm{I}}{=} \bar{\varepsilon}_{H(a)} \cdot HF(\eta'_{G(a)}) \cdot HF(g)$$
$$\overset{\mathrm{IV}}{=} H(\varepsilon_a \cdot F(g))$$
$$= H_{F(x),a} \cdot \phi^{-1}_{x,a} \, (g) \ .$$

Q.E.D.

Remarque. La proposition 2 reste valide si on remplace la donnée d'un triple $<T',\eta',\mu'>$ sur X par celle d'un couple $<T',\eta'>$ formé d'un endofoncteur $T' : X \to X$ et d'une transformation naturelle $\eta' : I_X \to T'$. C. Ehresmann a appelé ces couples $<T',\eta'>$ des foncteurs naturalisés [3].

Théorème 3. Etant donné une adjonction $<F,G,\eta,\varepsilon> : X \to A$ avec triple sous-jacent $T = <GF,\eta, G\varepsilon F>$, et une loi distributive $\mathbb{D} : T \to T'$ telle que l'endofoncteur du triple $<T',\eta',\mu'>$ soit injectif sur les objets. Alors il existe un unique foncteur $\mathbb{K} : A \to \mathrm{Alg}\,\mathbb{D}$ tel que $G^T\widetilde{G}_{\mathbb{D}}\mathbb{K} = T'G$ et $\mathbb{K}F = \widetilde{F}_{\mathbb{D}}F^T$.

On appelle $\mathbb{K}$ un foncteur de <u>T'-comparaison</u>.

Démonstration. Définissons $\mathbb{K} = \widetilde{F}_{\mathbb{D}}K$, où $K : A \to \mathrm{Alg}\,T$ est l'unique foncteur de comparaison canonique $(G^TK = G\,,\ KF = F^T)$:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\mathbb{K}"] \arrow[dr, dashed, "K"] \arrow[dd, shift right, "F"'] & & \mathrm{Alg}\,\mathbb{D} \arrow[dl, shift left, "\widetilde{G}_{\mathbb{D}}"] \\
& \mathrm{Alg}\,T \arrow[ur, shift left, "\widetilde{F}_{\mathbb{D}}"] \arrow[dl, shift left, "G^T"] & \\
X \arrow[uu, shift right, "G"'] \arrow[ur, shift left, "F^T"] & &
\end{tikzcd}$$

On a: $\mathbb{K}F = \widetilde{F}_{\mathbb{D}}KF = \widetilde{F}_{\mathbb{D}}F^T$, et en se souvenant de la remarque qui suit la proposition 1

$$G^T\widetilde{G}_{\mathbb{D}}\mathbb{K} = G^T\widetilde{G}_{\mathbb{D}}\widetilde{F}_{\mathbb{D}}K = G^T\widetilde{T}'K = T'G^TK = T'G\ .$$

Montrons que $\mathbb{K}$ est unique avec ces propriétés.

Soit $\mathbb{K}_1 : A \to \mathrm{Alg}\,\mathbb{D}$ avec $\mathbb{K}_1F = \widetilde{F}_{\mathbb{D}}F^T$ et $G^T\widetilde{G}_{\mathbb{D}}\mathbb{K}_1 = T'G$. Alors, pour chaque $a \in |A|$, $\mathbb{K}_1(a) = (b,x)$ est une $\mathbb{D}$-algèbre et comme

$$T'(x) = G^T(\mu'_x \cdot T'(b) \cdot Dx\,,\ T'(x)) = G^T\widetilde{G}_{\mathbb{D}}(b,x) = G^T\widetilde{G}_{\mathbb{D}}\mathbb{K}_1(a) = T'G(a)$$

on a $x = G(a)$, T' étant injectif sur les objets.

De plus, pour $f : a \to \overline{a}$ dans A ,

$$\begin{aligned}
\mathbb{K}(f) = \widetilde{F}_{\mathbb{D}}K(f) = \widetilde{F}_{\mathbb{D}}(G(f)) &= \eta'_{G(\overline{a})} \cdot G(f) \\
&= T'G(f) \cdot \eta'_{G(a)} \\
&= G^T\widetilde{G}_{\mathbb{D}}\mathbb{K}_1(f) \cdot \eta'_{G(a)} \\
&= G^T(\mu'_{G(\overline{a})} \cdot T'(\mathbb{K}_1(f))) \cdot \eta'_{G(a)} \\
&= \mu'_{G(\overline{a})} \cdot T'(\mathbb{K}_1(f)) \cdot \eta'_{G(a)}
\end{aligned}$$

$$= \mu'_{G(\overline{a})} \cdot \eta'_{T'G(\overline{a})} \cdot \mathbb{K}_1(f) \overset{T_1}{=} \mathbb{K}_1(f) \; .$$

Il reste à prouver que $b = \eta'_{G(a)} \cdot G(\varepsilon a)$.

Or, on a deux adjonctions $<F,G,\eta,\varepsilon> : X \to A$ et $<\widetilde{F}_{\mathbb{D}} \cdot F^T, G^T\widetilde{G}_{\mathbb{D}}, G^T\widetilde{\eta}'F^T \cdot \eta, \widetilde{\varepsilon}' \cdot \widetilde{F}_{\mathbb{D}}\varepsilon^T\widetilde{G}_{\mathbb{D}}> : X \to \mathrm{Alg}\,\mathbb{D}$; cette dernière étant la composition des adjonctions $<\widetilde{F}_{\mathbb{D}},\widetilde{G}_{\mathbb{D}},\widetilde{\eta}',\widetilde{\varepsilon}'> : \mathrm{Alg}\,T \to \mathrm{Alg}\,\mathbb{D}$ et $<F^T,G^T,\eta^T,\varepsilon^T> : X \to \mathrm{Alg}\,T$.

On a aussi un triple $<T',\eta',\mu'>$ sur X et deux foncteurs $\mathbb{K}_1 : A \to \mathrm{Alg}\,\mathbb{D}$, $I_X : X \to X$ vérifiant

$$I_X(T'G) = (G^T\widetilde{G}_{\mathbb{D}}) \cdot \mathbb{K}_1 \, , \mathbb{K}_1F = (\widetilde{F}_{\mathbb{D}}F^T) \cdot I_X \qquad \text{I}$$

et

$$I_X(\eta' \circ \eta) = \eta'T \cdot \eta = \eta'G^TF^T \cdot \eta = ((G^T\widetilde{\eta}'F^T) \cdot \eta)I_X \quad . \qquad \text{III}$$

Ainsi, la proposition 2 nous assure que les foncteurs $\mathbb{K}_1 : A \to \mathrm{Alg}\,\mathbb{D}$ et $I_X : X \to X$ définissent une T'-application d'adjonctions et aussi que

$$\mathbb{K}_1\varepsilon = (\widetilde{\varepsilon}' \cdot \widetilde{F}_{\mathbb{D}}\varepsilon^T\widetilde{G}_{\mathbb{D}})\mathbb{K}_1 \cdot \mathbb{K}_1F\eta'G \; . \qquad \text{IV}$$

D'autre part,

$$\widetilde{\varepsilon}'_{\mathbb{K}_1(a)} : \widetilde{F}_{\mathbb{D}}\widetilde{G}_{\mathbb{D}}(\mathbb{K}_1(a)) = (\eta'_{T'G(a)} \cdot \mu'_{G(a)} \cdot T'(b) \cdot D_{G(a)} \, , T'G(a)) \to \mathbb{K}_1(a) = (b,G(a))$$

est, par définition de co-unité, l'unique morphisme de $\mathbb{D}$-algèbres tel que:

$$\widetilde{G}_{\mathbb{D}}(\widetilde{\varepsilon}'_{\mathbb{K}_1(a)}) \cdot \widetilde{\eta}'_{\widetilde{G}_{\mathbb{D}}\mathbb{K}_1(a)} = id_{\widetilde{G}_{\mathbb{D}}\mathbb{K}_1(a)} \; .$$

Et puisque

$$\mu'_{G(a)} \cdot T'(id_{T'G(a)}) \cdot (\eta'_{T'G(a)} \cdot \mu'_{G(a)} \cdot T'(b) \cdot D_{G(a)}) \overset{T_1}{=} (\mu'_{G(a)} \cdot T'(b) \cdot D_{G(a)}) \cdot T(id_{T'G(a)}) \, ,$$

alors $id_{T'G(a)} : T'G(a) \to G(a)$ dans $K\ell\, T'$ est une flèche de $\mathrm{Alg}\,\mathbb{D}$, ayant pour source $\widetilde{F}_{\mathbb{D}}\widetilde{G}_{\mathbb{D}}\mathbb{K}_1(a)$ et pour but $\mathbb{K}_1(a)$, telle que:

$$\widetilde{G}_{\mathbb{D}}(id_{T'G(a)}) \cdot \widetilde{\eta}'_{\widetilde{G}_{\mathbb{D}}\mathbb{K}_1(a)} = \widetilde{G}_{\mathbb{D}}(id_{T'G(a)}) \cdot \widetilde{\eta}'_{(\mu'_{G(a)} \cdot T'(b) \cdot D_{G(a)}, T'G(a))}$$
$$= \widetilde{G}_{\mathbb{D}}(id_{T'G(a)}) \cdot \eta'_{T'G(a)}$$
$$= \mu'_{G(a)} \cdot T'(id_{T'G(a)}) \cdot \eta'_{T'G(a)}$$
$$\overset{T_1}{=} id_{T'G(a)} = id_{\widetilde{G}_{\mathbb{D}}\mathbb{K}_1(a)} .$$

D'où, pour chaque $a \in |A|$, $\widetilde{\varepsilon}'_{\mathbb{K}_1(a)} = id_{T'G(a)}$.

Ainsi, comme $\mathbb{K}$ est identique à $\mathbb{K}_1$, sur les flèches, on a:

$$\eta'_{G(a)} \cdot G(\varepsilon_a) = \widetilde{F}_{\mathbb{D}}K(\varepsilon_a) = \mathbb{K}(\varepsilon_a)$$
$$= \mathbb{K}_1(\varepsilon_a)$$
$$\overset{IV}{=} (id_{T'G(a)} \circ \widetilde{F}_{\mathbb{D}}(\varepsilon^T_{(\mu'G(a) \cdot T'(b) \cdot D_{G(a)}, T'G(a))}) \circ \widetilde{F}_{\mathbb{D}}F^T(\eta'_{G(a)})$$
$$= (id_{T'G(a)} \circ (\eta'_{T'G(a)} \cdot \mu'_{G(a)} \cdot T'(b) \cdot D_{G(a)})) \circ (\eta'_{TT'G(a)} \cdot T(\eta'_{G(a)})$$
$$= (\mu'_{G(a)} \cdot T'(b) \cdot D_{G(a)}) \circ (\eta'_{TT'G(a)} \cdot T(\eta'_{G(a)}))$$
$$= \mu'_{G(a)} \cdot T'(\mu'_{G(a)}) \cdot T'T'(b) \cdot T'(D_{G(a)}) \cdot \eta'_{TT'G(a)} \cdot T(\eta'_{G(a)})$$
$$\overset{T_3}{=} \mu'_{G(a)} \cdot \mu'_{T'G(a)} \cdot T'T'(b) \cdot T'(D_{G(a)}) \cdot \eta'_{TT'G(a)} \cdot T(\eta'_{G(a)})$$
$$= \mu'_{G(a)} \cdot T'(b) \cdot \mu'_{TG(a)} \cdot \eta'_{T'TG(a)} \cdot D_{G(a)} \cdot T(\eta'_{G(a)})$$
$$\overset{T_1}{=} \mu'_{G(a)} \cdot T'(b) \cdot D_{G(a)} \cdot T(\eta'_{G(a)})$$
$$\overset{D_1}{=} \mu'_{G(a)} \cdot T'(b) \cdot \eta'_{TG(a)}$$
$$= \mu'_{G(a)} \cdot \eta'_{T'G(a)} \cdot b \overset{T_1}{=} b$$

Q.E.D.

On remarque immédiatement que si $T' = \langle I_X,1,1\rangle$ est le triple identité sur X, alors: $\mathbb{K} = K : A \to \mathrm{Alg}\ T = \mathrm{Alg}\ \mathbb{D}$ devient l'unique foncteur de comparaison canonique.

Comme l'endofoncteur $T' = P$ sous-jacent au triple des parties est injectif sur les objets, on a un et un seul foncteur de T'-comparaison $\mathbb{K} : A \to \mathrm{Alg}\ \mathbb{D}$ à chaque fois qu'on a une adjonction $\langle F,G,\eta,\varepsilon\rangle : \mathrm{ENS} \to A$ et une loi distributive $\mathbb{D} : T \to T'$, où $T = \langle GF,\eta, G\varepsilon F\rangle$ (cf. § 2, exemples 3) et 4)).

Pour un monoïde m', le foncteur $T' = m' \times (-) : \mathrm{ENS} \to \mathrm{ENS}$ est injectif sur les objets et sous-jacent au triple des actions d'un monoïde à gauche; si $\mathbb{D} : (-) \times m \to m' \times (-)$ est la loi distributive définie dans l'exemple 2) du paragraphe 2. Alors, encore ici, $\mathbb{K} : \mathrm{Act}\ (m) \to \mathrm{Alg}\ \mathbb{D}$ est un unique foncteur de comparaison, où $\mathrm{Act}\ (m)$ est la catégorie des actions d'un monoïde à droite.

Etant donné un entier positif n, le foncteur défini par

$$\begin{aligned} &\mathrm{ENS} \to \mathrm{ENS} \\ &\quad e \mapsto e^n = e \times e \ldots \times e \end{aligned}$$

est injectif sur les objets et sous-jacent à un triple noté $(\ )^n$. De plus, pour chaque adjonction $\langle F,G,\eta,\varepsilon\rangle : \mathrm{ENS} \to A$ et $T = \langle GF,\eta, G\varepsilon F\rangle$, on a ([2], p. 10) une loi distributive $\mathbb{D} : T \to (\ )^n$ donnée par: $D_e : T(e^n) \to (T(e))^n$ pour chaque ensemble e ; dans ce cas-ci l'unique foncteur de $(\ )^n$-comparaison est

$$\begin{aligned} &\mathbb{K} : A \to \mathrm{Alg}\ \mathbb{D} \\ &\quad a \mapsto (K(a),K(a),\ldots,K(a)) \end{aligned}$$

où $K : A \to \mathrm{Alg}\ T$.

5. THÉORÈME DE BECK GÉNÉRALISÉ

Etant donné une adjonction $\langle F,G,\eta,\varepsilon\rangle : X \to A$ avec $T = \langle GF,\eta, G\varepsilon F\rangle$ et

$D : T \to T'$ une loi distributive. Alors on a le résultat:

Théorème 4. Supposons vérifiées les propriétés suivantes:

(1) $\eta' G : G \to T'G$ est une rétraction dans X^A, si, pour chaque $a \in |A|$, $\eta'_{G(a)} : G(a) \to T'_{G(a)}$ est une rétraction dans X.

(2) $(\eta' \circ \eta)_{T'(x)} = T'((\eta \circ \eta')x)$ pour chaque $\mathbb{D}$-algèbre (b,x).

Alors les conditions qui suivent sont équivalentes:

(a) Le foncteur de T'-comparaison $\mathbb{K} : A \to \mathrm{Alg}\ \mathbb{D}$ est un isomorphisme.

(b) Le foncteur $A \xrightarrow{G} X \xrightarrow{F_{T'}} K\ell\ T'$ crée des coégalisateurs pour les couples de flèches $a \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} a'$ dans A tels que $F_{T'}G(f)$ et $F_{T'}G(g)$ aient un coégalisateur absolu dans $K\ell\ T'$.

(c) Même que (b) en remplaçant l'expression "coégalisateur absolu" par "coégalisateur scindé".

Démonstration.

1) (a) $\Rightarrow$ (b).

Considérons le diagramme:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\mathbb{K}"] \arrow[dd, shift left, "G"] & & \mathrm{Alg}\ \mathbb{D} = \mathrm{Alg}\ \tilde{T} \arrow[dl, shift left, "\tilde{G}_{\mathbb{D}}"] \arrow[dd, shift left, "G^{\tilde{T}}"] \\
& \mathrm{Alg}\ T \arrow[ur, shift left, "\tilde{F}_{\mathbb{D}}"] \arrow[dl, shift left, "G^T"] & \\
X \arrow[uu, shift left, "F"] \arrow[ur, shift left, "F^T"] \arrow[rr, shift left, "F_{T'}"] & & K\ell\ T' \arrow[uu, shift left, "F^{\tilde{T}}"] \arrow[ll, shift left, "G_{T'}"]
\end{tikzcd}$$

où $G_{T'} \cdot G^{\tilde{T}} = G^T \cdot \tilde{G}_{\mathbb{D}}$ et $\tilde{F}_{\mathbb{D}} F^T = F^{\tilde{T}} \cdot F_{T'}$ (cf. [2]).

On a $G^{\tilde{T}}\mathbb{K}(a) = G^{\tilde{T}}(\eta'_{G(a)} \cdot G(\varepsilon a), G(a)) = G(a) = F_{T'}G(a)$, pour tout $a \in |A|$ et pour $\theta : a \to \bar{a}$ dans A :

$$G^{\widetilde{T}}\mathbb{K}(\theta) = G^{\widetilde{T}}(\eta'_{G(\overline{a})} \cdot G(\theta)) = \eta'_{G(\overline{a})} \cdot G(\theta) = F_{T'}G(\theta) \ .$$

D'où $G^{\widetilde{T}}\mathbb{K} = F_{T'} \cdot G$.

De plus, ([4], p. 147, théorème 1, ou [5], lemme 4, p. 70), $G^{\widetilde{T}} : \mathrm{Alg}\,\widetilde{T} \to K\ell\ T'$ crée des coégalisateurs pour les couples $(b,x) \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} (b',x')$ de flèches dans $\mathrm{Alg}\,\widetilde{T} = \mathrm{Alg}\,\mathbb{D}$ tels que $G^{\widetilde{T}}(b,x) = x \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} x' = G^{\widetilde{T}}(b',x')$ aient un coégalisateur absolu dans $K\ell\ T'$. Alors, si $\mathbb{K}$ est un isomorphisme, $F_{T'} \cdot G = G^{\widetilde{T}}\mathbb{K}$ crée aussi des coégalisateurs pour ces couples.

2) (b) ⇒ (c) .

Provient du fait que tout coégalisateur scindé est aussi un coégalisateur absolu [4] .

3) (c) ⇒ (a) .

Lemme. Pour toute $\mathbb{D}$-algèbre (b,x) on a :

$$T^2T'(x) \overset{\eta'_{TT'(x)} \cdot \mu_{T'(x)}}{\underset{\eta'_{TT'(x)} \cdot T(\mu'_x \cdot T'(b) \cdot D_x)}{\rightrightarrows}} TT'(x) \xrightarrow{\mu'_x \cdot T'(b) \cdot D_x} x$$

est un diagramme coégalisateur scindé par:

$$T^2T'(x) \xleftarrow[(\eta' \circ \eta)_{TT'(x)}]{} TT'(x) \xleftarrow[\eta' \circ (\eta \circ \eta')x]{} x$$

dans $K\ell\ T'$ si et seulement si l'égalité:

$$(*) \qquad (\eta' \circ \eta)_{T'(x)} = T'((\eta \circ \eta')x)$$

est satisfaite.

Démonstration du lemme.

i) Supposons qu'on ait (*) . Alors:

$$(\mu'_x \cdot T'(b) \cdot D_x) \circ ((\eta' \circ (\eta \circ \eta'))x) = \mu'_x \cdot T'(b) \cdot D_x \circ (\eta'_{TT'(x)} \cdot \eta_{T'(x)} \cdot \eta'_x)$$

$$= \mu'_x \cdot T'(\mu'_x \cdot T'(b) \cdot D_x) \cdot \eta'_{TT'(x)} \cdot \eta_{T'(x)} \cdot \eta'_x$$

$$\overset{T_3}{=} \mu'_x \cdot \mu'_{T'(x)} \cdot T'T'(b) \cdot \eta'_{T'T(x)} \cdot D_x \cdot \eta_{T'(x)} \cdot \eta'_x$$

$$\overset{D_3}{=} \mu'_x \cdot T'(b) \cdot \mu'_{T(x)} \cdot \eta'_{T'T(x)} \cdot T'(\eta x) \cdot \eta'_x$$

$$\overset{T_1}{=} \mu'_x \cdot T'(b \cdot \eta_x) \cdot \eta'_x \overset{A'_1}{=} \mu'_x \cdot T'(\eta'_x) \cdot \eta'_x \overset{T_2}{=} \eta'_x \text{ (= id x dans } K\ell\ T'\text{)}.$$

De même:

$$(\mu'_x \cdot T'(b) \cdot D_x) \circ (\eta'_{TT'(x)} \cdot \mu_{T'(x)}) = \mu'_x \cdot T'(\mu'_x \cdot T'(b) \cdot D_x) \cdot \eta'_{TT'(x)} \cdot \mu_{T'(x)}$$

$$\overset{T_3}{=} \mu'_x \cdot \mu'_{T'(x)} \cdot T'T'(b) \cdot \eta'_{T'T(x)} \cdot D_x \cdot \mu_{T'(x)}$$

$$= \mu'_x \cdot T'(b) \cdot \mu'_{T(x)} \cdot \eta'_{T'T(x)} \cdot D_x \cdot \mu_{T'(x)}$$

$$\overset{T_1}{=} \mu'_x \cdot T'(b) \cdot D_x \cdot \mu_{T'(x)}$$

$$\overset{D_4}{=} \mu'_x \cdot T'(b) \cdot T'(\mu_x) \cdot D_{T(x)} \cdot T(D_x)$$

$$\overset{A'_2}{=} \mu'_x \cdot T'(\mu'_x \cdot T'(b) \cdot D_x \cdot T(b)) \cdot D_{T(x)} \cdot T(D_x)$$

$$\overset{T_3}{=} \mu'_x \cdot \mu'_{T'(x)} \cdot T'T'(b) \cdot T'(D_x) \cdot T'T(b) \cdot D_{T(x)} \cdot T(D_x)$$

$$= \mu'_x \cdot T'(b) \cdot \mu'_{T(x)} \cdot T'(D_x) \cdot D_{T'(x)} \cdot TT'(b) \cdot T(D_x)$$

$$\overset{D_2}{=} \mu'_x \cdot T'(b) \cdot D_x \cdot T(\mu'_x \cdot T'(b) \cdot D_x)$$

$$\overset{T_1}{=} \mu'_x \cdot T'(b) \cdot \mu'_{T(x)} \cdot \eta'_{T'T(x)} \cdot D_x \cdot T(\mu'_x \cdot T'(b) \cdot D_x)$$

$$= \mu'_x \cdot \mu'_{T'(x)} \cdot T'(T'(b) \cdot D_x) \cdot \eta'_{TT'(x)} \cdot T(\mu'_x \cdot T'(b) \cdot D_x)$$

$$\overset{T_3}{=} \mu'_x \cdot T'(\mu'_x \cdot T'(b) \cdot D_x) \cdot \eta'_{TT'(x)} \cdot T(\mu'_x \cdot T'(b) \cdot D_x)$$

$$= (\mu'_x \cdot T'(b) \cdot D_x) \circ (\eta'_{TT'(x)} \cdot T(\mu'_x \cdot T'(b) \cdot D_x)) .$$

Aussi:

$$(\eta'_{TT'(x)} \cdot \mu_{T'(x)}) \circ ((\eta' \circ \eta)_{TT'(x)}) = (\eta'_{TT'(x)} \cdot \mu_{T'(x)}) \circ (\eta'_{TTT'(x)} \cdot \eta_{TT'(x)})$$

$$= \mu'_{TT'(x)} \cdot T'(\eta'_{TT'(x)} \cdot \mu_{T'(x)}) \cdot \eta'_{TTT'(x)} \cdot \eta_{TT'(x)}$$

$$\overset{T_2}{=} T'(\mu_{T'(x)}) \cdot \eta'_{TTT'(x)} \cdot \eta_{TT'(x)}$$

$$= \eta'_{TT'(x)} \cdot \mu_{T'(x)} \cdot \eta_{TT'(x)}$$

$$\overset{T_1}{=} \eta'_{TT'(x)} \quad (= id_{TT'(x)} \quad \text{dans} \quad K\ell\ T') .$$

Et enfin:

$$(\eta'_{TT'(x)} \cdot T(\mu'_x \cdot T'(b) \cdot D_x)) \circ ((\eta' \circ \eta)_{TT'(x)}) =$$

$$= \mu'_{TT'(x)} \cdot T'(\eta'_{TT'(x)} \cdot T(\mu'_x \cdot T'(b) \cdot D_x)) \cdot (\eta' \circ \eta)_{TT'(x)}$$

$$\overset{T_2}{=} T'T(\mu'_x \cdot T'(b) \cdot D_x) \cdot (\eta' \circ \eta)_{TT'(x)}$$

$$\left.\begin{aligned} &= (\eta' \circ \eta)_{T'(x)} \cdot \mu'_x \cdot T'(b) \cdot D_x \\ &\overset{*}{=} T'((\eta \circ \eta')x) \cdot \mu'_x \cdot T'(b) \cdot D_x \end{aligned}\right\} \quad (**)$$

$$\overset{T_2}{=} \mu'_{TT'(x)} \cdot T'(\eta'_{TT'(x)}) \cdot T'((\eta \circ \eta')x) \cdot \mu'_x \cdot T'(b) \cdot D_x$$

$$= \mu'_{TT'(x)} \cdot T'((\eta' \circ (\eta \circ \eta'))x) \cdot \mu'_x \cdot T'(b) \cdot D_x = [(\eta' \circ (\eta \circ \eta'))x] \circ (\mu'_x \cdot T'(b) \cdot D_x) .$$

ii) Inversement, si le diagramme est un coégalisateur scindé pour chaque $\mathbb{D}$-algèbre (b,x), alors on a la relation (**) plus haut; i.e.

$$(\eta' \circ \eta)_{T'(x)} \cdot \mu'_x \cdot T'(b) \cdot D_x = T'((\eta \circ \eta')x) \cdot \mu'_x \cdot T'(b) \cdot D_x .$$

Or, comme

$$\mu'_x \cdot T'(b) \cdot D_x \cdot \eta_{T'(x)} \overset{D_3}{=} \mu'_x \cdot T'(b) \cdot T'(\eta x)$$
$$\overset{A'_1}{=} \mu'_x \cdot T'(\eta'_x) \overset{T_2}{=} id_{T'(x)} ,$$

on a:

$$(\eta' \circ \eta)_{T'(x)} = T'((\eta \circ \eta')x) \ .$$

Ce qui termine la démonstration du lemme.

D'autre part, notons que $\eta'_{TT'(x)} \cdot \mu_{T'(x)} = F_{T'}G(\varepsilon_{FT'(x)})$ et que $\eta_{TT'(x)} \cdot T(\mu'_x \cdot T'(b) \cdot D_x) = F_{T'}GF(\mu'_x \cdot T'(b) \cdot D_x)$.

Donc, le lemme nous donne un coégalisateur scindé dans $K\ell\ T'$ pour le couple de flèches $F_{T'}G(\varepsilon_{FT'(x)})$ et $F_{T'}GF(\mu'_x \cdot T'(b) \cdot D_x)$, et ainsi, de l'hypothèse (c), il existe un objet de A , $M(b,x)$ unique tel que $F_{T'}GM(b,x) = GM(b,x) = x$ et une flèche dans A , $K_{(b,x)} : FT'(x) \to M(b,x)$ unique telle que $F_{T'}G(k_{(b,x)}) = \mu'_x \cdot T'(b) \cdot D_x$.

De plus, le diagramme:

$$FGFT'(x) \underset{F(\mu'_x \cdot T'(b) \cdot D_x)}{\overset{\varepsilon_{FT'(x)}}{\rightrightarrows}} FT'(x) \xrightarrow{k_{(b,x)}} M(b,x)$$

est un coégalisateur dans A .

Montrons que les $M(b,x)$ sont sous-jacents à un foncteur $M : \mathrm{Alg}\ \mathbb{D} \to A$ tel que $MK = I_A$ et $\mathbb{K}M = I_{\mathrm{Alg}\ \mathbb{D}}$.

Soit donné une flèche $f : (b,x) \to (\overline{b},\overline{x})$ dans $\mathrm{Alg}\ \mathbb{D}$ i.e. $f : x \to T'(\overline{x})$ dans X telle que $\mu'_{\overline{x}} \cdot T'(f) \cdot b = \mu'_{\overline{x}} \cdot T'(\overline{b}) \cdot D_{\overline{x}} \cdot T(f)$.

Considérons le diagramme dans A :

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
FGFT'(x) \arrow[r, shift left, "\varepsilon_{FT'(x)}"] \arrow[r, shift right, "F(\mu'_x \cdot T'(b) \cdot D_x)"'] \arrow[d, "FGFT'(f)"'] & FT'(x) \arrow[r, "k_{(b,x)}"] \arrow[d, "FT'(f)"] & M(b,x) \arrow[dd, dashed, "M(f)"] \\
FGFT'T'(\overline{x}) \arrow[d, "FGF(\mu'_{\overline{x}})"'] & FT'T'(\overline{x}) \arrow[d, "F(\mu'_{\overline{x}})"] & \\
FGFT'(\overline{x}) \arrow[r, shift left, "\varepsilon_{FT'(\overline{x})}"] \arrow[r, shift right, "F(\mu'_{\overline{x}} \cdot T'(\overline{b}) \cdot D\overline{x})"'] & FT'(\overline{x}) \arrow[r, "k_{(\overline{b},\overline{x})}"'] & M(\overline{b},\overline{x})
\end{tikzcd}$$

Comme:

$$
\begin{aligned}
&(k_{(\overline{b},\overline{x})} \cdot F(\mu'_{\overline{x}} \cdot T'(f)) \cdot F(\mu'_x \cdot T'(b) \cdot Dx) \\
&= k_{(\overline{b},\overline{x})} \cdot F(\mu'_{\overline{x}} \cdot T'(f) \cdot \mu'_x) \cdot F(T'(b) \cdot Dx) \\
&= k_{(\overline{b},\overline{x})} \cdot F(\mu'_{\overline{x}} \cdot \mu'_{T'(\overline{x})} \cdot T'T'(f)) \cdot F(T'(b) \cdot Dx) \\
&\overset{T_3}{=} k_{(\overline{b},\overline{x})} \cdot F(\mu'_{\overline{x}} \cdot T'(\mu'_{\overline{x}}) \cdot T'T'(f)) \cdot FT'(b) \cdot F(Dx) \\
&= k_{(\overline{b},\overline{x})} \cdot F(\mu'_{\overline{x}}) \cdot FT'(\mu'_{\overline{x}} \cdot T'(f) \cdot b) \cdot F(Dx) \\
&= k_{(\overline{b},\overline{x})} \cdot F(\mu'_{\overline{x}}) \cdot FT'(\mu'_{\overline{x}} \cdot T'(b) \cdot D\overline{x} \cdot T(f)) \cdot F(Dx) \\
&\overset{T_3}{=} k_{(\overline{b},\overline{x})} \cdot F(\mu'_{\overline{x}} \cdot \mu'_{T'(\overline{x})} \cdot T'T'(\overline{b})) \cdot F(T'(D\overline{x}) \cdot D_{T'(\overline{x})}) \cdot FTT'(f) \\
&= k_{(\overline{b},\overline{x})} \cdot F(\mu'_{\overline{x}} \cdot T'(\overline{b})) \cdot F(\mu'_{T(\overline{x})} \cdot T'(D\overline{x}) \cdot D_{T'(\overline{x})}) \cdot FTT'(f) \\
&\overset{D_2}{=} k_{(\overline{b},\overline{x})} \cdot F(\mu'_{\overline{x}} \cdot T'(\overline{b})) \cdot F(D\overline{x} \cdot T(\mu'_{\overline{x}})) \cdot FTT'(f) \\
&= k_{(\overline{b},\overline{x})} \cdot F(\mu'_{\overline{x}} \cdot T'(\overline{b}) \cdot D\overline{x}) \cdot FG(F(\mu'_{\overline{x}}) \cdot FT'(f)) \\
&= k_{(\overline{b},\overline{x})} \cdot \varepsilon_{FT'(\overline{x})} \cdot FG(F(\mu'_{\overline{x}}) \cdot FT'(f)) \\
&= (k_{(\overline{b},\overline{x})} \cdot F(\mu'_{\overline{x}} \cdot T'(f))) \cdot \varepsilon_{FT'(x)} \ .
\end{aligned}
$$

Alors, $k_{(b,x)}$ étant un coégalisateur, il existe une et une seule flèche dans A, qu'on notera $M(f) : M(b,x) \to M(\overline{b},\overline{x})$ telle que

$$M(f)\cdot k_{(b,x)} = k_{(\overline{b},\overline{x})}\cdot F(\mu'_{\overline{x}}\cdot T'(f))\ .$$

D'où le foncteur $M : \mathrm{Alg}\,\mathbb{D}\to A$.

D'autre part, pour chaque $a\in|A|$, $M\mathbb{K}(a) = M(\eta'_{G(a)}\cdot G(\varepsilon a)\ ,G(a))$ est unique tel que $F_{T'}GM\mathbb{K}(a) = GM\mathbb{K}(a) = G(a)$. Ainsi $M\mathbb{K}(a) = a$.

Soit maintenant $g : a\to\overline{a}$ dans A . Comme pour tout $a\in|A|$,

$$\begin{aligned}
\eta'_{G(a)}\cdot(G(k_{\mathbb{K}(a)})\cdot\eta_{T'G(a)}) &= F_{T'}G(k_{\mathbb{K}(a)})\cdot\eta_{T'G(a)}\\
&= \mu'_{G(a)}\cdot T'(\eta'_{G(a)}\cdot G(\varepsilon a))\cdot D_{G(a)}\cdot\eta_{T'G(a)}\\
&\overset{T_2}{=} T'G(\varepsilon a)\cdot D_{G(a)}\cdot\eta_{T'G(a)}\\
&\overset{D_3}{=} T'G(\varepsilon a)\cdot T'(\eta_{G(a)}) = id_{T'G(a)}
\end{aligned}$$

puisque $G\varepsilon\cdot\eta G = 1$, alors $\eta'_{G(a)}$ est une rétraction et donc, l'hypothèse "1)" nous assure qu'il existe une transformation naturelle

$$\delta : T'G\to G \text{ dans } X^A \text{ telle que } \eta'_G\cdot\delta = 1\ .$$

De plus, pour chaque $a\in|A|$,

$$FT'G(a)\xrightarrow{F(\delta a)} FG(a)\xrightarrow{\varepsilon a} a = M\mathbb{K}(a)$$

tel que:

$$\begin{aligned}
F_{T'}G(\varepsilon a\cdot F(\delta a)) = \eta'_{G(a)}\cdot G(\varepsilon a\cdot F(\delta a)) &= T'G(\varepsilon a)\cdot\eta'_{TG(a)}\cdot T(\delta a)\\
&\overset{D_1}{=} T'G(\varepsilon a)\cdot D_{G(a)}\cdot T(\eta'_{G(a)}\cdot\delta a)\\
&= T'G(\varepsilon a)\cdot D_{G(a)}\\
&\overset{T_2}{=} \mu'_{G(a)}\cdot T'(\eta'_{G(a)}\cdot G(\varepsilon a))\cdot D_{G(a)}\ .
\end{aligned}$$

Donc, par l'unicité des flèches $k_{\mathbb{K}(a)} : FT'(G(a))\to M\mathbb{K}(a) = a$,

$$\varepsilon a \cdot F(\delta a) = k_{\mathbb{K}(a)} \ .$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} g \cdot k_{\mathbb{K}(a)} = g \cdot \varepsilon a \cdot F(\delta a) &= \varepsilon\overline{a} \cdot FG(g) \cdot F(\delta a) \\ &= \varepsilon\overline{a} \cdot F(\delta\overline{a}) \cdot FT'G(g) \\ &= k_{\mathbb{K}(\overline{a})} \cdot FT'G(g) \\ &\overset{T_2}{=} k_{\mathbb{K}(\overline{a})} \cdot F(\mu'_{G(\overline{a})} \cdot T'\mathbb{K}(g)) \end{aligned}$$

et parce que $M\mathbb{K}(g) : M\mathbb{K}(a) = a \to \overline{a} = M\mathbb{K}(\overline{a})$ est unique, par définition, alors

$$M\mathbb{K}(g) = g \ .$$

D'où $M\mathbb{K} = I_A$.

D'autre part, soit une $\mathbb{D}$-algèbre (b,x) et posons $M(b,x) = a$; alors

$$x = F_{T'}GM(b,x) = GM(b,x) = G(a)$$

et

$$\eta'_{G(a)} \cdot G(k_{(b,G(a))}) = F_{T'}G(k_{(b,G(a))}) = \mu'_{G(a)} \cdot T'(b) \cdot D_{G(a)} \ .$$

Donc

$$\begin{aligned} &T'G(\varepsilon a) \cdot D_{G(a)} \cdot T(\mu'_{G(a)} \cdot T'(b) \cdot D_{G(a)}) \\ &\quad = T'G(\varepsilon a) \cdot D_{G(a)} \cdot T(\eta'_{G(a)} \cdot G(k_{(b,G(a))})) \\ &\quad \overset{D_1}{=} T'G(\varepsilon a) \cdot \eta'_{TG(a)} \cdot GFG(k_{(b,G(a))}) \\ &\quad = \eta'_{G(a)} \cdot G(\varepsilon a \cdot FG(k_{(b,G(a))}) \\ &\quad = \eta'_{G(a)} \cdot G(k_{(b,G(a))}) \cdot G(\varepsilon_{FT'G(a)}) \\ &\quad = \mu'_{G(a)} \cdot T'(b) \cdot D_{G(a)} \cdot \mu_{T'G(a)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{D_4}{=} \mu'_{G(a)} \cdot T'(b \cdot \mu_{G(a)}) \cdot D_{TG(a)} \cdot T(D_{G(a)}) \\
&\overset{A'_2}{=} \mu'_{G(a)} \cdot T'(\mu'_{G(a)} \cdot T'(b) \cdot D_{G(a)} \cdot T(b)) \cdot D_{TG(a)} \cdot T(D_{G(a)}) \\
&\overset{T_3}{=} \mu'_{G(a)} \cdot \mu'_{T'G(a)} \cdot T'T'(b) \cdot T'(D_{G(a)}) \cdot D_{T'G(a)} \cdot T(T'(b) \cdot D_{G(a)}) \\
&= \mu'_{G(a)} \cdot T'(b) \cdot \mu'_{TG(a)} \cdot T'(D_{G(a)}) \cdot D_{T'G(a)} \cdot T(T'(b) \cdot D_{G(a)}) \\
&\overset{D_2}{=} \mu'_{G(a)} \cdot T'(b) \cdot D_{G(a)} \cdot T(\mu'_{G(a)}) \cdot T(T'(b) \cdot D_{G(a)}) \\
&= \mu'_{G(a)} \cdot T'(b) \cdot D_{G(a)} \cdot T(\mu'_{G(a)} \cdot T'(b) \cdot D_{G(a)}) \ .
\end{aligned}
$$

Or, comme on l'a déjà remarqué,

$$
(\mu'_{G(a)} \cdot T'(b) \cdot D_{G(a)}) \cdot \eta_{T'G(a)} \overset{D_3}{=} \mu'_{G(a)} \cdot T'(b \cdot \eta_{G(a)}) \overset{A'_1}{=} \mu'_{G(a)} \cdot T'(\eta'_{G(a)}) \overset{T_2}{=} id_{T'G(a)} \ .
$$

Alors, $T'G(\varepsilon a) \cdot D_{G(a)} = \mu'_{G(a)} \cdot T'(b) \cdot D_{G(a)}$. Donc, pour chaque $\mathbb{D}$-algèbre (b,x) ,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{K}M(b,x) = \mathbb{K}(a) &= (\eta'_{G(a)} \cdot G(\varepsilon a) \, , G(a)) \\
&= (T'G(\varepsilon a) \cdot \eta'_{TG(a)} \, , G(a)) \\
&\overset{D_1}{=} (T'G(\varepsilon a) \cdot D_{G(a)} \cdot T(\eta'_{G(a)}) \, , G(a)) \\
&= (\mu'_{G(a)} \cdot T'(b) \cdot D_{G(a)} \cdot T(\eta'_{G(a)}) \, , G(a)) \\
&\overset{D_1}{=} (\mu'_{G(a)} \cdot T'(b) \cdot \eta'_{TG(a)} \, , G(a)) \\
&= (\mu'_{G(a)} \cdot \eta'_{T'G(a)} \cdot b \, , G(a)) \\
&\overset{T_1}{=} (b \, , G(a)) = (b,x) \ .
\end{aligned}
$$

D'un autre côté, pour $f : (b,x) \to (\overline{b},\overline{x})$ dans $\mathrm{Alg}\,\mathbb{D}$ i.e. $f : x \to T'(\overline{x})$ dans X avec $\mu'_{\overline{x}} \cdot T'(f) \cdot b = \mu'_{\overline{x}} \cdot T'(\overline{b}) \cdot D\overline{x} \cdot T(f)$, montrons que $\mathbb{K}M(f) = f$. On a:

$$
\begin{aligned}
f \circ (\mu'_x \cdot T'(b) \cdot Dx) &= \mu'_{\overline{x}} \cdot T'(f) \cdot \mu'_x \cdot T'(b) \cdot Dx \\
&\overset{T_3}{=} \mu'_{\overline{x}} \cdot T'(\mu'_{\overline{x}} \cdot T'(f) \cdot b) \cdot Dx \\
&= \mu'_{\overline{x}} \cdot T'(\mu'_{\overline{x}} \cdot T'(\overline{b}) \cdot D\overline{x} \cdot T(f)) \cdot Dx \\
&\overset{T_3}{=} \mu'_{\overline{x}} \cdot \mu'_{T'(\overline{x})} \cdot T'T'(\overline{b}) \cdot T'(D\overline{x}) \cdot D_{T'(\overline{x})} \cdot TT'(f) \\
&= \mu'_{\overline{x}} \cdot T'(\overline{b}) \cdot \mu'_{T(\overline{x})} \cdot T'(D\overline{x}) \cdot D_{T'(\overline{x})} \cdot TT'(f) \\
&\overset{D_2}{=} \mu'_{\overline{x}} \cdot T'(\overline{b}) \cdot D\overline{x} \cdot T(\mu'_{\overline{x}}) \cdot TT'(f) \\
&\overset{T_1}{=} \mu'_{\overline{x}} \cdot T'(\overline{b}) \cdot \mu'_{T(\overline{x})} \cdot \eta'_{T'T(\overline{x})} \cdot D\overline{x} \cdot T(\mu'_{\overline{x}} \cdot T'(f)) \\
&\overset{T_3}{=} \mu'_{\overline{x}} \cdot T'(\mu'_{\overline{x}} \cdot T'(\overline{b}) \cdot D\overline{x}) \cdot \eta'_{TT'(\overline{x})} \cdot T(\mu'_{\overline{x}} \cdot T'(f)) \\
&= (\mu'_{\overline{x}} \cdot T'(\overline{b}) \cdot D(\overline{x})) \circ (\eta'_{TT'(\overline{x})} \cdot T(\mu'_{\overline{x}} \cdot T'(f))) .
\end{aligned}
$$

Or, comme par définition de $M(f)$ et de $k_{(b,x)}$,

$$M(f) \cdot k_{(b,x)} = k_{(\overline{b},\overline{x})} \cdot F(\mu'_{\overline{x}} \cdot T'(f))$$

et

$$F_{T'}G(k_{(b,x)}) = \mu'_x \cdot T'(b) \cdot Dx$$

alors

$$
\begin{aligned}
(\eta'_{\overline{x}} \cdot GM(f)) \circ (\mu'_x \cdot T'(b) \cdot Dx) &= F_{T'}G(M(f) \cdot k_{(b,x)}) \\
&= F_{T'}G(k_{(\overline{b},\overline{x})} \cdot F(\mu'_{\overline{x}} \cdot T'(f))) \\
&= (\mu'_{\overline{x}} \cdot T'(\overline{b}) \cdot D\overline{x}) \circ (\eta'_{TT'(\overline{x})} \cdot T(\mu'_{\overline{x}} \cdot T'(f))) .
\end{aligned}
$$

Donc, $\mu'_X \cdot T'(b) \cdot Dx$ étant un coégalisateur scindé dans $\mathcal{K}\ell\, T'$, c'est un épi et on a:

$$\mathbb{K}M(f) = \eta'_{\bar{X}} \cdot GM(f) = f \ .$$

Q.E.D.

Remarques.

1) Si l'endofoncteur T' est injectif sur les objets, alors (théorème 3) $\mathbb{K}$ est unique en tant que foncteur de T'-comparaison.

2) Si on remplace l'hypothèse "1)" du théorème 4 par la condition: $\eta'_{G(a)} : G(a) \to T'G(a)$ est un monomorphisme dans X pour chaque $a \in |A|$, alors le théorème reste valide.

En effet, cette hypothèse sert exclusivement à montrer que $M\mathbb{K}(g) = g$ pour toute flèche $g : a \to \bar{a}$ dans A . Or, si $\eta'_{G(a)}$ est un monomorphisme, comme:

$$\begin{aligned}
\eta'_{G(a)}\cdot[G(k_{\mathbb{K}(a)}\cdot F(\eta'_{G(a)}))\cdot\eta_{G(a)}] &= F_{T'}G(k_{\mathbb{K}(a)})\cdot T(\eta'_{G(a)})\cdot\eta_{G(a)} \\
&= \mu'_{G(a)}\cdot T'(\eta'_{G(a)}\cdot G(\varepsilon a))\cdot D_{G(a)}\cdot\eta_{T'G(a)}\cdot\eta'_{G(a)} \\
&\overset{T_1}{=} T'G(\varepsilon a)\cdot D_{G(a)}\cdot\eta_{T'(a)}\cdot\eta'_{G(a)} \\
&\overset{D_3}{=} T'(G(\varepsilon a)\cdot\eta_{G(a)})\cdot\eta'_{G(a)} = \eta'_{G(a)}
\end{aligned}$$

alors

$$G(k_{\mathbb{K}(a)} \cdot F(\eta'_{G(a)})) \cdot \eta_{G(a)} = id_{G(a)}$$

pour

$$FG(a) \xrightarrow{F(\eta'_{G(a)})} FT'G(a) \xrightarrow{k_{\mathbb{K}(a)}} M\mathbb{K}(a) = a \ .$$

Mais, par définition de la co-unité, $\varepsilon a : FG(a) \to a$ est l'unique flèche dans A telle que $G(\varepsilon a) \cdot \eta_{G(a)} = id_{G(a)}$. D'où $k_{\mathbb{K}(a)} \cdot F(\eta'_{G(a)}) = \varepsilon a$, pour chaque $a \in |A|$. Ainsi,

$$g \cdot k_{\mathbb{K}(a)} \cdot F(\eta'_{G(a)}) = g \cdot \varepsilon a = \varepsilon\overline{a} \cdot FG(g)$$

$$= k_{\mathbb{K}(\overline{a})} \cdot F(\eta'_{G(\overline{a})}) \cdot FG(g)$$

$$= k_{\mathbb{K}(\overline{a})} \cdot FT'G(g) \cdot F(\eta'_{G(a)})$$

et

$$g \cdot k_{\mathbb{K}(a)} = k_{\mathbb{K}(\overline{a})} \cdot FT'G(g) \ ,$$

les $\eta'_{G(a)}$ étant des rétractions.

Par suite, de l'unicité de $M\mathbb{K}(g) : M\mathbb{K}(a) = a \to \overline{a} = M\mathbb{K}(\overline{a})$, on a:

$$M\mathbb{K}(g) = g \ .$$

Remarquons ici que ce résultat donne une nouvelle façon d'envisager le théorème de Beck (i.e. le théorème 4 où $\langle T',\eta',\mu'\rangle = \langle I_X,1,1\rangle$), sans se servir de l'hypothèse de création (unicité!) de la flèche

$$k_{(b,x)} : FT'(x) \to M(b,x) \ ,$$

puisqu'ici, on ne se sert que de l'unicité de la co-unité $\varepsilon a : FG(a) \to a$.

D'autre part, notons qu'on a le résultat: Si $\mathbb{K} : A \to \mathrm{Alg}\, \mathbb{D}$ est un isomorphisme et que les $\eta'_{G(a)}$ sont des monomorphismes, alors $K : A \to \mathrm{Alg}\, T$ est un isomorphisme.

En effet, comme $\mathbb{K} = \widetilde{F}_{\mathbb{D}}K$, si $\mathbb{K}$ est injectif sur les objets (resp. les flèches), alors K est injectif sur les objets (resp. les flèches).

De plus, soit $(h,x) \in |\mathrm{Alg}\, T|$ et $\mathbb{K}$ surjectif sur les objets; on a: $(\eta'_X \cdot h,x) = (\eta'_{G(a)} \cdot G(\varepsilon a) , G(a))$ pour un $a \in |A|$. Ainsi

$$\eta'_{G(a)} \cdot h = \eta'_{G(a)} \cdot G(\varepsilon a)$$

et

$$h = G(\varepsilon a) \ .$$

D'où

$$(h,x) = (G(\varepsilon a)\,,G(a)) = K(a)$$

pour $a \in |A|$.

Enfin, pour toute flèche $g : (h,x) \to (h',x')$ dans $\mathrm{Alg}\ T$, i.e. $g : (G(\varepsilon a)\,,G(a)) \to (G(\varepsilon a')\,,G(a'))$. Alors, si $\mathbb{K}$ est surjectif sur les flèches, $\eta'_{G(a')} \cdot g = \mathbb{K}(f)$ pour $f : a \to a'$ dans A . D'où $\eta'_{G(a)} \cdot g = \eta'_{G(a')} \cdot G(f)$ et $g = G(f) = K(f)$.

APPENDICE. <u>UNICITÉ DU FONCTEUR DE COMPARAISON CANONIQUE $K : A \to \mathrm{Alg}\ T$</u>

Voici deux nouvelles démonstrations du théorème: "Pour une adjonction $\langle F,G,\eta,\varepsilon\rangle : X \to A$, si on appelle $T = \langle GF,\eta,\mu = G\varepsilon F\rangle$ le triple correspondant dans X , alors il existe un et un seul foncteur de comparaison $K : A \to \mathrm{Alg}\ T$" .

Première démonstration. Soit $K : A \longrightarrow \mathrm{Alg}\ T$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & (G(\varepsilon a)\,,G(a)) \arrow[d, "G(f)"] \\ \bar{a} \arrow[r] & (G(\varepsilon\bar{a})\,,G(\bar{a})) \end{tikzcd}$$

On a $G^TK = G$, $KF = F^T$.

S'il existe $K' : A \to \mathrm{Alg}\ T$ avec $G^TK' = G$ et $K'F = F^T$, alors $K'(a) = (h,G(a))$ et $K'(f) = G(f) = K(f)$ pour $f : a \to \bar{a}$ dans A .

Considérons l'adjonction $\langle F^T,G^T,\eta^T,\varepsilon^T\rangle : X \to \mathrm{Alg}\ T$; on va montrer $\varepsilon^TK' = K'\varepsilon$.

Pour chaque $a \in |A|$, $\varepsilon^TK'(a) : F^TG^TK'(a) = F^TG(a) \to K'(a)$ et $K'(\varepsilon a) : K'FG(a) = F^TG(a) \to K'(a)$ sont des flèches dans $\mathrm{Alg}\ T$. Or $\eta^T_{G^TK'(a)}$ étant une flèche universelle, comme dans toute adjonction, $\varepsilon^T_{K'(a)}$ est donc unique dans $\mathrm{Alg}\ T$ de source $F^TG(a)$ et de but $K'(a)$ telle que:

$$G^T(\varepsilon^T_{K'(a)}) \cdot \eta^T_{G^TK'(a)} = id_{G^TK'(a)} .$$

Mais parce que $G^T(K'(\varepsilon a)) \cdot \eta^T_{G^TK'(a)} = G(\varepsilon a) \cdot \eta_{G(a)} = id_{G(a)}$, alors $K'(\varepsilon a) = \varepsilon^T_{K'(a)}$. Et, par définition de ε^T ,

$$h = \varepsilon^T_{(h,G(a))} = \varepsilon^T_{K'(a)} = K'(\varepsilon a) = G(\varepsilon a)$$

Q.E.D.

Seconde démonstration. On suppose toujours $K' : A \to \mathrm{Alg}\ T$ avec $G^TK' = G$, $K'F = F^T$ et on a $K'(a) = (h,G(a))$, $K'(f) = G(f) = K(f)$ pour $f : a \to \bar{a}$ dans A . Or, parce que $K'(\varepsilon a) = G(\varepsilon a) : K'FG(a) = F^TG(a) = (\mu_{G(a)},TG(a)) \to (h,G(a)) = K'(a)$ est un morphisme de T-algèbres, on a:

$$G(\varepsilon a) \cdot TG(\varepsilon a) = G(\varepsilon a) \cdot G(\varepsilon_{FG(a)}) = G(\varepsilon a) \cdot \mu_{G(a)} = h \cdot TG(\varepsilon a)$$

et comme $G(\varepsilon a) \cdot \eta_{G(a)} = id_{G(a)}$, alors $G(\varepsilon a) = h$.

Q.E.D.

Remarque. Cette deuxième démonstration est applicable au théorème 3. En effet, dans le théorème 3, pour montrer l'unicité du foncteur de T'-comparaison: $\mathbb{K} : A \to \mathrm{Alg}\ \mathbb{D}$

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & (\eta'_{G(a)} \cdot G(\varepsilon a) , G(a)) \arrow[d, "\eta'_{G(\bar{a})} \cdot G(f)"] \\
\bar{a} \arrow[r, mapsto] & (\eta'_{G(\bar{a})} \cdot G(\varepsilon\bar{a}) , G(\bar{a}))
\end{tikzcd}$$

on en suppose un autre $\mathbb{K}_1 : A \to \mathrm{Alg}\ \mathbb{D}$ avec $\mathbb{K}_1F = \tilde{F}_{\mathbb{D}}F^T$ et $G^T\tilde{G}_{\mathbb{D}}\mathbb{K}_1 = T'G$, ce qui nous donne $\mathbb{K}_1(a) = (b,G(a))$ et $\mathbb{K}_1(f) = \mathbb{K}(f)$ pour $f : a \to \bar{a}$ dans A . D'où

$$\mathbb{K}_1(\varepsilon a) = \mathbb{K}(\varepsilon a) = \eta'_{G(a)} \cdot G(\varepsilon a) : \mathbb{K}_1FG(a) = \tilde{F}_{\mathbb{D}}F^TG(a) = (\eta'_{TG(a)} \cdot \mu_{G(a)} , TG(a)) \to (b,G(a))$$

est un morphisme de $\mathbb{D}$-algèbres, i.e.

$$\begin{aligned}
\eta'_{G(a)} \cdot G(\varepsilon a) \cdot GFG(\varepsilon a) &= \eta'_{G(a)} \cdot G(\varepsilon a) \cdot G(\varepsilon_{FG(a)}) \\
&= T'G(\varepsilon a) \cdot \eta'_{TG(a)} \cdot \mu_{G(a)} \\
&\overset{T_2}{=} \mu'_{G(a)} \cdot T'(\eta'_{G(a)} \cdot G(\varepsilon a)) \cdot \eta'_{TG(a)} \cdot \mu_{G(a)} \\
&= \mu'_{G(a)} \cdot T'(b) \cdot D_{G(a)} \cdot T(\eta'_{G(a)} \cdot G(\varepsilon a)) \\
&\overset{D_1}{=} \mu'_{G(a)} \cdot T'(b) \cdot \eta'_{TG(a)} \cdot GFG(\varepsilon a) \\
&= \mu'_{G(a)} \cdot \eta'_{T'G(a)} \cdot b \cdot GFG(\varepsilon a) \\
&\overset{T_1}{=} b \cdot GFG(\varepsilon a) \; .
\end{aligned}$$

Ainsi $\eta'_{G(a)} \cdot G(\varepsilon a) = b$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BECK, J., Distributive laws, Seminar on triples, Lect. notes in math., Vol. 80, Springer (1969).

[2] BURRONI, E., Algèbres non déterministiques et $\mathbb{D}$-catégories, Cahiers de top. et géo. dif. XIV-4, Dunod (1973).

[3] EHRESMANN, CH., Catégories et structures, Paris, Dunod (1965).

[4] MACLANE, S., Categories for the working mathematician, Springer (1971).

[5] PAREIGIS, B., Categories and functors, N.Y. Academic Press (1970).

INRS Éducation
Université du Québec
2383, Chemin Sainte-Foy
Sainte-Foy, Québec
G1V 1T1

Manuscrit reçu le 29 septembre 1977.
Revisé le 5 janvier 1978.

Ce texte est issu de la thèse de doctorat de l'auteur, dirigée par le professeur André Barbeau de l'Université Laval.