Ann. Sc. Math. Québec, 1978, vol. II, No 2, pp. 197-252

GRADIENTS GÉNÉRALISÉS DE CLARKE

Jean-Pierre Aubin

PLAN

1. Lexique abrégé de la différentiation
2. Dérivabilité au sens de Clarke des fonctions convexes continues
3. Dérivabilité au sens de Clarke des fonctions localement lipschitziennes
4. Gradients généralités
5. Cônes normaux et tangents à un sous-ensemble
6. Dérivabilité au sens de Clarke de l'enveloppe supérieure de fonctions lipschitziennes
7. Existence de multiplicateurs de Lagrange
8. Propriétés de dérivabilité de l'inf-convolution de deux fonctions

INTRODUCTION

La théorie de l'optimisation, la théorie des jeux, l'économie mathématique utilisent des fonctions qui ne sont pas dérivables au sens usuel (par exemple, on rencontre fréquemment des fonctions qui sont des enveloppes supérieures de fonctions régulières, mais ne sont plus elles-mêmes nécessairement dérivables). Ceci a motivé la recherche de concepts plus faibles de différentiation. Moreau et Rockafellar, en introduisant le concept de sous-différentiel d'une fonction convexe, ont permis à la théorie de l'optimisation de faire des progrès décisifs en remplaçant systématiquement les hypothèses de différentiabilité par des hypothèses de convexité.

Puisque les fonctions continûment dérivables d'une part, les fonctions convexes continues d'autre part, sont des fonctions localement lipschitziennes, il est naturel de se demander si ces dernières sont "dérivables" en un sens assez faible. Récemment, Clarke a introduit le concept de "gradient généralisé" d'une fonction localement lipschitzienne, qui est un sous-ensemble convexe fermé et borné; ce dernier est réduit au gradient de la fonction si cette dernière est continûment dérivable, est égal au sous-différentiel si la fonction est convexe et continue. Puisque l'enveloppe supérieure de fonctions lipschitziennes est lipschitzienne, cette enveloppe supérieure possède aussi un gradient généralisé. Enfin, le principe variationnel a lieu: si x est un *minimum local* d'une fonction localement lipschitzienne, 0 appartient à son gradient généralisé en x.

En outre, le concept de gradient généralisé va nous permettre de définir la *notion de cône normal en* x *à un sous-ensemble non vide quelconque;* nous montrerons qu'il coïncide avec la notion de cône normal en x à un sous-ensemble convexe fermé.

Ce concept sera utilisé de façon cruciale pour donner des conditions suffisantes d'existence de trajectoires invariantes de systèmes différentiels multivoques. (Voir Micro-cours "Equations Différentielles Multivoques".)

La §1 est consacrée aux définitions de quelques concepts de dérivabilité, notamment des dérivées directionnelles à droite et des dérivées directionnelles au sens de Clarke. Nous montrons que toute fonction continûment dérivable est dérivable au sens de Clarke.

A la §2, nous montrons que les fonctions convexes continues sont à la fois dérivables à droite et dérivables au sens de Clarke et que les dérivées directionnelles à droite et au sens de Clarke coïncident.

C'est à la §3, que nous démontrons que *toute fonction localement lipschitzienne* f *définie sur un espace de Hilbert* U *est dérivable au sens de Clarke,* c'est-à-dire vérifie

$$\text{pour tout} \quad v \in U \,, \quad D_c f(x)(v) = \limsup_{\substack{y \to x \\ \theta \to 0^+}} \frac{f(y+\theta v) - f(y)}{\theta}$$

existe; de plus $v \to D_c f(x)(v)$ est positivement homogène, convexe et continue. C'est donc la fonction d'appui du sous-ensemble convexe fermé borné non vide $\partial f(x)$ défini par

$$\partial f(x) = \{p \in U^* \text{ tels que } \langle p,v\rangle \leq D_c f(x)(v) \quad \forall v \in U\}$$

où U^* est le dual de U . C'est cet ensemble qui est appelé *gradient généralisé* de f en x . Ses propriétés élémentaires sont établies à la §4 . On montre en particulier que si x est un minimum local de f , alors $0 \in \partial f(x)$ (c'est-à-dire, x est un point critique de la correspondance $\partial f(\cdot)$).

On définit et étudie les propriétés des cônes normaux et tangents à un sous-ensemble X non vide quelconque. Puisque l'enveloppe supérieure de fonctions lipschitziennes demeure lipschitzienne, elle admet un gradient généralisé qui est étudié à la §6.

On applique ces résultats pour démontrer à la §7 un résultat d'existence de multiplicateurs de Lagrange d'un problème de minimisation sous contraintes et de multiplicateurs de Pareto d'un problème multicritère.

A la §8, nous étudions les propriétés de différentiabilité de l'inf-convolution $f \,\Box\, g$ de deux fonctions définie par $f \,\Box\, g(x) = \inf_{z \in U}[f(x-z) + g(z)]$ et, en particulier, des fonctions

$$f_X(x) = \inf_{z \in X} f(x-z) \quad \text{et} \quad f_k(x) = \inf_{z \in U}[f(z) + \frac{1}{2k}\|x-z\|^2] \,.$$

Si un "micro-cours" n'était pas matière trop légère, j'oserais dédicacer celui-ci à Frank Herbert Clarke qui, tel Jacques Cartier plantant sa croix à Gaspé, a découvert le gradient généralisé et qui, tel Jean-Talon, a exploité ses conséquences. Ce sont elles que j'ai le plaisir de présenter ici.

1. LEXIQUE ABRÉGÉ DE LA DIFFÉRENTIATION

Le concept de différentiation joue un rôle si important en analyse qu'il a été généralisé et étendu dans de nombreuses directions, suivant l'usage qu'on veut lui réserver. Loin de nous l'idée de dresser une liste exhaustive de définitions et d'étudier leurs relations. Nous nous restreignons à introduire les concepts rencontrés au cours de la tentative de définir une notion de dérivée directionnelle de fonctions localement lipschitziennes.

Définition 1. Soit f une fonction de U dans $]-\infty,+\infty]$ de domaine non vide. Nous désignons de la façon suivante les limites ci-dessous lorsqu'elles existent

(1) $Df(x)(v) = \lim_{\theta\to 0^+} \frac{f(x+\theta v) - f(x)}{\theta}$ (dérivée directionnelle à droite de f en x dans la direction v)

(2) $D_d f(x)(u) = \limsup_{\theta\to 0} \frac{f(x+\theta v) - f(x)}{\theta}$ (dérivée directionnelle à droite de Dini de f en x dans la direction v)

(3) $D_c f(x)(v) = \limsup_{\substack{\theta\to 0^+ \\ y\to x}} \frac{f(y+\theta v) - f(y)}{\theta}$ (dérivée directionnelle à droite de Clarke de f en x dans la direction v).

En pratique, nous supprimerons "directionnelle à droite" et nous parlerons seulement de dérivées à droite, de dérivées de Dini, de dérivées de Clarke de f en x dans la direction v.

Définition 2. Soient f une fonction de U dans $]-\infty,+\infty]$ de domaine non vide et $x \in \mathrm{Dom}\, f$. Nous dirons que f est "dérivable à droite" (resp. au "sens de Dini", de "Clarke") en x si pour tout $v \in U$, les limites $Df(x)(v)$ (resp. $D_d f(x)(v)$, $D_c f(x)(v)$) existent. Nous dirons que f est "régulière" (ou "régulièrement dérivable") en x si f est dérivable au sens de Clarke et si $Df(x)(v) = D_d f(x)(v)$ $\forall v \in U$. Nous dirons que f est "quasi-différentiable" (au sens de Pshenichnyi) en x si f est dérivable à droite et si $v \to Df(x)(v)$ est convexe et continue.

Nous dirons que f est "dérivable au sens de Gâteaux" en x si f est dérivable à droite et si $v \to Df(x)(v) = \langle \nabla f(x), v \rangle$ est linéaire et continue.

Nous appellerons $\nabla f(x) \in U^*$ le gradient de f en x. Nous dirons que f est "continûment dérivable" si pour tout $v \in U$, la fonction $y \to \langle \nabla f(y), v \rangle$ est continue en x. Nous dirons que f est "dérivable au sens de Fréchet" en x si

$$\lim_{v \to 0} \frac{f(x+v) - f(x) - \langle \nabla f(x), v \rangle}{\|v\|} = 0$$

et que f est "strictement dérivable au sens de Fréchet" en x si:

$$\lim_{\substack{y \to x \\ v \to 0}} \frac{f(y+v) - f(y) - \langle \nabla f(x), v \rangle}{\|v\|} = 0 .$$

Remarquons que les *fonctions* $v \to Df(x)(v)$, $D_d f(x)(v)$ et $D_c f(x)(v)$ *sont positivement homogènes* et que, lorsque les limites ci-dessous existent, on obtient les inégalités:

(4) $Df(x)(v) = D_d f(x)(v) \leq D_c f(x)(v)$.

Remarquons également qu'une fonction f dérivable au sens de Gâteaux n'est pas nécessairement dérivable au sens de Clarke. Cependant, on obtient le résultat suivant.

Théorème 1. Supposons que f soit continûment dérivable en x. Alors f est dérivable au sens de Clarke et

(5) $\langle \nabla f(x), v \rangle = D_c f(x)(v)$.

En particulier, elle est <u>régulièrement dérivable</u>.

Démonstration. Puisque f est continûment dérivable en x, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

(6) $|\langle \nabla f(z), v \rangle - \langle \nabla f(x), v \rangle| \leq \varepsilon$ lorsque $\|z-x\| \leq \eta$.

Si $\|y\| \leq \eta/2$ et si $0 < t < \eta/2\|v\|$, posons $g(t) = f(y+tv)$. Alors g est dérivable et

$$(7) \quad g'(t) = \lim_{\theta \to 0} \frac{f(y+tv+\theta v) - f(y+tv)}{\theta} = \langle \nabla f(y+tv), v \rangle .$$

Donc, si $\theta \leq \eta/2\|v\|$, on obtient

$$\frac{f(y+\theta v) - f(y)}{\theta} - \langle \nabla f(x), v\rangle = \frac{g(\theta) - g(0)}{\theta} - \langle \nabla f(x), v\rangle$$

$$= \frac{1}{\theta} \int_0^\theta (\langle \nabla f(y+tv), v\rangle - \langle \nabla f(x), v\rangle)\, dt$$

et par suite, puisque $\|y+tv-x\| \leq \eta$,

$$\left| \frac{f(y+\theta v) - f(y)}{\theta} - \langle \nabla f(x), v\rangle \right| \leq \varepsilon$$

lorsque

$$\|y-x\| \leq \eta/2 \quad \text{et} \quad \theta \leq \eta/2\|v\| .$$

Cela implique que si $\alpha \leq \eta/2$ et $\beta \leq \eta/2\|v\|$,

$$(8) \quad \sup_{\|y-x\| \leq \alpha} \ \sup_{\theta \leq \beta} \frac{f(y+\theta v) - f(y)}{\theta} \leq \langle \nabla f(x), v\rangle + \varepsilon .$$

En prenant le infimum par rapport à α et β, il vient

$$(9) \quad D_c f(x)(v) \leq \langle\ f(x), v\rangle + \varepsilon .$$

Ce qui, joint à (4), implique (5). □

2. DÉRIVABILITÉ AU SENS DE CLARKE DES FONCTIONS CONVEXES CONTINUES

Nous allons montrer que toute fonction convexe continue sur l'intérieur de son domaine est à la fois dérivable à droite et dérivable au sens de Clarke et que les deux dérivées coïncident (c'est-à-dire qu'elle est régulière).

Proposition 1. Soit $f : U \to]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe de domaine non vide. Soient $x \in \mathrm{Dom}\, f$ et $v \in U$ deux éléments tels que le segment

$\{x+\theta v\}_{\theta\in[-1,+1]}$ soit contenu dans le domaine de f . Alors $Df(x)(v)$ existe et vérifie

(1) $f(x) - f(x-v) \leq Df(x)(v) \leq f(x+v) - f(x)$.

De plus

(2) $v \to Df(x)(v)$ est convexe et positivement homogène.

Démonstration. Soit $\theta \in]0,1]$. On remarque d'abord que

(3) $f(x) - f(x-v) \leq \dfrac{f(x+\theta v) - f(x)}{\theta}$.

[En effet, $x = \frac{1}{1+\theta}(x+\theta v) + \frac{1}{1+\theta}(x-v)$. Puisque f est convexe, on en déduit que $f(x) \leq \frac{1}{1+\theta} f(x+\theta v) + \frac{1}{1+\theta} f(x-v)$ et par suite, l'inégalité (3).]

D'autre part, la fonction $\theta \to \dfrac{f(x+\theta v) - f(x)}{\theta}$ est croissante: si $0 < \theta_1 < \theta_2 \leq 1$, alors

$$f(x+\theta_1 v) - f(x) = f\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}(x+\theta_2 v) + \left(1 - \frac{\theta_1}{\theta_2}\right)x\right) - f(x)$$

$$\leq \frac{\theta_1}{\theta_2} f(x+\theta_2 v) + \left(1 - \frac{\theta_1}{\theta_2}\right) f(x) - f(x) .$$

Donc

(4) $\dfrac{f(x+\theta_1 v) - f(x)}{\theta_1} \leq \dfrac{f(x+\theta_2 v) - f(x)}{\theta_2}$.

Par suite $Df(x)(v)$ existe et

$$f(x) - f(x-v) \leq \inf_{\theta>0} \frac{f(x+\theta v) - f(x)}{\theta}$$

$$= \lim_{\theta\to 0^+} \frac{f(x+\theta v) - f(x)}{\theta}$$

$$= Df(x)(v) .$$

De plus, l'inégalité (4) avec $\theta_2 = 1$ implique que $Df(x)(v) \le f(x+v) - f(x)$.

Enfin, puisque $\frac{f(x+\theta(\lambda v+(1-\lambda)w)) - f(x)}{\theta} \le \lambda \frac{f(x+\theta v) - f(x)}{\theta} + (1-\lambda) \frac{f(x+\theta w) - f(x)}{\theta}$
on obtient

(5) $Df(x)(\lambda v+(1-\lambda)w) \le \lambda Df(x)(v) + (1-\lambda)Df(x)(w)$. □

Il résulte de cette proposition le résultat suivant:

Théorème 1. Soit $f : U \to]-\infty,+\infty]$ une fonction convexe continue sur l'intérieur supposé non vide de son domaine. Alors, f est dérivable à droite et en fait, régulière, en tout point x intérieur à son domaine. De plus

(6) $v \to Df(x)(v)$ est convexe et continue.

Remarque. La propriété (6) s'énonce en disant que f est "quasi-différentiable en x au sens de Pshenichnyi".

Démonstration. Si f est continue en x , qui appartient nécessairement à l'intérieur du domaine de f , la proposition 1 implique que $Df(x)(v)$ existe puisque x est le centre d'une boule de rayon η contenue dans $\mathrm{Dom}\, f$ telle que

(7) $\forall w \in \eta B \quad |f(x+w) - f(x)| \le 1$.

En effet, il suffit de remplacer v par $w = \eta \frac{v}{\|v\|}$; les inégalités (1) et (7) impliquent que

(8) $|Df(x)(v)| \le \frac{1}{\eta} \|v\|$.

Nous allons démontrer maintenant que f est dérivable au sens de Clarke et que $D_c f(x)(v) \le Df(x)(v) + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Soit $\lambda > 0$. Puisque f est continue en x , la fonction $\{\theta,y\} \to \frac{f(y+\theta v) - f(y)}{\theta}$ est continue en $\{\lambda,x\}$; il existe donc $\alpha > 0$ tel que

$$\frac{f(y+\theta v) - f(y)}{\theta} \le \frac{f(x+\theta v) - f(x)}{\lambda} + \varepsilon$$

dès que $|\theta-\lambda| \le \alpha$ et $\|y-x\| \le \alpha$. Ceci entraîne en particulier que

$$\sup_{\|y-x\|\leq\alpha} \frac{f(y+(\lambda+\alpha)v))-f(y)}{\lambda+\alpha} \leq \frac{f(x+\lambda v)-f(x)}{\lambda} + \varepsilon \; .$$

On en déduit, en prenant le infimum par rapport à λ et α, que

$$Df(x)(v) \leq D_c f(x)(v) = \inf_{\alpha,\beta>0} \sup_{\|y-x\|\leq\alpha} \frac{f(y+\beta v)-f(y)}{\beta}$$

$$\leq \inf_{\lambda>0} \frac{f(x+\lambda v)-f(x)}{\lambda} + \varepsilon = Df(x)(v) + \varepsilon \; .$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient l'égalité

(9) $Df(x) = D_c f(x)(v)$

c'est-à-dire, que f est régulière en x. □

Rappelons le résultat suivant:

Proposition 2. Soit $f : U \to]-\infty,+\infty]$ une fonction convexe de domaine non vide. Alors les ensembles suivants sont égaux:

$$(10)\quad \begin{cases} \{p \in U^* \text{ tels que } f(x) - f(y) \leq \langle p,x-y\rangle \text{ pour tout } y \in U\} = \\ \{p \in U^* \text{ tels que } \langle p,v\rangle \leq Df(x)(v) \text{ pour tout } v \in U\} \; . \end{cases}$$

Démonstration. Désignons par A le premier ensemble et par B le second. Si $p \in A$ et si $\theta \in]0,1]$, on obtient, pour tout $v \in U$:

$$\langle p,v\rangle \leq \frac{1}{\theta} \langle p,x+\theta v-x\rangle \leq \frac{1}{\theta} (f(x+\theta v)-f(x)) \; .$$

En faisant tendre θ vers 0, on en déduit que $p \in B$.

Inversement, l'inégalité (1) implique que si $p \in B$, alors $\langle p,v\rangle \leq Df(x)(v) \leq f(x+v) - f(x)$ pour tout $v \in U$. En prenant $v = y - x$, il en résulte que $p \in A$. □

Définition 1. On appelle "sous-différentiel" $\partial f(x)$ de f en x l'un des ensembles égaux (10).

On déduira de la proposition 4.1 que toute fonction convexe continue est sous-différentiable en tout point intérieur à son domaine.

Remarque. Dans le micro-cours "Systèmes dynamiques multivoques discrets et correspondances monotones", nous avons démontré que, si U est un espace de Hilbert, toute fonction convexe semi-continue inférieurement de domaine non vide est sous-différentiable et que

$$(11)\quad \begin{cases} \text{(i)} & \mathrm{Int\,Dom}\, f = \mathrm{Int}\, D(\partial f) \\ \text{(ii)} & \overline{\mathrm{Dom}\, f} = \overline{D(\partial f)} \end{cases}$$

où $D(\partial f) = \{x \in U \text{ tels que } \partial f(x) \neq \phi\}$ (Voir proposition 4.1 de ce micro-cours). Mentionnons aussi que la correspondance $x \mapsto \partial f(x)$ est monotone maximale et cycliquement monotone. □

3. DÉRIVABILITÉ AU SENS DE CLARKE DES FONCTIONS LOCALEMENT LIPSCHITZIENNES

Nous allons montrer que non seulement les fonctions continûment dérivables et les fonctions convexes continues sont dérivables au sens de Clarke, mais que, plus généralement, les fonctions localement lipschitziennes bénéficient de cette propriété.

Définition 1. Nous dirons qu'une fonction $f : U \to]-\infty,+\infty]$ de domaine non vide est "localement lipschitzienne" sur l'intérieur de son domaine si, en tout $x \in \mathrm{Int\,Dom}\, f$, il existe $\eta > 0$ et $L > 0$ tels que

$$(1)\quad y,z \in x + \eta B\ ,\quad |f(y) - f(z)| \leq L\|y-z\|\ .$$

Théorème 1. Toute fonction localement lipschitzienne $f : U \to]-\infty,+\infty]$ est dérivable au sens de Dini et au sens de Clarke sur l'intérieur de son domaine. Pour tout $x \in \mathrm{Int\,Dom}\, f$,

$$(2)\quad v \to D_c f(x)(v) \ \text{ est positivement homogène, convexe et continue.}$$

De plus,

$$(3)\quad \{x,v\} \in \mathrm{Int\,Dom}\, f \times U \to D_c f(x)(v) \ \text{ est semi-continue supérieurement.}$$

Remarque. Nous savons que les fonctions continûment dérivables sont localement lipschitziennes. Le théorème 1.1 implique que la dérivée au sens de Clarke $D_c f(x)(v)$ coïncide avec celle de Gâteaux $\langle \nabla f(x), v\rangle$. Nous savons également que les fonctions convexes continues sont localement lipschitziennes (voir par exemple le théorème 3.8.2 de [AAA]). Le théorème 2.1 implique que la dérivée au sens de Clarke $D_c f(x)(v)$ coïncide avec la dérivée à droite $Df(x)(v)$. Donc la dérivée au sens de Clarke des fonctions localement lipschitziennes fournit une généralisation naturelle des concepts de dérivées de Gâteaux de l'analyse et de dérivée à droite de l'analyse convexe.

Démonstration du théorème 1. Soit $x \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$. Puisque f est localement lipschitzienne, il existe $\eta > 0$ et $L > 0$ tels que (1) ait lieu. Donc, pour tout $\alpha \le \eta/2$ et $\beta \le \eta/2\|v\|$,

$$-L\|v\| \le \frac{f(y+\theta v)-f(y)}{\theta} \le L\|v\|$$

lorsque $y \in x + \alpha\beta$ et $\theta \le \beta$. Il en résulte que

$$\begin{aligned} -L\|v\| \le D_d f(x)(v) &= \inf_{\beta>0} \sup_{\theta\le\beta} \frac{f(x+\theta v)-f(x)}{\theta} \\ \le D_c f(x)(v) &= \inf_{\alpha,\beta>0} \sup_{\substack{\|y-x\|\le\alpha \\ 0<\theta\le\beta}} \frac{f(y+\theta v)-f(y)}{\theta} \le L\|v\| \end{aligned}$$

c'est-à-dire que f est à la fois dérivable au sens de Dini et au sens de Clarke; en particulier, on obtient l'inégalité:

$$(4) \quad |D_c f(x)(v)| \le L\|v\| .$$

Nous savons déjà que $v \to D_c f(x)(v)$ est positivement homogène. Montrons que cette fonction est convexe. En écrivant que

$$\frac{f(y+\theta(\lambda v+(1-\lambda)w))-f(y)}{\theta} = (1-\lambda)\ \frac{f(z+\alpha w)-f(z)}{\alpha} + \lambda\ \frac{f(y+\beta v)-f(y)}{\beta}$$

où $z = y + \theta\lambda v$ converge vers x, $\alpha = (1-\lambda)\theta$ et $\beta = \lambda\theta$ convergent vers 0, on obtient, en prenant les limites supérieures des deux membres, que

(5) $D_c f(x)(\lambda v + (1-\lambda)w) \leq D_c f(x)(v) + (1-\lambda) D_c f(x)(w)$.

Il nous reste à démontrer la semi-continuité supérieure de $\{x,v\} \to D_c f(x)(v)$. Par définition de $D_c f(x)(v)$, on peut associer à tout $\varepsilon > 0$ un nombre α_0 tel que

(6) $$\sup_{\substack{\|z-x\| \leq 2\alpha_0 \\ \lambda \leq \alpha_0}} \frac{f(z+\lambda v)-f(z)}{\lambda} \leq D_c f(x)(v) + \varepsilon/2 .$$

On peut toujours prendre α_0 tel que $\alpha_0(2+ v + \frac{\varepsilon}{2L}) \leq \eta$. Dans ce cas, si $\|z-y\| \leq \alpha_0$, si $\|y-x\| \leq \alpha_0$ et si $\lambda \leq \alpha_0$, on obtient, puisque f est localement lipschitzienne,

(7) $$\frac{f(z+\lambda w)-f(z)}{\lambda} \leq \frac{f(z+\lambda v)-f(z)}{\lambda} + L\|v-w\| .$$

Par suite, si $y \in x + \alpha_0 B$, si $\alpha \leq \alpha_0$ et si $\beta \leq \beta_0$,

$$\sup_{\substack{\|z-y\| \leq \alpha \\ \lambda \leq \beta}} \frac{f(z+\lambda w)-f(z)}{\lambda} \leq \sup_{\substack{\|z-x\| \leq 2\alpha_0 \\ \lambda \leq \alpha_0}} \frac{f(z+\lambda v)-f(z)}{\lambda} + L\|v-w\|$$

$$\leq D_c f(x)(v) + \varepsilon/2 + L\|v-w\| \leq D_c f(x)(v) + \varepsilon ,$$

lorsque $\|v-w\| \leq \frac{\varepsilon}{2L}$.

En faisant tendre α et β vers 0 , on déduit que

$$\begin{cases} D_c f(y)(w) \leq D_c f(x)(v) + \varepsilon & \text{lorsque } \|y-x\| \leq \alpha_0 \\ \text{et } \|v-w\| \leq \frac{\varepsilon}{2L} \end{cases}$$

c'est-à-dire que $D_c f(x)(v)$ est semi-continue supérieurement en $\{x,v\}$. □

Nous allons établir maintenant quelques propriétés élémentaires des dérivées au sens de Clarke.

Proposition 1. Soient f et g deux fonctions localement lipschitziennes de U dans $]-\infty,+\infty]$ et $x \in \text{Int Dom } f \cap \text{Int Dom } g$. Alors

$$(8) \quad \begin{cases} \text{(i)} \quad D_d(\alpha f+\beta g)(x)(v) \leq \alpha D_d f(x)(v) + \beta D_d g(x)(v) \\ \text{(ii)} \quad D_c(\alpha f+\beta g)(x)(v) \leq \alpha D_c f(x)(v) + \beta D_c g(x)(v) \end{cases}$$

si $\alpha, \beta > 0$. Si $x \in \text{Int Dom } f$, alors

$$(9) \quad D_c(-f)(x)(v) = D_c f(x)(-v) \ .$$

Démonstration. Les formules (8) sont évidentes. Pour démontrer (9), on écrit

$$(10) \quad \frac{-f(y+\lambda v) - (-f(y))}{\lambda} = \frac{f(z+\lambda(-v)) - f(z)}{\lambda}$$

où $z = y + \lambda v$ converge vers x lorsque y converge vers x et $\lambda > 0$ tend vers 0 . En prenant les limites supérieures lorsque y et z convergent vers x et λ converge vers 0 , le membre de gauche converge vers $D_c(-f)(x)(v)$ et celui de droite vers $D_c f(x)(-v)$. □

Proposition 2. Soit f une fonction localement lipschitzienne de U dans $]-\infty,+\infty]$, de domaine non vide. Soit P un cône convexe fermé de U . Si f est croissante sur P au sens où

$$(11) \quad f(x) \leq f(x+v) \ , \quad \forall v \in P \ ,$$

alors

$$(12) \quad \forall v \in V \ , \quad D_c f(x)(v) \leq \sigma(P^+,v)$$

où $\sigma(P^+,v)$ est la fonction d'appui du cône polaire positif P^+ de P .

Démonstration. On obtient, $\forall v \in P$, l'inégalité $\frac{f(y+\theta v+\theta(-v)) - f(y+\theta v)}{\theta} \leq 0$. En prenant la limite sup lorsque y tend vers x et θ tend vers 0 , on en déduit que $D_c f(x)(-v) \leq 0$, $\forall v \in P$. D'autre part, $\sigma(P^+,v) = 0$ si $v \in -P$ et $\sigma(P^+,v) = +\infty$ si $v \notin -P$. Par suite, l'inégalité (12) est démontrée. □

Proposition 3 (Principe variationnel). Soit $f : U \to]-\infty,+\infty]$ une fonction localement lipschitzienne. Supposons que $x \in \text{Int Dom } f$ soit un minimum local de f . Alors, pour tout $v \in U$, $D_d f(x)(v) \geq 0$. Si x est un minimum global de f

sur un sous-ensemble convexe X , alors

(13) $\forall y \in X \ , \quad D_d f(x)(y-x) \geq 0$.

Démonstration. Supposons que x minimise f sur la boule $x + \eta B$ de centre x et de rayon η . Alors, si $\alpha \leq \eta/2$ et $\beta \leq \eta/2\|v\|$, on a, si $\theta \leq \beta$

$$0 \leq \frac{f(x+\theta v) - f(x)}{\theta} \leq \sup_{\theta \leq \beta} \frac{f(x+\theta v) - f(x)}{\theta} .$$

En prenant la limite quand β tend vers 0 , on obtient $D_d f(x)(v) \geq 0$. Si x est convexe, on peut prendre $v = y - x$ puisque $x + \theta v = (1-\theta)x + \theta y \in X$ si est assez petit. □

Nous allons étudier maintenant la dérivabilité des fonctions composées.

Proposition 4. Soit $f : U \to]-\infty,+\infty]$ une fonction localement lipschitzienne. Soit h une fonction continûment dérivable sur un voisinage de $f(x)$. Alors

$$(14) \quad \begin{cases} \text{(i)} \quad D_c(h\circ f)(x)(v) = h'(f(x))D_c f(x)(v) \\ \text{(ii)} \quad D_d(h\circ f)(x)(v) = h'(f(x))D_d f(x)(v) \ . \end{cases}$$

En particulier, si on suppose que f est régulière en x , alors $h \circ f$ est également régulière en x et

(15) $D(h\circ f)(x)(v) = h'(f(x))Df(x)(v)$.

Démonstration. On peut toujours se ramener au cas où $h'(f(x)) > 0$. Puisque h est continûment dérivable au voisinage de $f(x)$, on peut associer à tout $\varepsilon > 0$ un $\eta > 0$ tel que

$$(16) \quad \begin{cases} |h(t) - h(s) - (t-s)h'(f(x))| = \left|\int_s^t (h'(r) - h'(f(x))\, dr\right| \leq \varepsilon|t-s| \\ \text{si} \quad |t-f(x)| \leq \eta \quad \text{et} \quad |s-f(x)| \leq \eta \ . \end{cases}$$

Alors, pour tout $\alpha < \eta/2L$ et $\beta < \eta/2L\|v\|$, on prend $t = f(y+\theta v)$ et $s = f(y)$. On remarque que $|t-s| \leq L\theta\|v\|$. Donc l'inégalité (16) implique que

$$-\varepsilon L\|v\| + h'(f(x))\,\frac{f(y+\theta v)-f(y)}{\theta} \le \frac{h[f(y+\theta v)]-h[f(y)]}{\theta} \le h'(f(x))\,\frac{f(y+\theta v)-f(y)}{\theta} + \varepsilon L\|v\|.$$

En prenant $y = x$ et la limite supérieure quand θ vers 0^+, on obtient $-\varepsilon L\|v\| + h'(f(x))D_d f(x)(v) \le D_d(h\circ f)(x)(v) \le h'(f(x))D_d f(x)(v) + \varepsilon L\|v\|$. Il suffit alors de faire tendre ε vers 0. En prenant la limite supérieure quand θ tend vers 0^+ et y tend vers x, on obtient

$$-\varepsilon L\|v\| + h'(f(x))D_c f(x)(v) \le D_c(h\circ f)(x)(v) \le h'(f(x))D_c f(x)(v) + \varepsilon L\|v\| .$$

En faisant tendre ε vers 0, on déduit l'égalité $D_c(h\circ f)(x)(v) = h'(f(x))D_c f(x)(v)$. □

Nous allons étudier maintenant la dérivabilité de la fonction composée $g = f \circ G$ où G envoie un ouvert Ω d'un espace de Hilbert V dans le domaine $\mathrm{Dom}\, f$ de f.

Définition 2. Nous dirons que G est "dérivable au sens de Gâteaux" en $x \in \Omega$ s'il existe $\nabla G(x) \in L(V,U)$ tel que

$$(17) \quad \forall v \in V,\ \frac{G(x+\theta v)-G(x)}{\theta} \text{ converge vers } \nabla G(x)\cdot v \text{ dans } U \text{ quand } \theta \to 0 .$$

Nous dirons que G est "dérivable au sens de Fréchet" (resp. "strictement dérivable au sens de Fréchet") si

$$(18) \quad \lim_{\|v\|\to 0} \frac{G(x+v)-G(x)-\nabla G(x)\cdot v}{\|v\|} = 0$$

$$(19) \quad (\text{resp.} \lim_{\substack{\|y-x\|\to 0\\ \|v\|\to 0}} \frac{G(y+v)-G(y)-\nabla G(x)\cdot v}{\|v\|} = 0) .$$

Proposition 5. Supposons que f soit localement lipschitzienne. Si G est dérivable au sens de Gâteaux en x, alors

$$(20) \quad D_d g(x)(v) = (D_d f)(G(x))(\nabla G(x)\cdot v) .$$

Si G est strictement dérivable au sens de Fréchet en x, alors

$$(21) \quad D_c g(x)(v) \le (D_c f)(G(x))(\nabla G(x)\cdot v) .$$

En particulier, si l'on suppose que f est régulière en Gx, alors g est régulière en x et

$$(22)\quad Dg(x)(v) = (Df)(G(x))(\nabla G(x)\cdot v)\ .$$

Démonstration.

(a) Puisque f est localement lipschitzienne, nous pouvons écrire que, pour θ suffisamment petit,

$$-L\left\|\frac{G(x+\theta v)-G(x)}{\theta} - \nabla G(x)\cdot v\right\| + \frac{f(G(x)+\theta\nabla G(x)v)-f(G(x))}{\theta}$$

$$\leq \frac{f(G(x+\theta v)) - f(G(x))}{\theta}$$

$$\leq \frac{f(G(x)+\theta\nabla G(x)\cdot v)) - f(G(x))}{\theta} + L\left\|\frac{G(x+\theta v) - G(x)}{\theta} - \nabla G(x)v\right\|\ .$$

Puisque G est dérivable au sens de Gâteaux, on en déduit, par passage aux limites supérieures, que

$$D_d f(G(x))(\nabla G(x)v) \leq D_d g(x)(v) \leq D_d f(G(x)(\nabla G(x)v)\ .$$

(b) Puisque f est localement lipschitzienne, on peut associer à tout $\varepsilon > 0$ et à tout $u \in U$ des nombres α, β tels que

$$(23)\quad \frac{f(z+\theta w) - f(z)}{\theta} \leq D_c f(G(x))(u) + \varepsilon$$

lorsque $\|z-G(x)\| \leq \alpha$, $\theta \leq \beta$ et $\|w-u\| \leq \frac{\varepsilon}{2L}$. Prenons $u = \nabla G(x)\cdot v$. Il existe $\eta \leq \beta$ tel que si $\|y-x\| \leq \eta$ et $\theta \leq \eta$, $\|G(y)-G(x)\| \leq \alpha$ et $\left\|\nabla G(x)\cdot v - \frac{G(y+\theta v) - G(y)}{\theta}\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2L}$ puisque G est strictement dérivable. En prenant $z = G(y)$ et $w = \frac{G(y+\theta v)-G(y)}{\theta}$, on déduit de (23) que

$$D_c g(x)(v) \leq \sup_{\substack{\|y-x\|\leq\eta\\ \theta\leq\eta}} \frac{g(y+\theta v) - g(y)}{\theta} \leq D_c f(G(x))(\nabla G(x)\cdot v) + \varepsilon$$

(c) Par suite, si les dérivées de f en $G(x)$ au sens de Dini et au sens de Clarke coïncident, alors $D_c g(x)(v) = D_c f(G(x))(\nabla G(x)\cdot v)$. Par conséquent, on en déduit que si f est régulière en $G(x)$, la fonction $g = f\circ G$ est régulière en x . En particulier, si l'on prend pour G un opérateur linéaire continu $A \in L(U,V)$, on obtient alors les formules

$$(24)\quad \begin{cases} \text{(i)} & D_d(fA)(x)(v) = (D_d f)(Ax)(Av) \\ \text{(ii)} & D_c(fA)(x)(v) \leq (D_c f)(Ax)(Av) \ . \end{cases}$$

Remarque. Si $A \in L(U,V)$ est surjective, alors

$$(25)\quad D_c(fA)(x)(v) = (D_c f)(Ax)(Av) \ .$$

En effet, dans ce cas, le théorème de Banach (voir théorème 4.3.1, §4.3 de [AFA]) implique que $A(x+\alpha B_U)$ contient une boule $Ax + \gamma(\alpha)B_V$. Par suite

$$\sup_{\substack{\|z-Ax\|\leq\gamma(\alpha) \\ \theta\leq\beta}} \frac{f(z+\theta Av) - f(z)}{\theta} \leq \sup_{\substack{\|y-x\|\leq\alpha \\ \theta\leq\beta}} \frac{f(Ay+\theta Av) - f(Ay)}{\theta}$$

ce qui entraîne que $D_c f(Ax)(Av) \leq D_c(fA)(x)(v)$. □

Soient f une fonction *lipschitzienne* de U dans $]-\infty,+\infty]$ et $B \in L(U,V)$ un opérateur linéaire continu *surjectif* de U sur V . On définit

$$(26)\quad \alpha(y) = \inf_{Bx=y} f(x)$$

en posant $\alpha(y) = +\infty$ si $y \notin B \operatorname{Dom} f$.

Proposition 6. Supposons que f soit lipschitzienne et $B \in L(U,V)$ soit surjective. Alors α est lipschitzienne si son domaine est non vide. Si $\alpha(y) = f(\bar{x})$ où $B\bar{x} = y$, alors

$$(27)\quad \forall v \in V\ , \quad D_d\alpha(y)(v) \leq \inf_{Bu=v} D_d f(\bar{x})(u)$$

et

$$(28)\quad \forall u \in U\ , \quad 0 \leq D_c\alpha(y)(-Bu) + D_d f(\bar{x})(u) \ .$$

Démonstration.

(a) Prenons y et z dans V et $\varepsilon > 0$ arbitraires. Il existe $y_\varepsilon \in U$

tel que $f(y_\varepsilon) \le \alpha(y) + \varepsilon$ et $By_\varepsilon = y$. Puisque B est surjective, le théorème de Banach (voir par exemple le théorème 4.3.1, §4.3 de [AFA]) implique l'existence d'une constante $c > 0$ et d'une solution z_ε de l'équation $Bz_\varepsilon = z$ vérifiant $\|y_\varepsilon - z_\varepsilon\| \le c\|y-z\|$. Par suite

$$\begin{aligned}\alpha(z) \le f(z_\varepsilon) &\le f(y_\varepsilon) + L\|y_\varepsilon - z_\varepsilon\| \\ &\le \alpha(y) + \varepsilon + Lc\|y-z\| .\end{aligned}$$

Ceci implique que α est lipschitzienne de constante Lc, où L est la constante de Lipschitz de f.

(b) Par suite, α est dérivable au sens de Dini et de Clarke. Soit $\bar{x}$ une solution du problème de minimisation $\alpha(y)$. Alors, pour tout v solution de $Bu = v$, on a

$$\frac{\alpha(y+\theta v) - \alpha(y)}{\theta} \le \frac{f(\bar{x}+\theta v) - f(\bar{x})}{\theta} \tag{29}$$

et, par passage à la limite supérieure,

$$D_d\alpha(y)(v) \le (D_d f)(\bar{x})(u)$$

pour toute solution de l'équation $Bu = v$.

(c) Considérons l'inégalité

$$\begin{aligned}0 &\le \frac{\alpha(y+\theta Bu-\theta Bu) - \alpha(y+\theta Bu)}{\theta} + \frac{f(\bar{x}+\theta v) - f(\bar{x})}{\theta} \\ &\le \sup_{\substack{\|z-y\|\le\alpha \\ \theta\le\beta}} \frac{\alpha(z-\theta Bv) - \alpha(z)}{\theta} + \sup_{\theta\le\beta} \frac{f(\bar{x}+\theta v) - f(\bar{x})}{\theta} .\end{aligned}$$

En passant à la limite quand α et β tendent vers 0, on obtient l'inégalité (28). □

4. GRADIENTS GÉNÉRALISÉS

Définition 1. Soit $f : U \to]-\infty,+\infty]$ une fonction dérivable au sens de Clarke en x. On appelle "gradient généralisé" de f en x le sous-ensemble $\partial f(x)$ de

U^* défini par

(1) $\quad \partial_c f(x) = \{p \in U^* \text{ tels que } \langle p,v\rangle \le D_c f(x)(v) \;, \quad \forall v \in U\}$.

Théorème 1. Soit $f : U \to]-\infty,+\infty]$ une fonction localement lipschitzienne. Elle possède un "gradient généralisé" non vide $\partial f(x)$ en tout point x intérieur à Dm f , qui vérifie

(2) $\quad \partial_c f(x)$ est convexe fermé borné

dont la fonction d'appui $\sigma(\partial_c f(x),v) = \sup \{\langle p,v\rangle \mid p \in \partial_c f(x)\}$ vérifie

(3) $\quad \sigma(\partial_c f(x),v) = D_c f(x)(v)$.

De plus

(4) $\quad \begin{cases} \text{la correspondance } x \in \text{Int Dom } f \to \partial_c f(x) \in U^* \text{ est} \\ \text{hémi-continue supérieurement.} \end{cases}$

Démonstration. Le théorème résulte de la définition et du théorème 3.1. Puisque $D_c f(x)(\cdot)$ est convexe, positivement homogène et continue, c'est la fonction d'appui du sous-ensemble convexe fermé des éléments $p \in U^*$ tels que $\langle p,v\rangle \le D_c f(x)(v)$ pour tout $v \in U$, c'est-à-dire du gradient généralisé $\partial_c f(x)$ de f en x : Donc $\partial_c f(x)$ est non vide, convexe, fermé et (3) a lieu. Puisque $\sigma(\partial_c f(x),v) \le L\|v\| = L\sigma(B^*,v)$, (où B^* est la boule unité de U^*), il en résulte que

(5) $\quad \partial_c f(x) \subset LB$.

Rappelons que $\partial_c f(\cdot)$ est hémi-continue supérieurement si, par définition, $\forall v \in U$, $\sigma(\partial_c f(\cdot),v) = D_c f(\cdot)(v)$ est semi-continue supérieurement (voir M.C. Analyse Non Linéaire, §6). Or ceci est vrai d'après le théorème 3.1. □

Proposition 1. Si f est continûment dérivable, alors le gradient généralisé $\partial_c f(x) = \{\nabla f(x)\}$ est réduit au gradient $\nabla f(x)$ usuel. Si f est convexe et continue alors le gradient généralisé $\partial_c f(x) = \partial f(x)$ est égal au sous-différentiel de f en x .

Démonstration. Le théorème 1.1 montre que si f est continûment dérivable, alors $\sigma(\partial_c f(x),v) = D_c f(x)(v) = \langle\nabla f(x),v\rangle$. Donc $\partial_c f(x) = \{\nabla f(x)\}$. Le théorème 2.1 montre que si f est convexe et continue, alors
$\sigma(\partial_c f(x),v) = D_c f(x)(v) = Df(x)(v)$. Or la dérivée à droite d'une fonction convexe continue est la fonction d'appui du sous-différentiel $\partial f(x)$ (voir Définition 2.1).

Les propositions 3.1 à 3.5 se traduisent de la façon suivante en terme de gradient généralisé.

Proposition 2. Soient f et g deux fonctions localement lipschitziennes. Si $x \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Int} \operatorname{Dom} g$, alors, si α et $\beta > 0$,

$$(6) \qquad \partial_c(\alpha f+\beta g)(x) \subset \alpha\partial_c f(x) + \beta\partial_c g(x) \ .$$

Si $x \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$

$$(7) \qquad \partial_c(-f)(x) = -\partial_c f(x) \ .$$

Si f est croissante sur un cône convexe fermé P , alors

$$(8) \qquad \partial_c f(x) \subset P^+ \ .$$

Si x est un minimum local de f , alors x est un point critique de $\partial f(x)$: $0 \in \partial f(x)$. Si $A \in L(W,U)$ et si $A^* \in L(U^*,W^*)$ désigne son transposé, alors

$$(9) \qquad \partial_c(fA)(x) \subset A^*\partial_c f(Ax)$$

l'égalité de ces ensembles ayant lieu si A est surjective (ou si f est régulière en Ax). Si h est une fonction numérique continûment dérivable sur un voisinage de $f(x)$, alors

$$(10) \qquad \partial_c(h\circ f)(x) = h'(f(x))\partial_c f(x) \ .$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que les gradients généralisés $\partial_c f(x)$ étant convexes, fermés et bornés, sont faiblement compacts et par suite, que

$\partial_c f(x) + A$ est convexe et fermé lorsque A est convexe et fermé. □

La proposition 3.6 se traduit de la façon suivante.

Proposition 3. Soient f une fonction lipschitzienne de U dans $]-\infty,+\infty]$ et $B \in L(U,V)$ un opérateur surjectif. Si $y \in \text{Int}\,(B.\text{Dom}\, f)$ et si $\bar{x}$ est la solution du problème de minimisation

$$(11) \qquad \alpha(y) = \inf_{Bx=y} f(x) = f(\bar{x}) \quad \text{où} \quad B\bar{x} = y\ ,$$

il existe alors $\bar{p} \in V^*$ vérifiant

$$(12) \qquad \bar{p} \in \partial_c \alpha(y) \quad \text{tel que} \quad B^*\bar{p} \in \partial_c f(\bar{x})\ .$$

Démonstration. D'après la proposition 3.6,
$0 \leq D_c\alpha(y)(-Bu) + D_c f(\bar{x})(v) = \sigma(-B^*\partial_c\alpha(y) + \partial_c f(\bar{x}),v)$. Donc $0 \in \partial_c f(\bar{x}) - B^*\partial_c\alpha(y)$.□

Remarque. Un élément $\bar{p} \in V^*$ vérifiant (12) est appelé *multiplicateur de Lagrange* du problème de minimisation d'une fonction lipschitzienne f sous les contraintes linéaires d'égalité $Bx = y$.

Nous poursuivrons l'étude de l'existence de multiplicateurs de Lagrange dans le cas des contraintes linéaires et non linéaires d'inégalité au §7. □

5. CÔNES NORMAUX ET TANGENTS À UN SOUS-ENSEMBLE

Soit $X \in U$ un sous-ensemble *non vide* quelconque de U . Nous désignons par d_X la fonction "distance à X" définie par

$$(1) \qquad d_X(y) = \inf_{y\in X} \|x-y\|\ .$$

Elle est évidemment lipschitzienne de rapport 1 :

$$(2) \qquad |d_X(y) - d_X(z)| \leq \|y-z\|\ .$$

Par suite, elle est dérivable au sens de Clarke.

Définition 1. Soit $x \in U$. Nous dirons que l'ensemble

(3) $T_X(x) = \{v \in U$ tels que $D_c d_X(x)(v) \leq 0\}$

est le *cône tangent* à X en x et que

(4) $N_X(x) = T_X(x)^- = \{p \in U^*$ tels que $\langle p,v\rangle \leq 0$, $\forall v \in T_X(x)\}$

est le *cône normal* à X en x.

Puisque $v \to D_c d_X(x)(v)$ est convexe positivement homogène et continue, $T_X(x)$ est un *cône convexe fermé*. Le cône normal étant le cône polaire négatif de $T_X(x)$, $N_X(x)$ est un *cône convexe fermé.*

Par suite, le théorème de séparation implique que

(5) $T_X(x) = N_X(x)^-$.

Il est utile de définir le cône normal à partir du gradient généralisé de d_X.

Proposition 1. Le cône normal $N_X(x)$ est le cône convexe fermé engendré par le gradient généralisé de d_X en x :

(6) $N_X(x) = (\partial_c d_X(x))^{--}$.

Démonstration. Montrons que $\partial_c d_X(x)$ est contenu dans le cône normal $N_X(x)$. En effet, si $p \in \partial_c d_X(x)$ et si $v \in T_X(x)$, alors $\langle p,v\rangle \leq D_c d_X(x)(v) \leq 0$. Donc le cône convexe fermé engendré par $\partial_c d_X(x)$ est contenu dans le cône normal $N_X(x)$. Pour montrer l'inclusion inverse, il suffit de montrer que $(\partial_c d_X(x))^- \subset T_X(x)$. Soit donc $v_0 \in (\partial_c d_X(x))^-$. Alors $D_c d_X(x)(v_0) = \sigma(\partial_c d_X(x), v_0) = \sup\{\langle p,v_0\rangle \mid p \in \partial_c d_X(x)\} \leq 0$. Donc v_0 appartient bien à $T_X(x)$. □

Nous allons énoncer quelques propriétés élémentaires des cônes tangents et normaux. Tout d'abord, mentionnons le fait suivant

(7) Si $\operatorname{Int} X \neq \phi$ et si $x \in \operatorname{Int} X$, alors $T_X(x) = U$ et $N_X(x) = 0$.

En effet, si $x + \eta B \subset X$, alors, pour tout $v \in U$, $y + \theta v$ appartient à X si $\|y-x\| \leq \alpha$ et si $\theta \leq \beta$ lorsque $\alpha \leq \eta/2$ et $\beta \leq \eta/2\, v$. Donc

$$D_c d_X(x)(v) = \inf_{\alpha,\beta>0} \sup_{\substack{\|y-x\|\leq\alpha \\ \theta\leq\beta}} \frac{d_X(y+\theta v) - d_X(y)}{\theta} \leq 0 \text{ . } \square$$

Proposition 2 (principe variationnel). Soit f une fonction localement lipschitzienne. Supposons que $x \in X$ iminimise f sur X . Il existe $L > 0$ tel que

$$\text{(8)} \qquad \forall y \in U \text{ , } \quad f(x) + Ld_X(x) \leq f(y) + Ld_X(y)$$

et par suite, $0 \in \partial_c f(x) + N_X(x)$ (ou encore, $-\partial_c f(x) \cap N_X(x) \neq \phi$) .

Démonstration. Puisque f est localement lipschitzienne, il existe un voisinage $x + \eta B$ sur lequel f est lipschitzienne de constante L . Prenons $\alpha < \eta/2$ et $\varepsilon < \frac{\eta-2\alpha}{2}$ destiné à tendre vers 0 . Soit $y \in x + \alpha B$. On peut lui associer $y_\varepsilon \in X$ tel que $\|y-y_\varepsilon\| \leq d_X(y)(1+\varepsilon)$. D'autre part, $\|x-y\| \leq \alpha \leq \eta$, $d_X(y) \leq \|x-y\| \leq \alpha$ et $\|x-y_\varepsilon\| \leq \|x-y\| + \|y-y_\varepsilon\| \leq \alpha + \alpha(1+\varepsilon) = \alpha(2+\varepsilon) \leq \eta$. Par suite, $f(y_\varepsilon) \leq f(y) + L\|y-y_\varepsilon\| \leq f(y) + L(1+\varepsilon)d_X(y)$. Puisque $d_X(x) = 0$ (car $x \in X$) et puisque $f(x) \leq f(y_\varepsilon)$ (car $y_\varepsilon \in X$) , on obtient $f(x) + Ld_X(x) \leq f(y) + L(1+\varepsilon)d_X(y)$ pour tout $y \in x + \alpha B$. En faisant tendre vers 0 , on en déduit que x *est un minimum local de la fonction* $y \mapsto f(y) + Ld_X(y)$. Par suite- d'après les propositions 3.1, 3.2 et 3.3, on obtient l'inégalité

$$0 \leq D_d(f\ Ld_X)(x)(v) \leq D_d f(x)(v) + LD_d d_X(x)(v) \leq \sigma(\partial_c f(x)\ L\ {}_c d_X(x),v)$$

pour tout $v \in U$.

Cela implique que $0 \in \partial_c f(x) + L\partial_c d_X(x) \subset \partial_c f(x) + N_X(x)$, d'après la proposition 1. $\square$

Remarque. La première assertion est *très importante* au sens où elle permet de remplacer un problème de minimisation *avec* contraintes par un problème de minimisation *sans* contrainte.

Proposition 3.

(a) Soient $p \in U^*$ et $x \in X$ vérifiant $<p,x> = \max\limits_{y \in N} <p,y>$. Alors $<\frac{p}{\|p\|},v> \leq D_d d_X(x)(v)$ pour tout $v \in U$ et par suite, $p \in N_X(x)$ et $<p,v> \leq 0$ pour tout $v \in T_X(x)$.

(b) Soient $y \notin \overline{X}$ et $x \in \overline{X}$ vérifiant $\|y-x\| = d_X(y)$. Alors

$$D_d d_X(y)(v) \leq <\frac{y-x}{d_X(y)},v> \leq D_d d_X(x)(v) \ , \quad \forall v \in U \ . \tag{9}$$

Par suite, $y - x \in N_X(x)$ et $<y-x,v> \leq 0$ pour tout $v \in T_X(x)$.

Démonstration.

(a) Puisque la forme linéaire $y \mapsto \|-p,y\|$ est lipschitzienne (avec $L = \|p\|_*$) et que x minimise sur X la fonction $y \to <-p,y>$, la proposition précédente montre que $0 \leq D_d<-p,x>(v) + \|p\|_* D_d d_X(x)(v)$. Puisque $D_d(-<p,x>)(v) = -<p,v>$, on obtient l'inégalité cherchée.

(b) Puisque la fonction $z \mapsto \|y-z\|$ est lipschitzienne (avec $L = 1$) et puisque x minimise sur X cette fonction dont le gradient en x est $\frac{x-y}{d_X(y)}$, on déduit de la proposition précédente que

$$0 \leq <\frac{x-y}{d_X(y)},v> + D_d d_X(x)(v) \ , \quad \forall v \in U \ .$$

(c) L'autre inégalité de (9) résulte de l'inégalité

$$D_d d_X(y)(v) \leq \limsup_{\theta \to 0^+} \frac{\|y-x+\theta v\| - \|y-x\|}{\theta} = <\frac{y-x}{d_X(y)},v> \quad \square$$

Considérons maintenant le cas où X est convexe fermé.

Il est clair que *si* X *est convexe la fonction* d_X *est convexe.* En effet, on peut associer à $\varepsilon > 0$ des éléments x_ε et $y_\varepsilon \in X$ tels que $\|x-x_\varepsilon\| \leq d_X(x) + \varepsilon$ et $\|y-y_\varepsilon\| \leq d_X(y) + \varepsilon$. Donc

$$d_X(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \|\lambda x+(1-\lambda)y-\lambda x_\varepsilon-(1-\lambda)y_\varepsilon\| \leq \lambda d_X(x)+(1-\lambda)d_X(y) + \varepsilon \ .$$

Il suffit alors de faire tendre ε vers 0 . □

Proposition 4. Soient X un sous-ensemble convexe fermé et $x \in X$. Alors

$$N_X(x) = \{p \in U^* \text{ tels que } \langle p,x\rangle = \max_{y\in X} \langle p,y\rangle\} .$$

Démonstration. La proposition 3 implique que $N_X(x)$ contient les éléments $p \in U^*$ tels que $\langle p,x\rangle = \max_{y\in X} \langle p,y\rangle$. *Inversement,* prenons $p \in N_X(x)$ et $v = y - x$ où $y \in X$. Alors, $D_c d_X(x)(y-x) = Dd_X(x)(y-x) \le d_X(x+y-x) - d_X(x) = 0$. Par suite, $y - x \in T_X(x)$ et $\langle p,y-x\rangle \le 0$. □

Proposition 5. Pour tout $x_0 \in X$, pour tout $v_0 \in T_X(x_0)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des voisinages $N(x_0)$ et $N(v_0)$ de x_0 et v_0 et $\theta(x_0,v_0) > 0$ tels que

$$\forall x \in N(x_0) \ , \quad v \in N(v_0) \quad \text{et} \quad \theta \le \theta(x_0,v_0) \ , \quad \frac{d_X(x+\theta v)}{\theta} \le \varepsilon \ .$$

Démonstration. On peut associer à tout $\varepsilon > 0$ des nombres $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que

$$\sup_{\substack{\|z-x_0\|\le\alpha \\ z\in X \\ \theta\le\beta}} \frac{d_X(z+\theta v_0)}{\theta} \le \sup_{\substack{\|z-x_0\|\le\alpha \\ \theta\le\beta}} \frac{d_X(z+\theta v_0) - d_X(z)}{\theta} \le D_c d_X(x_0)(v_0) + \frac{\varepsilon}{2} \le \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

D'autre part, si $\|w-v_0\| \le \frac{\varepsilon}{2}$, on a l'inégalité

$$d_X(z+\theta w) \le d_X(z+\theta v_0) + \theta\|w-v_0\| \le d_X(z+\theta v_0) + \theta\frac{\varepsilon}{2} \ .$$

La proposition est alors démontrée avec

$$N(x_0) = \{x \in X \text{ tels que } \|x-x_0\| \le \alpha\} \ , \quad N(v_0) = v_0 + \frac{\varepsilon}{2}B \ , \quad \text{et} \quad \theta(x_0,v_0) = \beta \ . \ \square$$

Cette proposition est utile pour démontrer les deux résultats suivants de convergence uniforme.

Théorème 1. Soit S une correspondance de X dans U vérifiant

$$(10) \quad \begin{cases} \text{(i)} & \forall x \in X \ , \quad S(x) \subset T_X(x) \\ \text{(ii)} & S \text{ est semi-continue supérieurement.} \end{cases}$$

Alors la fonction définie par

$$(11) \qquad a^{\#}(x,\theta) = \sup_{v \in S(x)} \frac{d_X(x+\theta v)}{\theta}$$

converge vers 0 avec θ uniformément sur tout compact.

Démonstration. Soit K un compact contenu dans X. Puisque S est semi-continue supérieurement, le graphe $G_K(S)$ de la restriction de S à K est compact. Considérons les voisinages $N(x) \times N(v)$ définis par la proposition 5. On peut dès lors recouvrir $G_K(S)$ par m voisinages $N(x_i) \times N(v_i)$. En posant $\theta(\varepsilon) = \min_{i=1,\dots,m} \theta(x_i,v_i) > 0$, la proposition 5 entraîne que pour tout $x \in K$, pour tout $v \in S(x)$, pour tout $\theta \le \theta(\varepsilon)$, $\frac{d_X(x+\theta v)}{\theta} \le \varepsilon$. □

Théorème 2. Soit S une correspondance de X dans U vérifiant

$$(12) \quad \begin{cases} \text{(i)} & \forall x \in S \ , \quad S(x) \cap T_X(x) \neq \phi \\ \text{(ii)} & S \text{ est semi-continue inférieurement.} \end{cases}$$

Alors la fonction définie par

$$(13) \qquad a^{b}(x,\theta) = \inf_{v \in S(x)} \frac{d_X(x+\theta v)}{\theta}$$

converge vers 0 avec θ uniformément sur tout compact.

Démonstration. Fixons $x_0 \in X$ et $v_0 \in S(x_0) \cap T_X(x_0)$. Puisque S est semi-continue inférieurement, on peut associer à tout voisinage $N(v_0)$ de v_0 un voisinage $M(x_0)$ de x_0 tel que $\forall x \in M(x_0)$, $N(v_0) \cap S(x) \neq \phi$. Prenons pour voisinages $N(v_0)$ et $N(x_0)$ ceux définis dans la proposition 5; elle implique que

$$(14) \qquad \forall x \in N(x_0) \cap M(x_0) \ , \quad \forall \theta \le \theta(x_0,v_0) \ , \quad a^{b}(x,\theta) \le \frac{d_X(x+\theta v)}{\theta} \le \varepsilon$$

(où v est pris dans $N(v_0) \cap S(x)$) . Si K est un compact de X , on peut le recouvrir par m voisinages $N(x_i) \cap M(x_i)$. En prenant $\theta \leq \min_{i=1,\ldots,m} \theta(x_i, v_i)$, on en déduit que pour tout $x \in K$, $a^b(x,\theta) \leq \varepsilon$. □

Remarque. Dans la proposition suivante, nous énonçons quelques propriétés supplémentaires des cônes tangents.

Proposition 6. Soient X un sous-ensemble fermé de U et $x \in X$. Considérons les propriétés suivantes

(15) $\quad v \in T_X(x)$

(16) $$\lim_{\substack{z \to x \\ x \in X}} \liminf_{\theta \to 0^+} \frac{d_X(z+\theta v)}{\theta} = 0$$

(17) $$\liminf_{\theta \to 0^+} \frac{d_X(x+\theta v)}{\theta} = 0$$

(18) $\quad \langle y-x, v\rangle \leq 0$ pour tout $y \in U$ tel que $d_X(y) = \|y-x\|$.

Alors (15) => (16) => (17) => (18) .

Démonstration.

(a) (15) => (16) . On remarque tout d'abord que $\liminf_{\substack{z \to x \\ z \in X}} \liminf_{\theta \to 0^+} \frac{d_X(z+\theta v)}{\theta} \geq 0.$

D'autre part,

$$\limsup_{\substack{z \to x \\ z \in X}} \liminf_{\theta \to 0^+} \frac{d_X(z+\theta v)}{\theta} \leq \inf_{\alpha} \sup_{\substack{\|z-x\| \leq \alpha \\ z \in X}} \inf_{\beta} \sup_{\theta \leq \beta} \frac{d_X(z+\theta v)}{\theta}$$

$$\leq \inf_{\alpha,\beta} \sup_{\substack{\|z-x\| \leq \alpha \\ z \in X}} \sup_{\theta \leq \beta} \frac{d_X(z+\theta v) - d_X(z)}{\theta}$$

$$\leq D_c d_X(x)(v) \leq 0 ,$$

puisque $v \in T_X(x)$. Donc (16) est démontrée.

(b) Il est évident que (16) implique (17) (ce qui entraîne en particulier que $\lim\limits_{\theta\to 0^+} \dfrac{d_X(x+\theta v)}{\theta} = 0$) .

(c) Montrons que (17) implique (18). Supposons que (18) soit faux: il existe $y \in U$ tel que $d_X(y) = \|y-x\|$ et $<y-x,v> = \delta > 0$. Soit A le complémentaire de la boule ouverte de centre y et de rayon $d_X(y)$. Alors X est contenu dans A et par suite, $d_X(x+\theta v) \geq d_A(x+\theta v)$. Puisque A est le complémentaire d'une boule, $d_A(x+\theta v) = d_X(y) - \|x+\theta v-y\|$. D'autre part,

$$\|x+\theta v-y\|^2 = \|x-y\|^2 + 2\theta<x-y,v> + \theta^2\|v\|^2 \leq d_X(y)^2(1-2\theta \frac{\delta}{d_X(y)^2} + \theta^2 \frac{\|v\|^2}{d_X(y)^2})$$

et par suite,

$$\|x+\theta v-y\| \leq d_X(y)(1-\theta \frac{\delta}{d_X(y)^2} + 0(\theta)) .$$

Ces inégalités entraînent que $d_A(x+\theta v) \geq \theta \dfrac{\delta}{d_X(y)} - 0(\theta)d_X(y)$ et par suite, que $\liminf\limits_{\theta\to 0} \dfrac{d_X(x+\theta v)}{\theta} \geq \dfrac{\delta}{d_X(y)} > 0$.

Nous avons donc obtenu une contradiction de (17). □

L'implication (15) => (18) a déjà été établie dans la proposition 3.

Remarque. Dans le cas des espaces de dimension finie, on peut démontrer que (16) implique (15). En général, la condition $\lim\limits_{\theta\to 0^+} \dfrac{d_X(x+\theta v)}{\theta} = 0$ n'implique pas que $v \in T_X(x)$. □

La proposition suivante établit une sorte de réciproque à l'implication (17) => (18).

Proposition 7. Soit S une correspondance semi-continue inférieurement à valeurs fermées d'un sous-ensemble fermé X de U dans U vérifiant:

$$(19)\quad \begin{cases} \forall y \in U\ ,\quad \forall z \in X \text{ tel que } \|y-z\| = d_X(y)\ ,\quad \forall w \in S(z)\ , \\ \text{alors } \langle y-z,w\rangle \le 0\ . \end{cases}$$

Alors

$$(20)\qquad \forall v \in S(x)\ ,\quad \lim_{\theta\to 0^+} \frac{d_X(x+\theta v)}{\theta} = 0\ .$$

Si l'on suppose de plus que S est uniformément continue et $S(X)$ borné, alors

$$(21)\qquad \lim_{\theta\to 0^+} \sup_{\substack{x\in X \\ v\in S(x)}} \frac{d_X(x+\theta v)}{\theta} = 0\ .$$

Démonstration. Fixons $v \in S(x)$. Associons à tout y un élément $z \in X$ vérifiant $d_X(y) = \|y-z\|$ et un élément $w \in S(z)$. Alors $d_X^2(y+\theta v)-d_X^2(y) \le \|y+\theta v-z\|^2-\|y-z\|^2 = 2\theta\langle y-z,v-w\rangle+2\theta\langle y-z,w\rangle+\theta^2\|v\|^2 \le 2\theta d_X(y)\|v-w\|+\theta^2\|v\|^2$ d'après (19)). Si l'on pose $d_+(S(x),S(z)) = \sup_{v\in S(x)} \inf_{w\in S(z)} \|v-w\|$, on obtient donc

$$(22)\qquad \frac{d_X^2(y+\theta v) - d_X^2(y)}{\theta} \le 2d_X(y)d_+(S(x),S(z)) + \theta\|v\|^2\ .$$

Prenons $x \in X$. Si $\|y-x\| \le \frac{\alpha}{2}$, alors $\|z-x\| \le \alpha$ puisque $\|z-x\| \le \|z-y\| + \|y-x\| \le \|x-y\| + \|y-x\| = \alpha$. Si S est semicontinue inférieurement, on peut associer à ε et à x un nombre $\alpha(\varepsilon,x)$ tel que $d_+(S(x),S(z)) \le \varepsilon$ lorsque $\|z-x\| \le \alpha(\varepsilon,x)$. Si S est uniformément continue, on peut choisir $\alpha(\varepsilon,x) = \alpha(\varepsilon)$ indépendant de x . Posons

$$(23)\qquad g(t) = d_X^2(x+tv)\ .$$

Si $t < \frac{\alpha(\varepsilon,x)}{2\ v}$ ou, dans le second cas, si $t < \frac{\alpha(\varepsilon)}{2M}$ (où $M = \sup\{\|v\|\,|\,x\in X, v\in S(x)\}$), l'inégalité montre que

$$\limsup_{\theta\to 0^+} \frac{g(t+\theta) - g(t)}{\theta} \le 2\sqrt{g(t)}\,\varepsilon\ .$$

Donc la fonction g admet une dérivée au sens de Dini $D_d g(t)$ vérifiant l'inégalité $D_d g(t) \le 2\sqrt{g(t)}\,\varepsilon$. Alors si $\theta < \frac{\alpha(\varepsilon,x)}{2\ v}$ dans le premier cas et $\theta < \frac{\alpha(\varepsilon)}{2M}$

dans le second cas, on en déduit que

$$\frac{d_X(x+\theta v)}{\theta} = \frac{g(\theta) - g(0)}{\theta} \leq \frac{1}{\theta}\int_0^\theta \varepsilon dt = \varepsilon \ .$$

Ceci achève la démonstration de la proposition. □

Indiquons aussi une autre conséquence de la propriété (19) lorsque S est une correspondance lipschitzienne, au sens où

$$(24) \qquad \forall y,z \in U \ , \quad d_+(S(y),S(z)) \leq M\|y-z\| \ .$$

Proposition 8. Soit S une correspondance lipschitzienne à valeurs fermées de X dans U , vérifiant la condition (19) de la proposition 7. Alors

$$(25) \qquad \forall y \in U \ , \quad \sup_{v\in S(y)} D_d d_X^2(y)(v) \leq 2M\, d_X^2(y) \ .$$

Démonstration. L'inégalité (22) où v est pris dans $S(y)$ au lieu de $S(x)$ implique que

$$\begin{aligned}\frac{d_X^2(y+\theta v) - d_X^2(y)}{\theta} &\leq 2d_X(y)d_+(S(y),S(z)) + \theta\|v\|^2 \\ &\leq 2M_X^2(y) + \theta\|v\|^2\end{aligned}$$

puisque $d_+(S(y),S(z)) \leq M\|y-z\| = Md_X(y)$. On obtient alors (25) en faisant tendre θ vers 0 . □

Il est utile de mentionner la conséquence immédiate suivante des propositions 6 et 7.

Théorème 3. Soit S une correspondance de X dans U . Supposons que

$$(26) \qquad \begin{cases} \text{(i)} & X \text{ est compact} \\ \text{(ii)} & S \text{ est continue à valeurs compactes.} \end{cases}$$

Alors, la condition

$$(27) \qquad \forall x \in X \;, \quad \forall v \in S(x) \;, \quad \liminf_{\theta\to 0^+} \frac{d_X(x+\theta v)}{\theta} = 0$$

implique la condition

$$(28) \qquad \lim_{\theta\to 0^+} \sup_{\substack{x\in X \\ v\in S(x)}} \frac{d_X(x+\theta v)}{\theta} = 0 \;.$$

Nous allons utiliser ce théorème 3 pour démontrer le résultat suivant qui jouera un rôle essentiel pour établir l'existence de trajectoires monotones d'un système différentiel multivoque.

Théorème 4. Soit S une correspondance de X dans U où

$$(26) \qquad \begin{cases} \text{(i)} & X \text{ est compact} \\ \text{(ii)} & S \text{ est continue à valeurs compactes.} \end{cases}$$

Considérons une correspondance P de X vérifiant

$$(27) \qquad \begin{cases} \text{(i)} & \text{le graphe } G(P) \text{ de } P \text{ est compact} \\ \text{(ii)} & \forall x \in X \;, \quad x \in P(x) \\ \text{(iii)} & \text{si } y \in P(x) \;, \text{ alors } P(y) \subset P(x) \;. \end{cases}$$

Supposons que

$$(30) \qquad \forall x \in X \;, \quad S(x) \subset T_{P(x)}(x) \;.$$

Alors

$$(31) \qquad \lim_{\theta\to 0^+} \sup_{\substack{x\in X \\ v\in S(x)}} \frac{d_{G(P)}(x,x+\theta v))}{\theta} = 0 \;.$$

Démonstration. Remarquons que si $(x,y) \in G(P)$ (i.e. $y \in P(x)$) , et si $v \in S(y)$, on obtient l'inégalité

(32) $\quad d_{G(P)}(x,y+\theta v) \leq d_{P(y)}(y+\theta v)$

puisque

$$\begin{aligned} d_{G(P)}(x,y+\theta v) &= \inf_{(z,w)\in G(P)} (\|x-z\|^2 + \|y+\theta v-w\|^2)^{1/2} \\ &\leq \inf_{w\in P(x)} \|y+\theta v-w\| \\ &= d_{P(x)}(y+\theta v) \\ &\leq d_{P(y)}(y+\theta v) \end{aligned}$$

(car $P(y) \subset P(x)$ d'après (29)(iii)) . Puisque $v \in S(y) \subset T_{P(y)}(y)$ d'après (30), la proposition 6 implique que $\lim\limits_{\theta\to 0^+} \dfrac{d_{P(y)}(y+\theta v)}{\theta} = 0$. Donc l'inégalité (32) implique que

(33) $\quad \forall (x,y) \in G(P) \ , \quad \forall v \in S(y) \ , \quad \lim\limits_{\theta\to 0^+} \dfrac{d_{G(P)}(x,y+\theta v)}{\theta} = 0$.

Introduisons alors la correspondance $\tilde{S}$ du compact $G(P)$ dans $U \times U$ définie par $\tilde{S}(x,y) = \{0\} \times S(y)$, qui est continue à valeurs compactes. Le théorème 3 implique alors que la propriété (33) entraîne la condition (31). □

6. DÉRIVABILITÉ AU SENS DE CLARKE DE L'ENVELOPPE SUPÉRIEURE DE FONCTIONS LIPSCHITZIENNES

Considérons m fonctions $f_i : U \to]-\infty,+\infty]$ et leur enveloppe supérieure g définie par $g(x) = \max\limits_{i\in I} f_i(x)$ où $I = \{1,\ldots,n\}$. Désignons par $I(x) = \{i \in I$ tels que $g(x) = f_i(x)\}$.

Supposons que les fonctions f_i et la fonction g soient dérivables au sens de Dini. Il est alors aisé de vérifier que

(1) $\quad \max\limits_{i\in I(x)} D_d f_i(x)(v) \leq D_d g(x)(v)$

puisque, si $i \in I(x)$, $\dfrac{f_i(x+\theta v) - f_i(x)}{\theta} \leq \dfrac{g(x+\theta v) - g(x)}{\theta}$.

Nous allons montrer que si les fonctions sont dérivables au sens de Clarke, alors

(2) $\qquad D_c g(x)(v) \leq \max\limits_{i \in I(x)} D_c f_i(x)(v)$.

Remarquons d'ailleurs que *si les fonctions* f_i *sont localement lipschitziennes, il en est de même de leur enveloppe supérieure.* [En effet, si $|f_i(y)-f_i(z)| \leq L_i\|y-z\|$ si $y,z \in x + \eta_i B$, alors $|g(y)-g(z)| \leq L\|y-z\|$ si $y,z \in x + \eta B$ où $\eta = \min\limits_{i \in I} \eta_i > 0$ et $L = \max\limits_{i \in I} L_i > 0$]. Par suite les fonctions f_i et g sont dérivables au sens de Clarke.

Théorème 1. Supposons que les m fonctions f_i sont localement lipschitziennes et que $x \in \bigcap\limits_{i \in I} \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f_i$. Alors, les inégalités (1) et (2) ont lieu.

Si l'on suppose de plus que les fonctions f_i sont régulières en x , alors g est également régulière en x et l'on a l'égalité

(3) $\qquad Dg(x)(v) = \max\limits_{i \in I(x)} Df_i(x)(v)$.

Remarque. Si les fonctions f_i sont *convexes et continues* en x , elles sont régulières et leur enveloppe supérieure g est régulière et vérifie l'égalité (3).

Si les fonctions f_i sont continûment dérivables en x , alors leurs enveloppe supérieure g est régulière et vérifie $Dg(x)(v) = \max\limits_{i \in I(x)} \langle \nabla f_i(x), v \rangle$. Si $I(x)$ est réduit à un seul indice, alors g est dérivable au sens de Gâteaux et $\nabla g(x) = \nabla f_{i_0}(x)$ ou $g(x) = f_{i_0}(x)$. □

Démonstration.

(a) Remarquons tout d'abord qu'il existe $\alpha_1 > 0$ tel que si $\|y-x\| \leq \alpha_1$, $I(y) \subset I(x)$.

[En effet, soit $a = g(x) - \max\limits_{j \notin I(x)} f_j(x) > 0$, $\varepsilon = \frac{a}{3}$ et $\alpha_1 > 0$ tels que, pour tout $i \in I$, $|f_i(y)-f_i(x)| \le \varepsilon$ dès que $\|y-x\| \le \alpha_1$. Alors, si $j \in I(y)$,

$$f_j(x) \ge f_j(y) - \varepsilon = g(y) - \varepsilon \ge g(x) - 2\varepsilon = a - 2\varepsilon + \max_{i \notin I(x)} f_i(x)$$

$$> \max_{i \notin I(x)} f_i(x) .$$

Donc $j \in I(x)$].

Si $\alpha \le \alpha_1/2$ et $\beta \le \alpha_1/2\|v\|$, on obtient l'inégalité

$$\frac{g(y+\theta v) - g(y)}{\theta} \le \max_{i\in I(y+\theta v)} \frac{f_i(y+\theta v) - f_i(y)}{\theta} \le \max_{i\in I(x)} \frac{f_i(y+\theta v) - f_i(y)}{\theta} .$$

Par suite,

$$(4) \qquad D_c g(x)(v) \le \inf_{\alpha,\beta>0} \max_{i\in I(x)} \sup_{\substack{\|y-x\|\le\alpha \\ \alpha\le\beta}} \frac{f_i(y+\theta v) - f_i(y)}{\theta} .$$

D'autre part, pour tout ε et pour tout $i \in I(x)$, il existe $\alpha_i > 0$ et $\beta_i > 0$ tel que $\displaystyle\sup_{\substack{\|y-x\|\le\alpha_i \\ \theta\le\beta_i}} \frac{f_i(y+\theta v) - f_i(y)}{\theta} \le \max_{i\in I(x)} D_c f_i(x)(v) + \varepsilon$.

En prenant $\alpha = \min_{i\in I(x)} \alpha_i > 0$ et $\beta = \min_{i\in I(x)} \beta_i > 0$, il résulte de (4) que

$$\begin{aligned} D_c g(x)(v) &\le \max_{i\in I(x)} \sup_{\substack{\|y-x\|\le\alpha \\ \theta\le\beta}} \frac{f_i(y+\theta v) - f_i(y)}{\theta} \\ &\le \max_{i\in I(x)} \sup_{\substack{\|y-x\|\le\alpha_i \\ \theta\le\beta_i}} \frac{f_i(y+\theta v) - f_i(y)}{\theta} \\ &\le \max_{i\in I(x)} D_c f_i(x)(v) + \varepsilon . \end{aligned}$$

On en déduit l'inégalité (2) en faisant tendre ε vers 0 .

(b) Si les fonctions sont en plus dérivables à droite, alors, bien évidemment, pour tout $i \in I(x)$, on a

$$Df_i(x)(v) = \sup_{\beta>0} \inf_{\theta\leq\beta} \frac{f_i(x+\theta v) - f_i(x)}{\theta}$$

$$\leq \liminf_{\theta\to 0^+} \frac{g(x+\theta v) - g(x)}{\theta}$$

$$\leq \limsup_{\theta\to 0^+} \frac{g(x+\theta v) - g(x)}{\theta} \leq D_c g(x)(v)$$

$$\leq \max_{i\in I(x)} D_c f_i(x)(v) = \max_{i\in I(x)} Df_i(x)(v) .$$

On en déduit que g est dérivable à droite, que sa dérivée à droite est égale à elle au sens de Clarke et l'égalité (3) cherchée. □

Remarque. Le théorème 1 se traduit en termes de gradient généralisé de la façon suivante.

Théorème 1 bis. Supposons que les m fonctions f_i sont localement lipschitziennes et que $x \in \bigcap_{i\in I} \text{Int Dom } f_i$. Alors

$$\text{(5)} \qquad \partial g(x) \subset \overline{\text{co}} \bigcup_{i\in I(x)} \partial_c f_i(x) .$$

Si l'on suppose de plus que les fonctions f_i sont régulières en x , alors

$$\text{(6)} \qquad \partial g(x) = \overline{\text{co}} \bigcup_{i\in I(x)} \partial f_i(x) .$$

Démonstration. On utilise le fait que la fonction d'appui d'une réunion d'ensembles est l'enveloppe supérieure des fonctions d'appui de ces ensembles. □

Considérons maintenant le cas où

$$\text{(7)} \qquad g(x) = \sup_{p\in P} f(x,p)$$

où P est un ensemble infini de paramètres. Si nous posons

$$\text{(8)} \qquad P(x) = \{p \in P \text{ tels que } \max_{q\in P} f(x,q) = g(x)\}$$

il est ainsi facile de vérifier que

$$(9) \qquad \sup_{p\in P(x)} D_d f(x,p)(v) \leq D_d g(x)(v)$$

lorsque $P(x)$ n'est pas vide et lorsque les fonctions g et $f(\cdot,p)$ sont dérivables au sens de Dini.

Théorème 2. Supposons que P soit compact, que la fonction f soit continue sur $X \times P$ et que, pour tout p, $x \to f(x,p)$ soit lipschitzienne de constante L. Si

$$(10) \qquad \forall p \in P\,, \quad \forall x \in X\,, \quad D_c f(x,p)(v) = \limsup_{\substack{y\to x\\ \theta\to 0^+\\ q\to p}} \frac{f(y+\theta v,q) - f(y,q)}{\theta}$$

alors

$$(11) \qquad D_c g(x) \leq \sup_{p\in P(x)} D_c f(x,p)(v)\ .$$

Si les fonctions $x \to f(x,p)$ sont régulières en x, alors g est également régulière et l'on a l'égalité

$$(12) \qquad Dg(x)(v) = \sup_{p\in P(x)} Df(x,p)(v)\ .$$

Rappel. Il est clair que f étant continue sur $X \times P$ et P étant compact, les ensembles $P(x)$ sont non vides et compacts. Le théorème du maximum implique que sous ces hypothèses, g est continue et la correspondance $x \to P(x)$ est semi-continue supérieurement (voir par exemple [MMEGT], Chap. 2, §2.5). □

Démonstration. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $p \in P(x)$, on peut trouver, grâce à l'hypothèse (10), des nombres α_p, β_p et γ_p tels que

$$(13) \qquad \frac{f(y+\theta v,q) - f(y,q)}{\theta} \leq D_c f(x,p)(v) + \varepsilon$$

lorsque $\|y-x\| \leq \alpha_p$, $\theta \leq \beta_p$ et $\|q-p\| \leq \gamma_p$. Puisque $P(x)$ est compact, on peut le recouvrir par un nombre fini n de boules ouvertes $p_i + \gamma_{p_i} B$ de centre p_i et de rayon γ_{p_i}. Soit N le voisinage de $P(x)$ formé de la réunion de ces boules. Puisque la correspondance $x \to P(x)$ est semi-continue supérieurement d'après le théorème du maximum, il existe α_0 tel que $P(y) \subset N$ lorsque $\|y-x\| \leq \alpha$. Prenons $\alpha = \min\limits_{1\leq i\leq n} (\alpha_0, \alpha_{p_i}) > 0$ et $\beta = \min\limits_{1\leq i\leq n} (\frac{\alpha}{2\|v\|}, \beta_{p_i}) > 0$. Alors

$$D_c g(x)(v) \leq \sup_{\substack{\|y-x\|\leq\alpha \\ \theta\leq\beta}} \frac{g(y+\theta v) - g(y)}{\theta}$$

$$\leq \sup_{\substack{\|y-x\|\leq\alpha \\ \theta\leq\beta}} \sup_{q\in P(y+\theta v)} \frac{f(y+\theta v),q) - f(y,q)}{\theta}$$

Prenons y tel que $\|y-x\| \leq \alpha/2$, $\theta \leq \beta$, $q \in P(y+\theta v)$. Puisque $\|y+\theta v-x\| \leq \alpha_0$, $q \in N$, il existe donc $p_i \in P(x)$ tel que $\|q-p_i\| \leq \beta_{p_i}$. D'autre part,

$\|y-x\| \leq \alpha \leq \alpha_{p_i}$ et $\theta \leq \beta \leq \beta_{p_i}$. L'inégalité (13) implique donc que

$$\frac{f(y+\theta v,q) - f(y,q)}{\theta} \leq D_c f(x\cdot p_i)(v) + \varepsilon$$

$$\leq \sup_{p\in P(x)} D_c f(x,p) + \varepsilon .$$

On a donc montré que $D_c g(x)(v) \leq \sup\limits_{p\in P(x)} D_c f(x,p) + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui entraîne l'inégalité désirée. □

On démontre l'égalité (12) de la même façon qu'au théorème 1.

7. EXISTENCE DE MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE

L'énoncé du problème.

Considérons deux espaces de Hilbert U et V et

$$(1) \quad \begin{cases} \text{(i)} & \text{des sous-ensembles } \textit{convexes fermés } X \subset U \text{ et } Y \subset V \\ \text{(ii)} & A \in L(U,V) \ . \end{cases}$$

On associe à ces données et à tout $s \in V$, $\|s\| \leq \gamma$, les sous-ensembles $C(s) \subset U$ définis par

(2) $C(s) = \{x \in X \text{ tels que } A\,x \in Y + s\}$.

Nous nous proposons de minimiser sur les ensembles $C(s)$:

(3) $\begin{cases} \text{une fonction } \textit{localement lipschitzienne } f : U \to]-\infty,+\infty] \text{ telle} \\ \text{que } \hat{C} = \bigcup_{\|s\|\leq\gamma} C(s) \text{ soit contenu dans l'intérieur de son domaine.} \end{cases}$

Nous désignons par α la fonction de performance définie par

(4) $\alpha(s) = \inf\{f(x) \mid x \in C(s)\}$.

L'hypothèse de qualification des contraintes.

(5) $0 \in \operatorname{Int}(A(X)-Y)$.

Remarques. Le théorème de Hahn-Banach implique que cette *condition est équivalente à*

(6) $\forall p \in V^*\ ,\ p \neq 0\ ,\ 0 < \sigma_X(-A^*p) + \sigma_Y(p)$

où $\sigma_Z(q) = \sup\{\langle q,z\rangle \mid z \in Z\}$ est la fonction d'appui de Z . Si $Y = Q - y$ où $Q \subset V$ est convexe fermé, la propriété (5) s'écrit $y \in \operatorname{Int}(A(X)-Q)$. Si Q est un cône convexe fermé d'intérieur non vide, elle équivaut à:

(7) $y \in A(X) - \operatorname{Int} Q$ (condition de Slater) .

Si $Q = \{0\}$ (contraintes d'égalité $A\,x = y$) , elle équivaut à $y \in \operatorname{Int} A(X)$. Si $X = U$, cette condition veut simplement dire que A est surjective. Remarquons que puisque $A(X) - Y$ contient une boule de rayon γ , les ensembles $C(s)$ sont non vides lorsque $\|s\| \leq \gamma$. □

Lemme 1. Supposons que les propriétés (1) et (5) soient satisfaites. Il existe des constantes $\eta > 0$, $c \geq 0$ et $d \geq 0$ telles que pour tout $x \in X$, pour tout $\|s\| \leq \eta$, il existe $x_s \in C(s)$ tel que

(8) $\|x-x_s\| \leq c\, d_Y(Ax-s)(d+\|x\|)$.

Démonstration. Nous utilisons une généralisation du théorème de Banach due à

S.M. Robinson (voir théorème 1, p. 132, de Regularity and Stability for Convex Multivalued functions. Math. op. Research, 1 (1976), 130-143).

Choisissons $x_0 \in C(0)$ (de norme minimum par exemple). Il existe alors $y_0 \in Y$ tel que $0 = Ax_0 - y_0$. Le théorème de Robinson implique l'existence de $\eta > 0$ tel que pour tout $\|z\| \le 2\eta$, $2\eta B_V \subset A((x_0+B_U)\cap X) - (y_0+B_V)\cap Y$ où B_U et B_V sont les boules unités de U et de V respectivement. Par suite, pour tout $s \in \eta B_V$, on obtient l'inclusion

$$(9) \qquad \eta B_V \subset A((x_0+B_U)\cap X) - (y_0+B_V)\cap Y - s .$$

Fixons maintenant $\varepsilon > 0$ et $x \in X$. Si $Ax \in Y + s$, on prend $x_s = x$. Sinon, on choisit $y \in Y + s$ tel que $\|Ax-y\| \le d_Y(Ax-s)(1+\varepsilon)$. D'après (9), nous déduisons l'existence de $u \in (x_0+B_U)\cap X$ et de $v \in (y_0+B_V)\cap(Y+s)$ tels que

$$(10) \qquad \eta \frac{y-Ax}{\|Ax-y\|} = Au - v .$$

Prenons $\lambda = \frac{Ax-y}{\eta+\|Ax-y\|} \in]0,1[$ et multiplions (10) par λ. Puisque $\frac{\lambda\eta}{\|Ax-y\|} = 1-\lambda$ et puisque v et $y \in Y + s$, on obtient

$$(11) \qquad A(\lambda u+(1-\lambda)x) = \lambda v + (1-\lambda)y \in Y + s .$$

Posons $x_s = \lambda u + (1-\lambda)x$, qui appartient à l'ensemble convexe X puisque u et x appartiennent à X. On déduit donc de (12) que $x_s \in C(s)$. Puisque $x - x_s = \lambda(x-u)$ et puisque $u \in x_0 + B_U$, on obtient

$$\begin{aligned}\|x-x_s\| &\le \frac{\|Ax-y\|}{\eta+\|Ax-y\|}(1+\|x_0\|+\|x\|)\\ &\le \frac{d_Y(Ax-s)}{\eta}(1+\varepsilon)(1+\|x_0\|+\|x\|) = cd_Y(Ax-s)(d+\|x\|) .\end{aligned}$$

Relaxation des contraintes

Le résultat suivant, qui généralise la proposition 5-2, permet de remplacer un problème contraint par un problème sans contrainte obtenu en ajoutant à f des coûts de violation des contraintes.

Proposition 1. Supposons que les hypothèses (1), (3) et (5) soient satisfaites. Si $\bar{x} \in C(0)$ minimise f sur $C(0)$, il existe des constantes $a \geq 0$ et $b \geq 0$ telles que $\bar{x}$ soit un minimum local de la fonction g définie par

$$(12) \qquad g(x) = f(x) + ad_X(x) + bd_Y(Ax) .$$

Démonstration.

(a) La fonction f est lipschitzienne sur un voisinage $\bar{x} + \alpha B$ (d'après (3)). Considérons les constantes η, c et d du lemme 1 et choisissons $\beta < \eta$ tel que $c\|A\|\beta(d+\beta) + \beta \leq \alpha$.

(b) Prenons $x \in X \cap (\bar{x}+\beta B)$. D'après le lemme 1, il existe $x_1 \in C(0)$ tel que $\|x-x_1\| \leq cd_Y(Ax)(d+\beta)$.

Puisque $d_Y(Ax) \leq \|A(x-\bar{x})\| \leq \|A\|\|x-\bar{x}\| \leq \|A\|\beta$, on déduit que $\|x-x_1\| \leq c\|A\|\beta(d+\beta)$ et par suite, que $\|\bar{x}-x_1\| \leq \alpha$. Si ℓ désigne la constante de Lipschitz de f sur $\bar{x} + \alpha B$, il en résulte que

$$f(\bar{x}) \leq f(x_1) \leq f(x) + \ell\|x-x_1\| \leq f(x) + \ell c(d+\beta)d_Y(Ax) .$$

On a donc démontré que

$$(13) \qquad \forall x \in (\bar{x}+\beta B) \cap X , \quad f(\bar{x}) \leq f(x) + c'd_Y(Ax) .$$

(c) Prenons maintenant $x \in \bar{x} + \beta/_3 B$ et $x_2 \in X$ satisfaisant $\|x-x_2\| \leq 2d_X(x)$. Puisque $d_X(x) \leq \|x-\bar{x}\| \leq \beta/_3$, on en déduit que $\|\bar{x}-x_2\| \leq \beta$. Donc $x_2 \in (\bar{x}+\beta B) \cap X$; d'après (13), nous savons que

$$f(\bar{x}) \leq f(x_2)+c'd_Y(Ax_2) \leq f(x)+c'd_Y(Ax)+(\ell+c'\|A\|)\|x-x_2\| \leq f(x)+c'd_Y(Ax)+2(\ell+c'\|A\|)d_X(x) .$$

Par suite $\bar{x}$ est bien un minimum local de g. □

Régularité de la fonction de performance

Nous allons montrer que la fonction de performance α est localement lipschitzienne.

Proposition 2. Supposons que les hypothèses (1), (3) et (5) soient satisfaites. Supposons également que

$$(14)\quad \begin{cases} \text{(i)} & \exists\gamma > 0 \text{ tel que } \hat{C} = \bigcup_{\|s\|\le\gamma} C(s) \text{ soit borné} \\ \text{(ii)} & f \text{ est lipschitzienne sur } \hat{C} \end{cases}$$

et que $\alpha(0) > -\infty$. Alors la fonction de performance α définie par (4) est lipschitzienne.

Remarque. Si $\hat{C}$ est compact, (14)(ii) résulte de (3).

Démonstration. Prenons $r,s \in V$ tels que $\|r\|$, $\|s\| \le \min(\eta,\gamma)$, où η est défini dans l'énoncé du lemme 1. Fixons $\varepsilon > 0$. On peut associer à r un élément $x_r \in C(r) \subset X$ tel que $f(x_r) \le \alpha(r) + \varepsilon$. D'autre part, le lemme 1 implique l'existence de $x_s \in C(s)$ tel que $\|x_r - x_s\| \le c d_Y(Ax_r - s)(d + \|x_r\|) \le c' d_Y(Ax_r - s)$ (puisque $\|x_r\|$ est borné d'après (14)(i)). On déduit de ceci que

$$\alpha(s) \le f(x_s) \le f(x_r) + \ell\|x_r - x_s\| \le \alpha(r) + \varepsilon + \ell c' d_Y(Ax_r - s) \ .$$

Il suffit alors de remarquer que $d_Y(Ax_r - s) \le \|r - s\|$ puisque $Ax_r \in Y + r$ et de faire tendre ε vers 0 .

<u>*Existence d'un multiplicateur de Lagrange*</u>

La proposition 2 nous permet de démontrer l'existence d'un multiplicateur de Lagrange qui appartient au gradient généralisé de la fonction de performance.

Théorème 1. Supposons que les hypothèses (1), (3), (5) et (14) soient satisfaites. Soit $\bar{x} \in C(0)$ un minimum de la fonction f sur $C(0)$. Alors

$$(15)\qquad 0 \in \partial_c f(\bar{x}) + N_X(\bar{x}) + A^*(N_Y(A\bar{x}) \cap -\partial_c \alpha(0)) \ .$$

Autrement dit, il existe $\bar{p} \in N_Y(A\bar{x}) \cap -\partial_c\alpha(0)$, $\bar{q} \in N_X(\bar{x})$ et $\bar{r} \in \partial_c f(\bar{x})$ tel que $\bar{p} + \bar{q} + \bar{r} = 0$.

Démonstration. D'après la proposition 2, la fonction de performance α est lipschitzienne sur un voisinage de l'origine. Nous allons utiliser ce fait et les hypothèses (1) et (3) pour démontrer le théorème.

Prenons $v \in X$, $s \in Y$ et $\theta \in]0,1[$. On remarque alors que $\bar{x} + \theta(v-\bar{x}) \in X$ et que $A(\bar{x}+\theta(v-\bar{x})) \in Y + \theta(Av-s)$ puisque $\bar{x} \in X$, $A\bar{x} \in Y$ et puisque les ensembles X et Y sont convexes. Donc $\bar{x} + \theta(v-\bar{x}) \in C(\theta(Av-s))$ et par suite, $0 \leq f(\bar{x}+\theta(v-\bar{x}) - \alpha(\theta(Av-s))$. D'autre part, $0 = -f(x) + \alpha(0)$. Alors

$$0 \leq \frac{f(\bar{x}+\theta(v-x)) - f(\bar{x})}{\theta} + \frac{-\alpha(\theta(Av-s)) - (-\alpha(0))}{\theta} .$$

En prenant la limite supérieure quand θ tend vers 0^+ , on obtient l'inégalité

(16) $\quad \forall v \in X , \quad \forall s \in Y , \quad 0 \leq D_c f(\bar{x})(v-\bar{x}) + D_c(-\alpha)(0)(Av-s))$.

Puisque les dérivées de Clarke sont les fonctions d'appui des gradients généralisés, on peut écrire l'inégalité (16) sous la forme

$$0 \leq \inf_{v \in X} \inf_{s \in Y} \sup_{p \in \partial_c \alpha(0)} \sup_{q \in \partial_c f(\bar{x})} [\langle q, v-\bar{x}\rangle - \langle p, Av-s\rangle]$$

Puisque X et Y sont convexes et puisque les gradients généralisés sont convexes et faiblement compacts, on peut appliquer le théorème du maxinf (voir [AFA], chapitre 2, §2.7, théorème 1) : il existe $\bar{p} \in \partial_c f(\bar{x})$ tels que

(17) $\quad 0 \leq \inf_{v \in X} \inf_{s \in Y} [\langle \bar{q}, v-s\rangle - \langle \bar{p}, Av-s\rangle]$.

En prenant $v = \bar{x}$, (17) implique que $0 \leq \inf_{s \in Y} \langle \bar{p}, s-A\bar{x}\rangle$, c'est-à-dire que $-\bar{p} \in N_Y(A\bar{x})$. En prenant $s = A\bar{x}$, (17) implique que $0 \leq \inf_{v \in X} \langle \bar{q}-A^*\bar{p}, v-\bar{x}\rangle$, c'est-à-dire que $A^*\bar{p} - \bar{q} \in N_X(\bar{x})$. Puisque $\bar{p} \in \partial_c \alpha(0)$ et $\bar{q} \in \partial_c f(x)$, nous avons démontré le théorème.

Existence de multiplicateurs de Pareto

Considérons à présent m fonctions localement lipschitziennes $f_j : Y \to \mathbb{R}$, sur un voisinage d'un ensemble C .

Définition 1. Nous dirons que $\bar{x} \in C$ est un minimum de Pareto faible s'il n'existe pas de $y \in C$ tel que

$$(18) \qquad f_j(y) < f_j(\overline{x}) \quad \text{pour tout} \quad j = 1,\ldots,m .$$

Introduisons la fonction f définie par

$$(19) \qquad f(x) = \max_{j=1,\ldots,m} (f_j(x)-f_j(\overline{x})) .$$

Alors, si $\overline{x}$ est un minimum de Pareto faible, on en déduit que

$$(20) \qquad 0 = f(\overline{x}) = \min_{y\in C} f(y)$$

et par suite, d'après la proposition 5.2, que

$$(21) \qquad \begin{cases} 0 \le D_c f(\overline{x})(v) + LD_c d_C(\overline{x})(v) \\ \\ \le \max\limits_{j=1,\ldots,m} D_c f_j(x)(v) + LD_c d_C(\overline{x})(v) . \end{cases}$$

Le théorème 6.1 implique le résultat suivant.

Proposition 3. Supposons que $\overline{x} \in C$ soit un minimum de Pareto faible. Il existe alors des scalaires $\lambda^j \ge 0$ tels que

$$(22) \qquad 0 \in \sum_{j=1,\ldots,m} \lambda^j \partial_c f_j(\overline{x}) + N_C(\overline{x}) .$$

Les λ^j sont appelés multiplicateurs de Pareto associés à $\overline{x}$.

Application. Prix associés à des allocations optimales au sens de Pareto.

On prend $V = \mathbb{R}^\ell$, que l'on interprète comme un espace de biens d'une économie. L'ensemble convexe fermé $Y \subset V$ décrit l'ensemble des biens disponibles à allouer à m consommateurs $i = 1,\ldots,m$. Chaque consommateur i est représenté par

$$(23) \qquad \begin{cases} \text{(i)} \quad \text{un ensemble de consommation} \quad X^i \subset V \\ \\ \text{(ii)} \quad \text{une fonction d'utilité} \quad u_i : X^i \to \mathbb{R} . \end{cases}$$

On considère les ensembles $C(s) \subset U = V^m$ des *allocations possibles* des biens disponibles et d'une ressource variable $s \in V$, définis par

$$(24) \qquad C(s) = \{x = (x^s,\dots,x^m) \in X = \prod_{i=1}^{m} X^i \mid \sum_{i=1}^{m} x^i \in Y + s\} .$$

Nous dirons que $\overline{x} \in C(0)$ est une allocation faiblement optimale au sens de Pareto s'il n'existe pas de $y \in C(0)$ tel que $u_i(y^i) > u_i(\overline{x}^i)$ pour tout consommateur i. On associe à $\overline{x}$ la *fonction de satisfaction* définie par

$$(25) \qquad \beta(s) = \max \left\{ \sum_{j=1}^{m} (u_j(x^j) - u_j(\overline{x}^j)) \mid x^j \in X^j \text{ et } \sum_{j=1}^{m} x^j \in Y + s \right\} .$$

Proposition 4. Nous supposons que

$$(26) \qquad \begin{cases} \text{(i)} & \text{les ensembles } X^i \text{ sont convexes fermés bornés inférieurement} \\ \text{(ii)} & \text{l'ensemble } Y \text{ est convexe fermé borné supérieurement} \\ \text{(iii)} & 0 \in \operatorname{Int} \left(\sum_{i=1}^{m} X^i - Y \right) \end{cases}$$

et que

$$(27) \qquad \begin{cases} \text{les fonctions d'utilité } u_j \text{ sont } \textit{localement} \\ \textit{lipschitziennes} \text{ sur des voisinages de } X^j . \end{cases}$$

Alors il existe un prix $\overline{p} \in N_Y(\sum_{j=1}^{m} \overline{x}^j)$ qui appartient au gradient généralisé $\partial_c\beta(0)$ de la fonction de satisfaction et des multiplicateurs de Pareto $\overline{\lambda}^j \geq 0$ tels que

$$(28) \qquad \forall j = 1,\dots,m , \quad \overline{p} \in \overline{\lambda}^j \partial_c u_j(\overline{x}^j) - N_{X^j}(\overline{x}^j) .$$

Démonstration. La proposition 4 résulte du théorème 1 et de la proposition 3. On pose

$$f(x) = \sum_{j=1}^{m} (u_j(\overline{x}^j) - u_j(x^j)) , \quad Ax = \sum_{j=1}^{m} x^j , \quad X = \prod_{j=1}^{m} X^j$$

$$\alpha(z) = -\beta(z) = \inf \{f(x) \mid x \in C(z)\} .$$

Puisque $\sum_{j=1}^{m} X^j - Y$ contient une boule de rayon γ, les ensembles $C(s)$ sont vides si $\|s\| \leq \gamma$. Puisque $\sum_{j=1}^{m} X^j$ est borné inférieurement et Y est borné supérieurement, ils demeurent dans un ensemble *compact* $\hat{C}$ (voir [AAA], chapitre 3, §4, proposition 7). Cela implique que f est lipschitzienne sur un voisinage de $\hat{C}$. Donc le théorème 1 entraîne l'existence de

$$\overline{p} \in -\partial\alpha(0) \cap N_Y(Ax) = \partial\beta(0) \cap N_Y(\sum_{j=1}^{m} \overline{x}^j)$$

tel que $A^*\overline{p} \in -\partial f(\overline{x}) - N_X(\overline{x})$. Il suffit alors de remarquer que $A^*P = (p,p,\ldots,p)$, que $-\partial f(\overline{x}) = \prod_{j=1}^{m} \lambda^j u_j(\overline{x}^j)$ et que $N_X(\overline{x}) = \prod_{j=1}^{m} N_{X^j}(\overline{x}^j)$. □

Remarque. On peut affaiblir l'hypothèse (26) et la remplacer par:

(29) $\quad Y$ est convexe fermé et $\exists w \in Y$ tel que $(Y-w) \cap R_+^{\ell} = \{0\}$.

En effet, la proposition 8 du §4, chapitre 3 de [AAA] implique que les $C(s)$ restent dans un compact. □

Nous allons considérer maintenant le cas où l'opérateur A définissant les contraintes n'est plus linéaire, mais est un opérateur non linéaire, désigné par G, dont les composantes sont lipschitziennes. Nous allons prendre $V = \mathbb{R}^n$ et $Y = \mathbb{R}_+^n$. Si $X \subset U$, nous désignons par

(30) $\quad x \in X \to G(x) = \{g_1(x),\ldots,g_n(x)\}$

l'opérateur définissant les contraintes de l'ensemble

(31) $\quad C(s) = \{x \in X$ tels que $G(x) \leq s\}$.

Le cas des contraintes d'égalité $h(x) = u$ s'obtient en prenant h et $-h$ parmi les composants de G. Si $f : X \to \mathbb{R}$, on lui associe la fonction de performance

(32) $$\alpha(s) = \inf_{x \in C(s)} f(x) .$$

Nous sommes conduits à faire une autre hypothèse de différentiabilité sur α pour pouvoir démontrer l'existence de multiplicateurs de Lagrange. Pour cela, nous introduisons la définition suivant.

Définition 2. Nous dirons que le problème $\alpha(s)$ est "calme" en s si

(33) $$a = \liminf_{\substack{h \in \mathbf{R}^n_+ \\ h \to 0}} \frac{\alpha(s+h) - \alpha(s)}{\|h\|} > -\infty$$

où $\|h\| = \sum_{i=1,\ldots,n} |h_i|$.

Remarque. En particulier, si α est différentiable en u , le problème est évidemment calme en u . Comme la fonction α est décroissante sur $\mathbf{R}^n$, elle est presque partout dérivable [voir théorème 14.2 de U.S. Haslem-Jones, Differentiability of vector monotone functions, Proceedings London Math. Soc., 39 (1935), 339-362]. Nous allons démontrer que, dans le cas de contraintes convexes, la condition de Slater usuelle implique que le problème est calme. □

Exemple de problème calme. Nous allons donner des conditions suffisantes portant sur les contraintes pour qu'un problème $\alpha(s)$ soit calme.

Lemme 2. Supposons que X et les fonctions g_i soient convexes et qu'il existe $\tilde{x}$ tel que $g_i(\tilde{x}) < s_i$ pour tout i . Alors, si f est localement lipschitzienne, le problème $\alpha(s)$ est calme en s .

Démonstration. Il faut montrer qu'il existe $\theta > 0$ et $a > -\infty$ tels que

(34) $$a \leq \inf_{\substack{h \in \mathbf{R}^n_+ \\ \|h\| \leq \theta}} \frac{\alpha(u+h) - \alpha(u)}{\|h\|}$$

Pour tout $h \in \mathbf{R}^n_+$, on peut trouver x vérifiant

(35) $$G(x) \leq s + h \quad \text{et} \quad f(x) \leq \alpha(s+h) + \|h\| .$$

Posons $\rho = \min_{i=1,\ldots,n} (s_i - g_i(\tilde{x}))$, qui est strictement positif, et $\theta = \frac{\|h\|}{\|h\|+\rho} \in]0,1[$. Alors, $y = \theta\tilde{x} + (1-\theta)x$ appartient à X , qui est convexe par hypothèse: $\|x-y\| = \theta\|x-\tilde{x}\| = \frac{\|h\|}{\|h\|+\rho}\|x-\tilde{x}\|$; de plus, la convexité des fonctions g_i implique que

$$g_i(y) \le \theta g_i(\tilde{x}) + (1-\theta)g_i(x) \le s_i - \theta\rho + (1-\theta)\|h\| \le s_i$$

pour tout $i = 1,\ldots,n$.

Donc y est dans un voisinage de x lorsque $\|h\| \le \frac{\rho\theta}{1-\theta}$, où θ est suffisamment petit; alors, puisque f est localement lipschitzienne, on obtient

$$\alpha(s) \le f(y) \le f(x) + L\|x-y\| \le f(x) + \frac{L\|h\|}{\|h\|+\rho}\|x-\tilde{x}\| . \tag{36}$$

Ceci implique que $\frac{\alpha(s+h) - \alpha(s)}{\|h\|} \ge -(1 + \frac{L}{\rho}\|x-\tilde{x}\|)$ dès que $h \le \frac{\rho\theta}{1-\rho}$. □

Existence de multiplicateurs de Lagrange

L'existence de multiplicateurs de Lagrange résulte de la proposition suivante.

Proposition 5. Supposons que le problème $\alpha(x)$ soit calme en s et qu'il possède une solution $\bar{x} \in X$. Supposons que les fonctions f et g_i soient localement lipschitziennes. Il existe alors des constantes $c > 0$ et $L > 0$ telles que $\bar{x}$ minimise sur U la fonction g définie par

$$g(\bar{x}) = f(\bar{x}) + c\sum_{i=1}^{n} \max(0, g_i(x) - u_i) + Ld_X(x) . \tag{37}$$

Par suite, pour tout $v \in U$

$$0 \le D_c f(\bar{x})(v) + c\sum_{i\in I(x)} \max(0, D_c g_i(\bar{x})(v)) + LD_c d_X(\bar{x})(v) \tag{38}$$

où $I(\bar{x}) = \{i = 1,\ldots,n$ tels que $g_i(x) = s_i\}$.

Remarque. La première assertion est fondamentale dans la mesure où elle permet de remplacer un problème de minimisation avec contraintes par un problème de minimisation sans contrainte.

Démonstration. Par définition (33), il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$a - 1 \leq \inf_{\substack{h \in R_+^n \\ \|h\| \leq \varepsilon}} \frac{\alpha(s+h) - \alpha(s)}{\|h\|}$$

c'est-à-dire, tel que

$$(39) \qquad f(\bar{x}) = \alpha(s) \leq \alpha(s+h) + c\|h\| \quad \text{si} \quad \|h\| \leq \varepsilon$$

où $c = \max(0, 1-a)$. D'autre part, les fonctions g_i étant continues, il existe $\eta > 0$ tel que

$$g_i(x) \leq g_i(x) + \varepsilon/n \leq s_i + \varepsilon/n \quad \text{dès que} \quad \|x-\bar{x}\| \leq \eta \ .$$

Donc, si $h_i(x) = \max(0, g_i(x)-s_i)$ et $h(x) = (h_1(x), \ldots, h_n(x))$, on voit que $\|h(x)\| \leq \varepsilon$ dès que $\|x-\bar{x}\| \leq \eta$. Alors l'inégalité (39) s'écrit

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &\leq \alpha(s+h(x)) + c\|h(x)\| \\ &\leq f(x) + c \sum_{i=1,\ldots,n} \max(0, g_i(x)-s_i) \quad \text{si} \quad x \in X \end{aligned}$$

vérifie $\|x-\bar{x}\| \leq \eta$.

Puisque les fonctions f et g_i sont localement lipschitziennes, il en est de même de $x \to f(\bar{x}) + c \sum_{i=1,\ldots,n} \max(0, g_i(x)-s_i)$; la proposition 5.2 implique alors qu'il existe $L > 0$ tel que $0 \leq D_c g(\bar{x})(v)$ où g est la fonction définie par (37). Donc

$$0 \leq D_c f(\bar{x})(v) + c \sum_{i=1,\ldots,n} D_c h_i(\bar{x})(v) + L D_c d_X(\bar{x})(v) \ .$$

D'autre part, $D_c h_i(\bar{x})(v) \leq 0$ si $g_i(\bar{x}) < s_i$ et $D_c h_i(\bar{x})(v) \leq \max(0, D_c g_i(\bar{x})(v))$ si $g_i(\bar{x}) = s_i$. □

La proposition précédente se traduit de la façon suivante en termes de gradient généralisé.

Proposition 6. Supposons que le problème $\alpha(s)$ soit calme en s et qu'il possède une solution $\bar{x} \in X$. Supposons que les fonctions f et g_i soient localement lipschitziennes. Il existe alors des constantes $p_i \geq 0$ telles

$$(40) \qquad 0 \in \partial_c f(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} p_i \partial_c g_i(\bar{x}) + N_X(\bar{x}) .$$

Démonstration. La proposition 6 résulte des propositions 5 et 4.2 et du théorème 6.1, impliquant que $\partial_c h_i(\bar{x}) = \text{co}\,(0, \partial_c g_i(\bar{x}))$ lorsque $i \in I(\bar{x})$. □

Remarque. Les contraintes d'égalité $g_i(x) = s_i$ sont prises en compte dans le cadre des contraintes d'inégalité, puisqu'elle peut s'écrire $g_i(x) \leq s_i$ et $-g_i(x) \leq -s_i$. □

8. PROPRIÉTÉS DE DÉRIVABILITÉ DE L'INF-CONVOLUTION DE DEUX FONCTIONS

Définition 1. Soient f et g deux fonctions de U dans $]-\infty, +\infty]$. On appelle inf-convolution de f et g la fonction $f \,\square\, g$ définie par

$$(1) \qquad (f \square g)(x) = \inf_{z \in U} [f(x-z) + g(z)] = \inf_{u \in U} [f(u) + g(x-u)] .$$

Nous désignerons par

$$(2) \qquad R(x) = \{z \in U \text{ tels que } (f \square g)(x) = f(x-z) + g(z)\} .$$

Remarquons que $R(x)$ est non vide si l'une des fonctions est minorée par une application affine et l'autre est semi-continue inférieurement et semi-compacte inférieurement (c'est-à-dire, ses sections inférieures sont relativement compactes). Le graphe de R est fermé si les fonctions f et g sont semi-continues inférieurement.

Il est clair que $f \,\square\, g$ est lipschitzienne (de constante L) lorsque la fonction f est lipschitzienne de constante L.

Proposition 1. Supposons que f soit lipschitzienne. Alors la dérivée au sens de Dini vérifie

(3) $\quad D_d(f\square g)(x)(v) \le D_d f(x-y)(v) \;, \quad \forall y \in R(x) \;.$

Si g est également dérivable à droite en $y \in R(x)$, alors

(4) $\quad D_d(f\square g)(x)(v) \le D_d g(y)(v) \;.$

Démonstration. Si $y \in R(x)$, alors, pour tout $\theta > 0$, on a, si $y \in R(x)$,

$$\frac{(f\square g)(x+\theta v) - (f\square g)(x)}{\theta} \le \frac{f(x-y+\theta v) - f(x-y)}{\theta} \;.$$

En prenant la limite supérieure quand θ converge vers 0 , on trouve l'inégalité (3). On obtient (4) en échangeant les rôles de f et de g . □

Remarque. Si $y \in R(x)$, on déduit de la proposition 3.2 que

(5) $\quad 0 \le D_d f(x-y)(-v) + D_d g(y)(v) \;.$

Si f est dérivable en $x - y$, il résulte de (3) et (5) que

(6) $\quad D_d(f\square g)(x)(v) \le \langle \nabla f(x-y), v\rangle \le D_d g(y)(v) \;.$ □

Proposition 2. Supposons que f soit lipschitzienne et que la correspondance $x \mapsto R(x)$ soit semi-continue inférieurement en x . Alors la dérivée de $f \square g$ au sens de Clarke vérifie

(7) $\quad D_c(f\square g)(x)(v) \le D_c f(x-y)(v) \;, \quad \forall y \in R(x)$

et, si f est continûment dérivable, alors $f \square g$ est dérivable:

(8) $\quad \nabla(f\square g)(x) = \nabla f(x-y) \quad$ où $\quad y \in R(x) \;.$

Démonstration. Prenons $x_0 \in X$, $y_0 \in R(x_0)$, $\varepsilon > 0$, α et $\beta > 0$ tels que

$$\sup_{\substack{\|z-(x_0-y_0)\|\le\alpha \\ \theta\le\beta}} \frac{f(z+\theta v) - f(z)}{\theta} \le D_c f(x_0-y_0)(v) + \varepsilon \;.$$

Puisque $R(\cdot)$ est semi-continue inférieurement en x_0 , il existe $\eta \le \alpha/2$ tel que si $\|x-x_0\| \le \eta$ on puisse trouver $y \in R(x)$ tel que $\|y-y_0\| \le \alpha/2$. Par suite,

$$D_c(f\square g)(x_0)(v) \le \sup_{\substack{\|x-x_0\|\le\eta \\ \theta\le\beta}} \frac{(f\square g)(x+\theta v) - (f\square g)(x)}{\theta}$$

$$\le \sup_{\substack{\|x-x_0\|\le\eta \\ \theta\le\beta}} \frac{f(x-y+\theta v) - f(x-y)}{\theta}$$

$$\le \sup_{\substack{\|z-(x_0-y_0)\|\le\alpha \\ \theta\le\beta}} \frac{f(z+\theta v) - f(z)}{\theta} .$$

On déduit alors que l'inégalité (7) est satisfaite. Supposons que f soit continûment différentiable. Il existe alors $y_\theta \in R(x+\theta v)$ qui converge vers $y \in R(x)$ puisque R est semi-continue inférieurement. Alors

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{f(x+\theta v-y_\theta) - f(x-y_\theta)}{\theta} \le \liminf_{\theta\to 0^+} \frac{(f\square g)(x+\theta v) - (f\square g)(x)}{\theta}$$

$$\le \limsup_{\theta\to 0^+} \frac{(f\square g)(x+\theta v) - (f\square g)(x)}{\theta}$$

$$\le \lim_{\theta\to 0} \frac{f(x-y+\theta v) - f(x-y)}{\theta} . \square$$

Donc (8) est démontrée.

Exemple. Soit $f : U \to]-\infty,+\infty]$ une fonction semi-continue inférieurement de domaine non vide. Prenons $g = \psi_X$, fonction indicatrice de X (égale à 0 sur X et à $+\infty$ ailleurs) et posons $f_X(x) = (f\square\psi_X)(x) = \inf_{z\in X} f(x-z)$ et $R_X(x) = \{y \in X$ tels que $f_X(x) = f(x-y)\}$. Nous savons que si f est dérivable au sens de Dini, alors

(9) $\quad D_d f_X(x)(v) \le D_d f(x-y)(v)$ pour tout $y \in R(x)$.

D'autre part, la proposition 5.2 montre que si f est lipschitzienne, alors il existe une constante L telle que

$$(10) \qquad \forall y \in R(x)\ ,\quad 0 \le D_d f(x-y)(-v) + LD_d d_X(y)(v)\ .$$

On en déduit le résultat suivant:

Proposition 3. Supposons que f soit dérivable en $x - y$ où $y \in R_X(x)$. Alors

$$(11) \qquad \forall v \in U\ ,\quad D_d f_X(x)(v) \le \langle \nabla f(x-y), v \rangle \le LD_d d_X(y)(v)\ .$$

Ceci implique en particulier que

$$(12) \qquad \forall v \in T_X(y)\ ,\quad D_d f_X(x)(v) \le \langle \nabla f(x-y), v \rangle \le 0\ .$$

Démonstration. Les inégalités (11) résultent trivialement de (9) et (10). □

Remarque. Soit S une correspondance de Y dans U (où $X \subset Y$) vérifiant

$$(13) \qquad \forall y \in X\ ,\quad S(y) \subset T_X(y)\ .$$

Alors l'inégalité (12) implique que $\forall y \in R_X(x)$

$$(14) \qquad \sup_{v \in S(x)} D_d f_X(x)(v) \le \sup_{v \in S(x)} \inf_{w \in S(y)} \langle \nabla f(x-y), v-w \rangle\ . \ \square$$

En particulier, en prenant $f(x) = \|x\|$, on obtient

$$(15) \qquad \begin{aligned} \forall x \notin X\ ,\quad \sup_{v \in S(x)} D_d d_X(x)(v) &\le \sup_{v \in S(x)} \inf_{w \in S(y)} \left\langle \frac{x-y}{d_X(x)}, v-w \right\rangle \\ &\le \sup_{v \in S(x)} \inf_{w \in S(y)} \|v-w\| \\ &\le \mathbf{d}(S(x), S(y)) \end{aligned}$$

où $\mathbf{d}$ désigne la distance de Hausdorff entre les ensembles. □

En prenant $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$, on retrouve la proposition 5.8. □

Exemple. Régularisation d'une fonction.

Soit $f : U \to]-\infty, +\infty]$ une fonction de domaine non vide semi-continue inférieurement et minorée par une fonction affine $\langle p,\cdot\rangle - f^*(p)$. Posons, si $k \geq 1$

(16) $$f_k(x) = \inf_{k \in U} [f(z) + \frac{1}{2k} \|x-z\|^2] .$$

Il est clair que si $k \geq h \geq 1$, on obtient

(17) $$\langle p,x\rangle - \frac{1}{2} \|x-p\|^2 - f^*(p) \leq f_1(x) \leq f_h(x) \leq f_k(x) \leq f(x)$$

et par suite, que pour tout $x \in U$,

(18) $$R_k(x) = \{x_k \in U \text{ tels que } f_k(x) = f(x_k) + \frac{1}{2k} \|x-x_k\|^2\}$$

est non vide. Les fonctions f_k sont donc des fonctions lipschitziennes de U dans $]-\infty,+\infty[$.

De plus,

(19) $$\sup_{x_k \in R(x_k)} \|x-x_k\|^2 \leq 2k(f(x)+f^*(p) + \frac{1}{2} \|x-p\|^2 - \langle p,x\rangle)$$ converge vers 0 quand $k \to \infty$.

Il en résulte que

(20) $$\forall x \in \text{Dom } f , \quad f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) .$$

Pour simplifier, nous allons identifier U et U^* .

Introduisons la correspondance P_k définie par

(21) $$P_k(x) = \frac{1}{k} (x-R_k(x)) .$$

Si $x_k \in R_k(x)$, posons $p_k = \frac{1}{k} (x-x_k) \in P_k(x)$. Alors, puisque x_k minimise $z \to f(z) + \frac{1}{2k} \|x-z\|^2$, on déduit de (6) que

(22) $$D_d f_k(x)(v) \leq \langle p_k,v\rangle \leq D_d f(x_k)(v)$$

lorsque la fonction f est dérivable au sens de Dini. En particulier, si la fonction f est localement lipschitzienne, on en déduit que

(23) $\forall x_k \in R_k(x)$, $p_k \in \partial_c f(x_k)$.

Soit L la constante de Lipschitz de f au voisinage de x . Puisque $D_c f(x)(v)$ est semi-continue supérieurement (théorème 3.1), on déduit de (22) que

(24) $<p_k,v> \leq D_c f(x_k)(v) \leq D_c f(x)(v) + \varepsilon \leq L\|v\| + \varepsilon$

pour k sufisamment grand. Cela implique d'abord que $P_k(x)$ reste dans un ensemble borné de U^* , qui est relativement compact pour la topologie faible.

Par suite, une sous-suite de p_k *converge vers un élément* p *et l'inégalité (23) montre que* $p \in \partial f(x)$.

Puisque x_k minimise $z \mapsto f(z) + \frac{1}{2k}\|x-z\|^2$, nous avons, en posant $p_k = \frac{x-x_k}{k} \in P_k(x)$

(25) $f(x_k) - f(z) \leq \frac{1}{2k}(\|x-z\|^2 - \|x-x_k\|^2) = \frac{1}{2k}\|x_k-z\|^2 + <p_k,x_k-z>$.

En prenant $z = y_k \in R_k(y)$, on obtient en particulier l'inégalité

(26) $f(x_k) - f(y_k) = <p_k,x_k-y_k> + \frac{1}{2k}\|x_k-y_k\|^2$.

En échangeant les rôles de x et de y et en introduisant $q_k = \frac{y-y_k}{k} \in P_k(y)$, on déduit

(27) $f(y_k) - f(x_k) \leq <q_k,x_k-y_k> + \frac{1}{2k}\|x_k-y_k\|^2$.

En additionnant ces deux inégalités, il résulte

(28) $$0 = <p_k-q_k,x_k-y_k> + \frac{1}{k}\|x_k-y_k\|^2 = <x-y,x_k-y_k>$$
pour tout $x_k \in R_k(x)$, $y_k \in R_k(y)$.

Ceci montre que la correspondance R_k est *monotone*. Cette inégalité implique à son tour l'inégalité

(29) $k^2\|p_k-q_k\|^2 = \|(x-x_k)-(y-y_k)\|^2 \leq \|x-y\|^2 + \|x_k-y_k\|^2$.

BIBLIOGRAPHIE SUCCINCTE

J.P. Aubin

[MMEGT] Mathematical Methods of Game and Economic Theory, North Holland (1978).

[AAA] Applied Abstract Analysis, Wiley Interscience (1977).

[AFA] Applied Functional Analysis, Wiley Interscience (1978).

[4] Micro-cours "Systèmes dynamiques multivoques discrets et correspondances monotones, Centre de Recherches Mathématiques, Université de Montréal, 1977.

J.P. Aubin and F.H. Clarke

Removal of linear constraints in minimizing nonconvex functions

F.H. Clarke

[1] The generalized problem of Bolza, Siam J. of Control and Opt. 14 (1976), 682-699.

[2] Generalized gradients and applications, AMS Transactions 205 (1975), 247-262.

[3] Admissible relaxation in variational and control problems, J. Math. Anal. Appl. 51 (1975), 557-576.

[4] Optimal solutions to differential inclusions, J. Opt. Theory Appl. (1975).

[5] La condition hamiltonienne d'optimalité, CRAS, 1975.

[6] Extremal arcs and extended hamiltonian systems, 1976.

[7] The maximum principle under minimal hypotheses. SIAM J. Control and Opt. 14 (1976).

[8] A new approach to Lagrange multipliers, Math. Op. Res. 1 (1976).

[9] Generalized gradients of Lipschitz functionals (to appear).

[10] The Euler-Lagrange differential inclusion, J. Diff. Eq. 19 (1975), 80-90.

[11] Necessary conditions for a general control problem, In Calculus of variations and control theory, Academic Press (1976).

[12] Inequality constraints in the calculus of variations (to appear).

R.T. Rockafellar

Convex Analysis, Princeton University Press, 1970.

Ceremade
Université Paris-Dauphine
Place du Mal de Lathe de Tassigny
75775 - Paris CEDEX 16
France

Manuscrit reçu le 31 mai 1977.
Revisé le 3 septembre 1977.