Ann. Sc. Math. Québec, 1978, vol. II, No 2, pp. 169-196

NOUVELLES MÉTHODES ANALYTIQUES DANS LA THÉORIE DES ALGÈBRES DE BANACH

Bernard Aupetit

0. INTRODUCTION

Une *algèbre de Banach complexe* A est un espace de Banach pour une norme $\| \ \|$, muni d'une multiplication $(x,y) \to xy$ qui en fait une algèbre telle que $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$, quels que soient x,y dans A. Dans la suite, nous supposerons toujours que A a une unité 1, vérifiant $\|1\| = 1$, car il est toujours possible de se ramener à ce cas. Les exemples les plus classiques d'algèbres de Banach sont les suivants:

- algèbres commutatives: l'algèbre des fonctions continues $C_{\mathbb{C}}(K)$ pour K compact; toute sous-algèbre fermée de $C_{\mathbb{C}}(K)$ (on dit que c'est une *algèbre de fonctions*), par exemple si K est un compact de $\mathbb{C}^n$, $P(K)$ l'algèbre des fonctions continues approximables sur K par des polynômes, $R(K)$ l'algèbre des fonctions continues approximables sur K par des fonctions rationnelles à pôles hors de K; $L^1(G)$ l'algèbre d'un groupe localement compact commutatif, etc. Il est bon de remarquer que $L^1(G)$ n'est pas une algèbre de fonctions et que les algèbres de fonctions peuvent se caractériser spectralement de façon très simple par la condition qu'il existe $k > 0$ tel que $\rho(x) \geq k \|x\|$ quel que soit x dans l'algèbre, où ρ désigne le rayon spectral.

- algèbres non commutatives: l'algèbre des opérateurs bornés $\mathcal{L}(X)$ pour X un espace de Banach; toute sous-algèbre fermée de $\mathcal{L}(X)$; toute sous-algèbre involutive de $\mathcal{L}(H)$, où H est un espace de Hilbert, on dit alors que c'est une

C-algèbre,* auquel cas la norme vérifie $\|x^*x\| = \|x\|^2$, quel que soit x dans cette algèbre; $L^1(G)$ l'algèbre d'un groupe localement compact non commutatif; $M_n(A)$ l'algèbre des matrices à coefficients dans une algèbre commutative A , etc.

Le concept abstrait d'algèbre de Banach a été introduit par M. Nogumo en 1936, mais son article fut peu remarqué, bien qu'il y démontrât, dans le cas commutatif, que la composante connexe de l'unité, dans l'ensemble des éléments inversibles, est constituée par les exponentielles. S. Mazur, en 1938, devait ensuite donner sa célèbre caractérisation des corps $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{K}$, mais c'est surtout I.M. Gelfand qui, vers 1940, allait utiliser à fond la théorie des fonctions analytiques pour obtenir son remarquable théorème de représentation des algèbres commutatives, avec comme corollaire immédiat la démonstration très simple du théorème de Wiener, à savoir que si f est continue, de période 2π , telle que $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$, pour $0 \leq t \leq 2\pi$, avec $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| < +\infty$ et telle que $f(t) \neq 0$ sur cet intervalle, alors $1/f$ a alors sa série de Fourier absolument convergente qui converge vers elle.

Bien sûr avant ces résultats les méthodes analytiques avaient été utilisées dans des situations concrètes: dans le théorie des matrices (Frobenius, Poincaré), dans la théorie des équations intégrales (F. Riesz, Hilbert), dans l'analyse harmonique (Beurling, Wiener), — sur l'historique de tout cela voir [32] — , mais le principal mérite de Gelfand est d'avoir su utiliser les principaux théorèmes de variable complexe (théorèmes de Liouville, Cauchy, etc.) dans une situation abstraite permettant d'englober une foule de résultats qui jusqu'alors semblaient très différents.

G.E. Šilov a ensuite introduit la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes, en particulier la représentation intégrale de A. Weil, qui par la suite, a été simplifiée par L. Walbroeck en utilisant les techniques d'Oka, pour étudier les rapports de la structure algébrique d'une algèbre A commutative avec la structure topologique de l'ensemble des caractères $\mathcal{M}(A)$. Par exemple, il a pu obtenir que:

- A est sans projecteurs non triviaux, c'est-à-dire indécomposable, si et seulement si $\mathcal{M}(A)$ est connexe.

- A a une unité si et seulement si $\mathcal{M}(A)$ est compact.

En 1963, Arens et Royden ont pu démontrer que $GL(A)/GL_1(A)$ est isomorphe à $H^1(\mathcal{M}(A),\mathbb{Z})$, où $GL(A)$ est le groupe des éléments inversibles de A , $GL_1(A)$ le sous-groupe distingué constitué par la composante connexe de l'unité dans $GL(A)$ et $H^1(\mathcal{M}(A),\mathbb{Z})$ le premier groupe de cohomologie de Čech, à coefficients entiers, qui, lui, est un pur invariant topologique. Ce beau résultat implique en particulier le fait non trivial que si Γ est un arc de $\mathbb{C}^n$ alors toute fonction continue sur Γ , ne s'annulant pas, admet un logarithme continu. Pour plus de détails sur la question des rapports de la structure algébrique de A et la topologie de $\mathcal{M}(A)$, voir [33] et les références citées.

Il va sans dire que toutes ces techniques inventées depuis 1940 ont été fortement utilisées par la suite; pour s'en convaincre, voir par exemple [9, 10, 11, 12, 28] . Plus particulièrement celles concernant les fonctions de plusieurs variables complexes ont été utilisées dans les algèbres de fonctions et pour les problèmes d'approximation holomorphe, rationnelle ou polynomiale dans $\mathbb{C}^n$, voir [22, 37] et le tout récent [20].

L'objet de cet exposé n'est pas de donner plus de détails sur ce qui précède, ni de faire un exposé historique des développements considérables de la théorie des algèbres de Banach depuis une dizaine d'années; on en trouvera une bonne partie dans [5], bien que, par exemple, les tout récents résultats extraordinaires de H.G. Dales et de J. Esterle, sur l'existence, à l'aide de l'hypothèse du continu, d'homomorphismes discontinus de $C_{\mathbb{C}}(K)$ dans une algèbre de Banach — ce qui répond négativement à une vieille conjecture de Kaplansky — , n'y soient pas inclus. Même si cette discipline s'est remarquablement accrue, au point de rendre presque caduc le vieil ouvrage classique de C.E. Rickart [28], nous choisirons seulement deux thèmes dans ce développement à savoir, pour le premier, la méthode de L.A. Harris qui exploite à fond les transformations de Möbius du disque unité et, pour le second, la méthode des fonctions sous-harmoniques qui est due à nous-mêmes.

1. MÉTHODE DE LA TRANSFORMÉE DE MÖBIUS

Dans tout ce qui suit $\mathrm{Sp}\, x$ dénote le spectre de x et $\rho(x)$ le rayon spectral.

Des résultats bien connus de S. Banach et M.H. Stone montrent que toute isométrie φ de $C_{\mathbb{C}}(K)$ sur lui-même, où K est un compact, est de la forme $\varphi(f)(x) = \varepsilon(x)f(h(x))$, où ε est une fonction continue de module 1 et où h est un homomorphisme de K sur lui-même. En fait la seule difficulté dans la démonstration est de montrer que toute isométrie surjective est un automorphisme. Si $H^{\infty}(\Delta)$ désigne l'ensemble des fonctions holomorphes et bornées sur le disque unité Δ , S. Kakutani a pu montrer que tout automorphisme de l'algèbre $H^{\infty}(\Delta)$ est de la forme $\varphi(f)(z) = f(\tau(z))$, où τ est une transformation conforme de Δ . Par la suite M. Nagasawa a pu montrer que toute isométrie d'une algèbre de fonctions A sur elle-même est de la forme $\varphi(f) = \varepsilon T(f)$, où ε , $1/\varepsilon$ appartiennent à A , $|\varepsilon| = 1$ et T est un automorphisme de A (voir [21], p. 144-147, où la démonstration est basée sur la frontière de Choquet). D'une façon assez compliquée, R.V. Kadison [23] a pu étendre ces résultats au cas des C*-algèbres non commutatives, ce qui généralise évidemment le théorème de Banach-Stone.

Théorème (Kadison). Toute isométrie φ d'une C*-algèbre A sur elle-même est de la forme $\varphi(x) = u \cdot T(x)$, où u est unitaire, c'est-à-dire vérifiant $u^*u = uu^* = 1$, et où T est un automorphisme de Jordan de A , c'est-à-dire tel que $T(x^2) = T(x)^2$, pour tout $x \in A$.

Mais en utilisant les transformations de Möbius, dont l'idée remonte à V.P. Potapov, L.A. Harris a pu obtenir beaucoup mieux à l'aide d'une démonstration conceptuellement simple.

Théorème (Harris). Soit A un sous-espace vectoriel complexe de $\mathcal{L}(H)$, où H est un espace de Hilbert, tel que $1 \in A$ et $x \in A$ implique $x^2 \in A$. Si est une isométrie de A sur lui-même telle que $\varphi(1)^* \in A$ alors $\varphi(1)$ est unitaire et il existe T un automorphisme linéaire de A vérifiant $T(1) = 1$, $T(x^2) = T(x)^2$ pour tout $x \in A$, ainsi que $\varphi(x) = \varphi(1)T(x)$, pour tout $x \in A$. Si en plus, x et x^* appartiennent à A alors $T(x^*) = T(x)^*$.

Si l'on sait, d'après le théorème de Gelfand-Naïmark, que toute C*-algèbre peut s'identifier à une sous-algèbre fermée involutive de $\mathcal{L}(H)$, pour un espace de Hilbert H convenable, alors les théorèmes de Kadison et de Nagasawa deviennent des corollaires immédiats. Afin de simplifier l'exposé nous admettrons le résultat suivant qu'on peut trouver dans plusieurs livres sur les fonctions de plusieurs variables complexes, par exemple dans [24], p. 66, ou dans [18] où la démonstration est différente.

Théorème (H. Cartan). Si D est un domaine borné d'un espace normé complexe X, qui contient 0 et si h est une fonction holomorphe de D dans D telle que $h(0) = 0$ et $Dh(0) = \mathrm{Id}$ alors $h = \mathrm{Id}$ sur D.

Dire que la fonction est *holomorphe* sur D signifie que sa différentielle de Fréchet complexe $Dh(x)$ existe en tout point de D. Ce théorème signifie que s'il existe une transformation biholomorphe d'un domaine borné D de X cette transformation est définie par sa valeur en un point et sa différentielle en ce point. Dans le cas où $X = \mathbb{C}$ et où $D = \{z \mid |z| < 1\}$ cela donne le cas particulier du lemme de Schwarz.

Idée de la démonstration de Harris (pour les détails voir [18]). Nous supposerons que $\varphi(1) = 1$, le cas général étant un peu plus calculatoire, aussi nous l'omettrons. Si $-1 < t < 1$, avec $t \neq 0$, posons:

$$T_t(x) = (x + t1)(1 + tx)^{-1}, \text{ pour } \|x\| < 1 .$$

D'après le théorème de von Neumann-Heinz ([29], p. 453), $\|T_t(x)\| < 1$, donc $h_t = T_{-t} \circ \varphi \circ T_t$ est une transformation biholomorphe de la boule unité ouverte de

A vérifiant $\varphi = Dh_t(0)$. D'après le théorème d'unicité de Cartan, $\varphi = h_t$, donc $T_t \circ \varphi = \varphi \circ T_t$ et comme $T_t(x) = x + t(1-x^2)(1+tx)^{-1}$ on obtient:

$$(1 - \varphi(x)^2)(1 + t\varphi(x))^{-1} = \varphi((1 - x^2)(1 + tx)^{-1})$$

soit en faisant tendre t vers 0 , $\varphi(x^2) = \varphi(x)^2$. □

Dans le cas où A est une algèbre de fonctions il n'est pas nécessaire d'utiliser le théorème de von Neumann-Heinz, car le rayon spectral ρ définit une norme sur A et il n'est pas difficile de vérifier, d'après le calcul fonctionnel holomorphe, que $\rho(x) < 1$ implique $\rho(T_t(x)) < 1$ autrement dit que h_t définit une transformation biholomorphe de $\{x|\rho(x)<1\}$.

Dans le cas commutatif un tel automorphisme de Jordan est un automorphisme d'algèbre, car de

$$xy = \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{2} ,$$

on déduit que

$$T(xy) = \frac{T((x+y)^2) - T((x-y)^2)}{2} = \frac{T(x+y)^2 - T(x-y)^2}{2} = Tx \cdot Ty$$

*

Afin d'étudier les applications linéaires d'une C*-algèbre dans une autre, B. Russo et H.A. Dye [30] ont montré que dans une C*-algèbre la boule unité fermée est l'enveloppe convexe fermée des éléments unitaires. Leur démonstration, qui utilise la théorie spectrale, est technique et entièrement liée à la structure sous-jacente d'espace de Hilbert (d'après le théorème de Gelfand-Naimark). Toujours à l'aide des transformations de Möbius, c'est-à-dire sans utiliser l'espace sur lequel opère l'algèbre, L.A. Harris a pu obtenir dans [19]:

Théorème (Harris). Si A est une algèbre de Banach à involution continue, avec unité, alors l'enveloppe convexe de U_1 , la composante connexe contenant 1 de l'ensemble des éléments unitaires U , contient les $x \in A$ tels que $\rho(x) < 1$ et $\rho(x^*x) < 1$.

Cela donne une très nette amélioration du résultat de Russo-Dye, dans le cas des C*-algèbres, car on obtient $\{x \mid \|x\|<1\} \subset \mathrm{co}\, U_1 \subset \{x \mid \|x\|\leq 1\}$, puisque $\|x\| < 1$ implique $\rho(x) < 1$ et $\rho(x^*x) = \|x^*x\| = \|x\|^2 < 1$. D'après le célèbre théorème de B.E. Johnson l'involution sera continue en particulier si le radical de Jocobson de A est réduit à $\{0\}$. En supprimant l'hypothèse de continuité de l'involution, ce qui peut se produire si $\mathrm{Rad}\, A \neq \{0\}$, dans [5], chapitre 4, nous avons pu obtenir mieux, c'est-à-dire que $\{x \mid \rho(x^*x)<1\} \subset \mathrm{co}\, U$, mais la démonstration est beaucoup plus technique.

Idée de la démonstration de Harris.

a) Si $\rho(x) < 1$, $\rho(x^*x) < 1$ et $|\lambda| = 1$ alors d'après le calcul fonctionnel holomorphe $T_x(\lambda) = (1-xx^*)^{-\frac{1}{2}}(\lambda+x)(1+\lambda x^*)^{-1}(1-x^*x)^{\frac{1}{2}}$ est défini. Un peu de calcul montre que $T_x(\lambda) \in U_1$. L'utilisation de la formule de Cauchy donne $x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T_x\,(e^{i\theta})d\theta$, donc que x appartient à l'adhérence de $\mathrm{co}\, U_1$.

b) Si $\rho(x) < 1$ et $\rho(x^*x) < 1$ il existe $t > 1$ tel que $\rho(tx) < 1$ et $\rho((tx)^*(tx)) < 1$, donc $tx \in \overline{\mathrm{co}\, U_1}$, ainsi il existe $x_1 \in \mathrm{co}\, U_1$ tel que $\|tx-x_1\| < \frac{t-1}{2}$. Si on écrit $tx - x_1 = (t-1)x_2$ alors $\|x_2\| < \frac{1}{2}$ et $x = \frac{x_1}{t} + (1-\frac{1}{t})x_2$.

c) Il reste à prouver que $x_2 \in \mathrm{co}\, U_1$. Comme l'involution est continue on peut supposer que $\|x\| = \|x^*\|$, pour $x \in A$. Posons $h = x_2 + x_2^*$ et $k = -i\,(x_2-x_2^*)$, alors h , k sont hermitiens et vérifient $\|h\| < 1$ et $\|k\| < 1$. D'après le calcul fonctionnel holomorphe $u_1 = h + i\,(1-h^2)^{\frac{1}{2}}$, $u_2 = h - i\,(1-h^2)^{\frac{1}{2}}$, $v_1 = k + i\,(1-k^2)^{\frac{1}{2}}$ et $v_2 = k - i\,(1-k^2)^{\frac{1}{2}}$ sont unitaires et vérifient $x_2 = \frac{1}{4}[u_1+u_2+iv_1+iv_2] \in \mathrm{co}\, U_1$. □

Si A est une algèbre commutative avec involution, D.A. Raĭkov a montré l'équivalence des deux propriétés suivantes:

- pour tout h hermitien, le spectre de h est réel
- pour tout x dans A, $1 + x^*x$ est inversible, ce qui revient à dire que le spectre de x^*x est positif.

Gelfand et Naǐmark ont conjecturé l'équivalence de ces deux propriétés dans le cas non commutatif, mais c'est seulement en 1970 que S. Shirali et J.W.M. Ford ont pu résoudre affirmativement cette conjecture. Aussi nous dirons qu'une algèbre de Banach avec involution est *symétrique* si $\mathrm{Sp}\,h$ est réel pour tout h hermitien. Comme exemples d'algèbres symétriques il y a les C^*-algèbres, $L^1(G)$ pour G commutatif ou compact ou produit d'un groupe commutatif et d'un groupe compact, ou connexe et à croissance polynomiale (récent résultat de J. Ludwig). Comme exemples d'algèbres non symétriques il y a $\mathbb{C}^2$ muni de l'involution $(\alpha,\beta)^* = (\overline{\alpha},\overline{\beta})$, $A(\Delta)$ l'algèbre des fonctions holomorphes sur Δ, continues sur $\overline{\Delta}$, avec l'involution $f^*(\lambda) = \overline{f(\overline{\lambda})}$, et dans le cas non commutatif $\ell^1(\Gamma)$, où Γ est le groupe libre à deux générateurs muni de la topologie discrète. Malgré que les groupes localement compacts à croissance polynomiale aient un comportement très régulier, J.B. Fountain, J.H. Williamson et R.W. Ramsay ont pu construire un tel groupe pour lequel $L^1(G)$ est non symétrique.

Dans le cas des algèbres symétriques le théorème de Harris prend une forme plus explicite.

Théorème (Harris, Pták). Soit A une algèbre symétrique, avec unité dont l'involution est continue, alors si $\rho(x^*x) < 1$, x appartient à l'enveloppe convexe de $E = \{e^{ih} \mid h = h^*\} \subset U_1$.

Ces résultats permettent donc de donner une démonstration non spatiale, c'est-à-dire n'utilisant pas l'*image numérique*, comme cela est fait dans [10, 11] de la jolie caractérisation qui suit des C^*-algèbres.

Théorème (Vidav, Palmer). Pour qu'une algèbre de Banach avec involution et avec unité soit une C^*-algèbre, il faut et il suffit que $\|e^{ih}\| = 1$, pour tout h hermitien.

Il en résulte en particulier qu'une algèbre de Banach avec involution est une C^*-algèbre si et seulement si $\|x^*x\| = \|x\|\|x^*\|$, quel que soit $x \in A$, ce qui résoud une vieille conjecture de Gelfard et Naǐmark remontant à 1943. Cette condition peut être affaiblie sous la forme $\|x^*x\| = \|x\|\|x^*\|$, pour tout x normal, c'est-à-dire vérifiant $xx^* = x^*x$, comme l'a montré G.A. Elliott.

Bien que le résultat qui suit ne se démontre pas à l'aide de la méthode de Harris, nous le citerons parce qu'il donne une remarquable caractérisation purement locale — dans le sens qu'il suffit de se restreindre aux sous-algèbres commutatives — des C^*-algèbres.

Théorème (Cuntz [15]). Pour qu'une algèbre de Banach avec involution soit une C^*-algèbre, pour une norme équivalente, il faut et il suffit que quel que soit h hermitien la sous-algèbre fermée $C(h)$ engendrée par h soit une C^*-algèbre, pour une norme équivalente.

On peut alors en déduire le:

Théorème. Pour qu'une algèbre de Banach avec involution soit une C^*-algèbre, pour une norme équivalente, il faut et il suffit que quel que soit h hermitien, la sous-algèbre fermée $C(h)$ soit isomrophe à $C_{\mathbb{C}}(X)$, pour un X compact convenable.

En effet, soit φ l'isomorphisme de $C_{\mathbb{C}}(X)$ sur $C(h)$. Posons $|||x||| = \|\varphi(x)\|$, pour $x \in C_{\mathbb{C}}(X)$. Cela définit une norme d'algèbre, qui est complète car si $|||x_n - x_m|||$ tend vers 0 alors $(\varphi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $C(h)$, donc il existe $x \in C_{\mathbb{C}}(X)$ tel que $\|\varphi(x_n) - \varphi(x)\|$ tende vers 0 , ce qui signifie que $|||x_n - x|||$ tend vers 0 . Ainsi $|||\ |||$ et ρ sont équivalentes sur $C_{\mathbb{C}}(X)$, donc en se ramenant sur $C(h)$, $\|\ \|$ et ρ sont équivalentes sur $C(h)$.

2. MÉTHODE DES FONCTIONS SOUS-HARMONIQUES

Il est bien connu, qu'en général, dans une algèbre de Banach non commutative, la fonction spectre $x \mapsto \mathrm{Sp}x$ n'est pas continue. Ainsi, voir [28], p. 282,

S. Kakutani a donné un exemple d'une suite d'opérateurs de décalage dans $\mathcal{L}(H)$, où H est un espace de Hilbert, qui sont nilpotents et qui convergent vers un élément non quasi-nilpotent, c'est-à-dire de spectre différent de $\{0\}$. Tout récemment, ont été découverts deux exemples encore plus frappants: P.G. Dixon [16] a construit une algèbre de Banach sans radical contenant une sous-algèbre dense dont tout élément est nilpotent; si G est un groupe discret admettant $x_1, x_2, \ldots$ comme générateurs, avec les relations $x_1^2 = 1$, $x_i x_k x_j x_k = x_k x_j x_k x_i$, pour $i,j \leq k$, alors J.B. Fountain, R.W. Ramsay et J.H. Williamson [27] ont pu prouver que G est localement fini, donc à croissance polynomiale, avec $\ell^1(G)$ non symétrique, ce qui prouve en particulier que $x \mapsto \mathrm{Sp}x$ est non continu sur l'ensemble des éléments hermitiens puisque, d'après un théorème de A. Hulanicki, $\mathrm{Sp}x$ est réel pour les x hermitiens à support compact de $\ell^1(G)$, si G est séparable et à croissance polynomiale. Mais on sait depuis très longtemps que la fonction spectre est semi-continue supérieurement. J.D. Newburgh, en 1951, s'est intéressé de savoir quand la fonction spectre est continue. Entre autres, il a obtenu:

Théorème (Newburgh). Si C est un sous-ensemble ouvert et fermé de $\mathrm{Sp}x$, où x appartient à une algèbre de Banach, alors pour tout ouvert U contenant C il existe $r > 0$ tel que $\|x-y\| < r$ implique $\mathrm{Sp}y \cap U \neq \phi$.

Corollaire (Newburgh). Si $\mathrm{Sp}a$ est totalement discontinu alors la fonction spectre est continue en a .

Ce corollaire prouve en particulier que le spectre est continu sur $M_n(\mathbb{C})$, sur $\mathcal{LC}(X)$ l'algèbre des opérateurs compacts sur l'espace de Banach X , sur toute algèbre de Banach ayant un ensemble "suffisant" de représentations irréductibles de dimension finie, ce qui est le cas de $M_n(A)$ si A est une algèbre de Banach commutative. En fait ces deux résultats sont des cas particuliers du théorème de pseudo-continuité que nous verrons plus loin.

Dans le cas des algèbres de Banach avec involution on a pu obtenir des résultats assez satisfaisants. Le premier que nous donnons a une démonstration très simple mais, aussi curieux que cela puisse paraître, il était inconnu jusqu'à ces dernières années. Par exemple, certaines personnes avaient pu prouver la continuité simple (Newburgh), l'uniforme continuité sur l'ensemble des éléments hermitiens, ce qui est beaucoup plus facile (Kato), ou bien l'uniforme continuité sur l'ensemble des éléments normaux pour une C*-algèbre de dimension finie, donc $M_n(\mathbb{C})$ (Hoffman et Wielandt, Bauer et Fike, Stoer et Burlisch, etc.).

Théorème 1 (Aupetit, Conway, Pták, Zemánek). Si x, y sont normaux dans une C*-algèbre alors $\Delta(\mathrm{Sp}x,\mathrm{Sp}y) \leq \|x-y\|$, où Δ désigne la distance de Hausdorff pour les compacts du plan complexe.

Démonstration. Soit λ tel que $d(\lambda,\mathrm{Sp}x) > \|x-y\|$, alors $\lambda - x$ est inversible et $(\lambda-x)^{-1}$ est normal, donc $\|(\lambda-x)^{-1}\| = \rho((\lambda-x)^{-1}) = 1/d\,(\lambda,\mathrm{Sp}x)$, d'après le calcul fonctionnel holomorphe. De plus $\lambda - y = \lambda - x + x - y = (\lambda-x)[1+(\lambda-x)^{-1}(x-y)]$ et

$$\|(\lambda-x)^{-1}(x-y)\| \leq \|(\lambda-x)^{-1}\|\|x-y\| = \frac{\|x-y\|}{d(\lambda,x)} < 1$$

donc $1 + (\lambda-x)^{-1}(x-y)$ est inversible, d'où aussi $\lambda - y$, c'est-à-dire que $\lambda \notin \mathrm{Sp}y$, soit $\mathrm{Sp}y \subset \mathrm{Sp}x + B(0,\|x-y\|)$. $\square$

Ce résultat a été amélioré par les deux théorèmes qui suivent, le deuxième étant beaucoup plus difficile à démontrer.

Théorème 2 (Aupetit [3, 5]). Si A est une algèbre symétrique il existe $\alpha > 0$ tel que pour tous x,y normaux on ait:

$$\Delta(\mathrm{Sp}x,\mathrm{Sp}y) \leq \rho((x-y)^*(x-y))^{\frac{1}{2}} \leq \alpha\|x-y\| .$$

En particulier la fonction spectre est uniformément continue sur l'ensemble des éléments normaux.

Théorème 3 (Aupetit [5]). Si A est une algèbre de Banach avec involution pour laquelle il existe $c > 0$ tel que $\rho(xy) \leq c\rho(x)\rho(y)$, pour tous x,y normaux, alors il existe $\alpha > 0$ tel que $\Delta(\mathrm{Sp}x,\mathrm{Sp}y) \leq \alpha\|x-y\|$ pour tous x,y normaux. En particulier la fonction spectre est uniformément continue sur l'ensemble des éléments normaux.

Récemment J. Janas a prouvé la continuité simple de la fonction spectre sur l'ensemble des opérateurs hyponormaux de l'espace de Hilbert — c'est-à-dire les opérateurs vérifiant $T^*T - TT^* \geq 0$. Les mêmes arguments que plus haut montrent immédiatement l'uniforme continuité. En appliquant le théorème 1, V. Pták et J. Zemánek [25] ont pu obtenir le petit résultat suivant: si M est une matrice $n \times n$ normale de coefficients a_{ij}, on sait que

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} |a_{ik}|^2 = \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} |a_{ji}|^2 ,$$

si on dénote par r_i la racine carrée positive de cette quantité alors tout disque $\{z \mid |z-a_{ii}|\leq r_i\}$ contient au moins une valeur propre de A.

En 1968-1970 les résultats d'E. Vesentini [35, 36] devaient faire redémarrer l'étude des propriétés générales du spectre. Pour comprendre ce qui va suivre, rappelons la définition et les principales propriétés des fonctions sous-harmoniques.

Soit D un domaine de $\mathbb{C}$, une fonction de D dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est dite *sous-harmonique* si elle est semi-continue supérieurement, ce qui revient à dire que $\varphi(\lambda_0) \geq \overline{\lim\limits_{\substack{\lambda\to\lambda_0\\ \lambda\neq\lambda_0}}} (\lambda)$, quel que soit $\lambda_0 \in D$ et si φ vérifie l'inégalité de la moyenne, c'est-à-dire si l'on a: $\varphi(\lambda_0) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\lambda_0+re^{i\theta})d\theta$, quels que soient $\lambda_0 \in D$ et $r > 0$ tel que $\overline{B}(z_0,r) = \{z \mid |z-z_0|\leq r\} \subset D$.

Propriétés (pour plus de détails, voir [5, 24, 34]).

1) si φ_1 et φ_2 sont sous-harmoniques, $\varphi_1 + \varphi_2$ est sous-harmonique.

2) si φ est sous-harmonique et si $\lambda \geq 0$ alors $\lambda\varphi$ est sous-harmonique.

3) si (φ_n) est une suite décroissante de fonctions sous-harmoniques alors $\lim \varphi_n$ est sous-harmonique.

4) si φ est sous-harmonique et f est convexe et croissante alors $f \circ \varphi$ est sous-harmonique.

5) si φ est sous-harmonique et si $\varphi(\lambda) \leq 1$ pour $|\lambda| = 1$ alors $\varphi(\lambda) \leq 1$ pour $|\lambda| \leq 1$ (principe du maximum).

6) si φ est sous-harmonique, $\varphi(\lambda_0) = \overline{\lim\limits_{\substack{\lambda \to \lambda_0 \\ \lambda \neq \lambda_0}}} \varphi(\lambda)$.

7) si φ est sous-harmonique sur $\mathbb{C}$ et $\lim\limits_{\lambda \to \infty} \varphi(\lambda) = 0$, alors $\varphi \equiv 0$ (analogue du théorème de Liouville).

8) si pour tout polynôme p , $|e^{p(\lambda)}|\varphi(\lambda)$ est sous-harmonique et positive alors $\operatorname{Log} \varphi$ est sous-harmonique (théorème de Radó, affaibli par B. Cole).

Théorème (Vesentini). Si $\lambda \mapsto f(\lambda)$ est une fonction analytique d'un domaine D de $\mathbb{C}$ dans une algèbre de Banach A alors $\lambda \mapsto \rho(f(\lambda))$ et $\lambda \mapsto \operatorname{Log} \rho(f(\lambda))$ sont sous-harmoniques.

Idée de la démonstration.

a) La fonction $\lambda \mapsto \|f(\lambda)\|$ est sous-harmonique d'après la formule intégrale de Cauchy, donc, puisque $|e^{p(\lambda)}|\,\|f(\lambda)\| = \|e^{p(\lambda)} f(\lambda)\|$, d'après le théorème de Radó, $\lambda \mapsto \operatorname{Log} \|f(\lambda)\|$ est sous-harmonique.

b) La suite $\frac{1}{2^n} \operatorname{Log}\|f(\lambda)^{2^n}\|$ est décroissante et converge vers $\operatorname{Log} \rho(f(\lambda))$, donc d'après la 3e propriété, $\lambda \to \operatorname{Log} \rho(f(\lambda))$ est sous-harmonique.

c) En prenant $f(t) = e^t$, $\lambda \to \rho(f(\lambda))$ est sous-harmonique. □

Donnons quelques corollaires, le premier est connu depuis longtemps, mais avec des démonstrations différentes.

Corollaire (Kleinecke-Shirokov). Si A est une algèbre de Banach et si $a,b \in A$ vérifient $[a,[a,b]] = 0$, où $[x,y] = xy-yx$, alors $\rho([a,b]) = 0$.

Démonstration. On remarque que $\mu\, e^{a/\mu}\, b\, e^{-a/\mu} = [a,b] + \mu b$, donc que

$$\rho([a,b]) = \overline{\lim_{\mu\to 0}}\, \rho([a,b]+\mu b) = \overline{\lim_{\mu\to 0}}\, |\mu|\rho(e^{a/\mu}b\, e^{-a/\mu}) = \overline{\lim_{\mu\to 0}}\, |\mu|\rho(b) = 0\ ,$$

d'après la propriété 6) et le fait que $\rho(xy) = \rho(yx)$ quels que soient $x,y \in A$. □

Pour x dans une algèbre de Banach, nous appellerons *spectre plein* de x , noté $\sigma(x)$, la réunion de $\mathrm{Sp}x$ et de ses trous.

Corollaire (*Aupetit* [3]). Si $a,b \in A$ vérifient $a[a,b] = 0$ ou $[a,b]a = 0$ et si 0 est sur la frontière extérieure du spectre de a , c'est-à-dire la frontière de $\sigma(a)$, alors $\rho([a,b]) = 0$.

Démonstration. Supposons $[a,b]a = 0$. Pour $|\lambda| > \|a\|$ on a

$$(\lambda-a)b(\lambda-a)^{-1} = (1-\frac{a}{\lambda})b(1+\frac{a}{\lambda}+\frac{a^2}{\lambda^2}+\dots) = b - \frac{1}{\lambda}[a,b]$$

qui par prolongement analytique est vrai sur $\mathbb{C}\backslash\sigma(a)$. Ainsi $|\lambda|\rho(b) = \rho(\lambda b-[a,b])$, pour $\lambda \notin \sigma(a)$. Mais $\mathbb{C}\backslash\sigma(a)$ est un ouvert connexe, donc *non effilé* en chacun de ses points frontières (voir plus loin), ainsi $\rho([a,b]) = \overline{\lim\limits_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda\notin\sigma(a)}}}\, \rho(\lambda b-[a,b]) = 0$. □

Il en résulte immédiatement que si dans une C^*-algèbre deux éléments hermitiens h et k vérifient $h[h,k] = 0$, alors ils commutent.

Corollaire (*Vesentini*) (Principe du maximum pour le spectre plein). Si $\lambda \to f(\lambda)$ est une fonction analytique d'un domaine D de $\mathbb{C}$ dans une algèbre de Banach A et s'il existe $\lambda_0 \in D$ tel que $\sigma(f(\lambda)) \subset \sigma(f(\lambda_0))$ pour tout $\lambda \in D$, alors $\sigma(f(\lambda)) = \sigma(f(\lambda_0))$, pour tout $\lambda \in D$.

Idée de la démonstration. On applique le principe du maximum — propriété 5) — aux fonctions $\rho((f(\lambda)-\xi)^{-1})$, pour des ξ convenablement choisis hors de $\mathrm{Sp}f(\lambda_0)$. □

Si N désigne l'ensemble des éléments quasi-nilpotents d'une algèbre de Banach A on a toujours $\mathrm{Rad}\,A \subset N$. Pour les algèbres commutatives on a $\mathrm{Rad}\,A = N$, mais la réciproque est fausse. R.A. Hirschfeld et S. Rolewicz,

H. Behncke, A.S. Nemirovskii, J. Duncan et A.W. Tullo ont pu construire des algèbres non commutatives où Rad A = N = {0} . R.A. Hirschfeld et W. Żelazko avaient conjecturé en 1968 qu'une algèbre de Banach, où Rad A = N = {0} et où la fonction spectre est continue, est commutative. Nous avons récemment montré que ce résultat est faux en considérant la sous-algèbre de $M_2(A)$, où A est l'algèbre des fonctions holomorphes à deux variables sur $\Delta \times \Delta$, continues sur $\overline{\Delta} \times \overline{\Delta}$, formée par les matrices

$$m = \begin{pmatrix} f(z_1,z_2) & , \ g(z_1,z_2) \\ (z_1+z_2)Tg(z_1,z_2) & , \ Tf(z_1,z_2) \end{pmatrix}$$

où T est l'automorphisme isométrique de A défini par $Tf(z_1,z_2) = f(z_2,z_1)$. Donc, même pour des algèbres très régulières on a $N \neq \text{Rad } A$. Z. Słodkowski, W. Wojtyński et J. Zemánek ont donné de très jolies conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on ait l'égalité.

Corollaire (Słodkowski-Wojtyński-Zemánek [31]). Dans une algèbre de Banach les propriétés suivantes sont équivalentes:

1) N = Rad A

2) $x,y \in N$ implique $x + y \in N$

3) $x,y \in N$ implique $xy \in N$.

Idée de la démonstration. 1) implique 3) est facile. 3) implique 2) résulte du fait que $1 - \frac{x+y}{\lambda} = (1 - \frac{x}{\lambda})(1 - uv)(1 - \frac{y}{\lambda})^{-1}$, où $u = (1 - \frac{x}{\lambda})^{-1} \frac{x}{\lambda}$ et $v = \frac{y}{\lambda} (1 - \frac{y}{\lambda})^{-1}$, est inversible quel que soit $\lambda \neq 0$, car $u,v \in N$. 2) implique 1) est beaucoup plus difficile. On commence par montrer que si $x \in N$ alors $ax - xa \in N$, quel que soit $a \in A$. En effet

$$e^{\lambda a} x \, e^{-\lambda a} = x + \lambda[x,a] + \frac{\lambda^2}{2!} [x,[x,a]] + \dots$$

appartient à N car $\rho(e^{\lambda a} x \, e^{-\lambda a}) = \rho(x) = 0$, donc:

$$g(\lambda) = [x,a] + \frac{\lambda}{2} [x,[x,a]] + \dots = \frac{e^{\lambda a} x \, e^{-\lambda a} - x}{\lambda} \in N .$$

Ainsi $\rho(g(\lambda)) = 0$, pour tout $\lambda \neq 0$, d'où $\rho([x,a]) = 0$, d'après la propriété 6) . Enfin à l'aide des représentations irréductibles et du théorème de densité de Jacobson on obtient que $x \in N$ et $[a,x] \in N$ pour tout $a \in A$ implique $x \in \text{Rad } A$. $\square$

Diverses personnes comme C. Le Page, R.A. Hirschfeld et W. Żelazko, G. Mocanu, ont montré que si une algèbre de Banach vérifie $\rho(x) \geq k\|x\|$, pour une constante $k \leq 1$ convenable et pour tout x de A , alors A est commutative. Malheureusement cela ne donne qu'une caractérisation topologique des algèbres de fonctions. Dans [2] nous avons donné de très simples caractérisations spectrales des algèbres commutatives, dont voici quelques unes:

Théorème 4 (Aupetit). Dans une algèbre de Banach les propriétés suivantes sont équivalentes:

1) $A/\text{Rad } A$ est commutative

2) la fonction spectre est uniformément continue sur A

3) ρ est uniformément continu sur A

4) il existe $\alpha > 0$ tel que $\rho(x\,y) \leq \alpha(\rho(x)+\rho(y))$, pour $x,y \in A$

5) il existe $\alpha > 0$ tel que $\rho(xy) \leq \alpha\rho(x)\rho(y)$, pour $x,y \in A$

6) dans un voisinage V de l'unité on a $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$

7) dans un voisinage V de l'unité on a $\rho(xy) \leq \rho(x)\rho(y)$.

Idée de la démonstration. Il est évident que 1) implique n), pour $1 \leq n \leq 7$. De même 2) implique 3) est facile. Nous ne montrerons pas que 6) ou 7) implique 1) car c'est assez technique. Faisons d'abord 3) implique 1). Il n'est pas difficile de voir qu'il existe $k > 0$ tel que $|\rho(x) - \rho(y)| \leq k\|x-y\|$. Si on pose

$$g(\lambda) = \frac{e^{\lambda x} y\, e^{-\lambda x} - y}{\lambda} = [x,y] + \lambda[x,[x,y]] + \dots ,$$

alors:

$$\rho(g(\lambda)) \leq \frac{\rho(e^{\lambda x} y\, e^{-\lambda x})}{|\lambda|} + \frac{\|y\|}{|\lambda|} = \frac{\rho(y)+\|y\|}{|\lambda|}$$

donc $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \rho(g(\lambda)) = 0$, d'après la propriété 7) des fonctions sous-harmoniques $\rho(g(\lambda)) \equiv 0$, d'où $\rho([x,y]) = 0$. En utilisant les représentations irréductibles et le théorème de densité de Jacobson, on voit que $xy - yx \in \mathrm{Rad}\, A$, d'où $A/\mathrm{Rad}\, A$ est commutative. Que 4) implique 1) se fait quasiment de la même façon. Il reste à prouver que 5) implique 2), pour cela on procède comme dans la démonstration du théorème 1 en montrant que $\Delta(Spx,Spy) \leq c\, \rho(x-y) \leq c\|x-y\|$. □

Pour voir que les résultats de Le Page etc. sont des cas particuliers de ce résultat il suffit de voir que $\rho(x) \geq k\|x\|$ implique $\rho(x+y) \leq \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \leq \frac{1}{k}(\rho(x)+\rho(y))$, quels que soient $x,y \in A$. Si on appelle *quasi-centre* de A , dénoté par $Z(A)$, l'ensemble des x tels que $xy - yx \in \mathrm{Rad}\, A$, pour tout y de A il n'est pas bien difficile de voir, en reprenant la démonstration précédente, que l'on a:

Corollaire. Dans une algèbre de Banach les propriétés suivantes sont équivalentes:

1) $x \in Z(A)$

2) il existe $\alpha > 0$ tel que $\rho(x+y) \leq \alpha(\rho(x)+\rho(y))$, pour tout $y \in A$

3) il existe $\alpha > 0$ tel que $\rho(x(1+y)) \leq \alpha\rho(x)\rho(1+y)$, pour tout $y \in A$

4) il existe $\alpha > 0$ tel que $|\rho(x+y) - \rho(y)| \leq \alpha$, pour tout $y \in A$.

Pas une méthode plus élémentaire dans la mesure où elle utilise seulement les fonctions analytiques, mais beaucoup plus technique dans les détails, V. Pták et J. Zemánek [26] ont obtenus quelques-uns de ces résultats. Mais leur méthode est impuissante pour les caractérisations locales 6) et 7) du théorème 4.

Nous allons maintenant donner, à l'aide de la théorie du potentiel classique, des résultats beaucoup plus profonds. Pour plus de tédails sur la théorie du potentiel voir [13, 34], et sur nos travaux voir [1, 4, 5].

Théorème 5 (*Aupetit*) (de pseydo-continuité spectrale). Si $\lambda \mapsto f(\lambda)$ est une fonction analytique d'un domaine D de $\mathbb{C}$, contenant λ_0, dans une algèbre de Banach A, et si E est un sous-ensemble de D, non effilé en λ_0, alors il existe une suite (λ_n) d'éléments de E, tendant vers λ_0, avec $\lambda_n \neq \lambda_0$, telle que $\Delta(\sigma(f(\lambda_n)), \sigma(f(\lambda_0)))$ tende vers 0 quand n tend vers l'infini.

Ce résultat est évidemment trivial si la fonction spectre est continue sur A, aussi n'a-t-il d'intérêt que si la fonction spectre est discontinue. Nous ne donnerons pas la définition de *non effilé* mais nous garderons seulement à l'esprit qu'un arc simple est non effilé en chacun de ses points (théorème d'Oka-Rothstein) et qu'un ouvert connexe est non effilé en chacun de ses points frontières. Ce théorème devient faux si on remplace $\sigma(f(\lambda))$ par $\operatorname{Spf}(\lambda)$. En définitive ce théorème donne une espèce de théorème de continuité sur les ensembles non effilés. Son importance est capitale dans la démonstration du théorème 8 et comme nous l'avons dit plus haut il admet comme corollaires les théorèmes de J.D. Newburgh.

Un grand problème sur le spectre toujours non résolu est le suivant: si $\lambda \mapsto f(\lambda)$ est une fonction analytique d'un domaine D de $\mathbb{C}$ dans une algèbre de Banach, est-ce que le spectre plein de $f(\lambda)$ varie par branches holomorphes, autrement dit: si $\alpha_0 \in \sigma(f(\lambda_0))$ existe-t-il localement une fonction holomorphe $h(\lambda)$ telle que $h(\lambda_0) = \alpha_0$ et $h(\lambda) \in \sigma(f(\lambda))$, dans un voisinage de λ_0. Ce résultat est vrai si A est commutative, ou bien de dimension finie, ou bien admet toutes ses représentations irréductibles de dimension finie. Les deux résultats qui suivent en sont des premières tentatives: le premier montre la sous-harmonité de l'enveloppe convexe du spectre, le second beaucoup plus subtil montre la variation holomorphe locale des points isolés du spectre plein.

Si $\psi : \theta \mapsto K(\theta)$ est une fonction semi-continue supérieurement d'un intervalle $[a,b]$ dans l'ensemble des compacts de $\mathbb{C}$, on dira que cette fonction multivoque est *intégrable* s'il existe un compact K tel que $\Delta(K, \sum_{i=1}^{n} K(\theta_i)(\theta_{i+1} - \theta_i))$ tende vers 0 quand la subdivision $\{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ de $[a,b]$ tend vers zéro en module, où la somme $\sum_{i=1}^{n} K(\theta_i)(\theta_{i+1} - \theta_i)$ désigne l'ensemble des $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\theta_{i+1} - \theta_i)$, avec $\alpha_i \in K(\theta_i)$. Pour un compact K de $\mathbb{C}$ nous dénoterons par $\mathrm{co}\,K$ son enveloppe convexe, qui est aussi compacte.

Théorème 6 (Aupetit). Si $\lambda \mapsto f(\lambda)$ est une fonction analytique d'un domaine D de $\mathbb{C}$ dans A , alors la fonction $\theta \mapsto \mathrm{co}\,S_p(\lambda_0+re^{i\theta})$ est intégrable sur $[0,2\pi]$, quel que soit $\lambda_0 \in D$ et $r > 0$ tel que $\overline{B}(\lambda_0,r) \subset D$ et on a:

$$\mathrm{co}\,\mathrm{Sp}f(\lambda_0) \subset \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{co}\,\mathrm{Sp}f(\lambda_0+re^{i\theta})\,d\theta \ .$$

La démonstration est assez simple, elle utilise les propriétés de convexité et le théorème de Vesentini. On peut donner des exemples où $\lambda \mapsto \mathrm{Sp}f(\lambda)$ n'est pas sous-harmonique, mais il est tentant de conjecturer la sous-harmonicité de $\lambda \mapsto \sigma(f(\lambda))$, ce qui aurait d'intéressantes conséquences.

Corollaire. $\lambda \mapsto \mathrm{Log}\,\delta(f(\lambda))$ et $\lambda \mapsto \delta(f(\lambda))$ sont sous-harmoniques, si $\delta(x)$ désigne le diamètre du spectre de x .

On peut donner une autre démonstration de ce résultat comme dans [2, 4] en appliquant le théorème de Vesentini, quelques propriétés des fonctions sous-harmoniques et le fait que $\delta(x) = \underset{|\alpha|=1}{\mathrm{Max}}\ (\mathrm{Log}\,\rho(e^{\alpha x}) + \mathrm{Log}\,\rho(e^{-\alpha x}))$.

Donnons quelques rudiments nécessaires sur la théorie de la capacité dans $\mathbb{C}$. Si K est un compact de $\mathbb{C}$ on définit la *capacité* de K comme étant $c(K) = e^{-V}$, où $V = \underset{\mu}{\mathrm{Inf}} \iint \mathrm{Log}\,\frac{1}{|\lambda_1-\lambda_2|}\,d\mu(\lambda_1)d\mu(\lambda_2)$ pour les mesures de probabilité portées par K .

Si $\delta_n(K) = \mathrm{Max}\ |\prod_{i<j}(\xi_i-\xi_j)|^{2/(n+1)(n+2)}$, pour tous les sous-ensembles de $n+1$ points $\{\xi_1,\ldots,\xi_{n+1}\}$ inclus dans K , on dit alors que δ_n est le *n-ième diamètre* de K . C'est un résultat classique que la suite $(\delta_n(K))$ est décroissante et tend vers $c(K)$. C'est pourquoi le capacité est parfois appelée *diamètre transfini.*

On définit la *capacité intérieure* d'un sous-ensemble E de $\mathbb{C}$ par $C^-(E) = \mathrm{Sup}\ c(K)$, pour les compacts K contenus dans E et on définit la *capacité extérieure* par $C^+(E) = \mathrm{Inf}\ C^-(U)$, pour les ouverts U contenant E .

Voici quelques propriétés, les dernières moins faciles à démontrer:

1) si $E \subset F$ alors $C^+(E) \leq C^+(F)$

2) si (E_n) est une suite de sous-ensembles de $\mathbb{C}$ alors $C^+(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} C^+(E_n)$.

3) si K est un compact, $c(K) = C^+(K) = C^-(K)$

4) si U est un ouvert, $C^+(U) = C^-(U)$.

5) si F est un fermé de capacité extérieure nulle il est de mesure linéaire et de mesure planaire nulle. Comme corollaire une courbe rectifiable est toujours de capacité extérieure strictement positive.

6) si K est un compact de capacité nulle, il est totalement discontinu et de complémentaire connexe.

7) Théorème de H. Cartan. Si φ est une fonction sous-harmonique sur un domaine D de C , non identique à $-\infty$, alors $\{\lambda | \varphi(\lambda) = -\infty\}$ est de capacité extérieure nulle.

Du théorème de Vesentini et du théorème de H. Cartan nous pouvons déjà déduire que $\{\lambda | \rho(f(\lambda)) = 0\}$ est de capacité extérieure nulle ou que $\rho(f(\lambda)) = 0$, pour tout $\lambda \in D$. Autrement dit N a une structure très bizarre. En appliquant toujours le théorème de H. Cartan et le corollaire précédent on déduit donc que $\{\lambda | \# \mathrm{Sp} f(\lambda) = 1\}$ où $\#$ désigne le nombre d'élément, est de capacité extérieure nulle ou bien $\# \mathrm{Sp} f(\lambda) = 1$, pour tout $\lambda \in D$. De ce petit résultat on peut déjà déduire une amusante généralisation du théorème de Gelfand-Mazur: une algèbre de Banach complexe est égale à $\mathbb{C}$ si et seulement si il existe dans A un ouvert non vide U d'éléments inversibles tels que $\|x\|\|x^{-1}\| = 1$, pour tout $x \in U$.

Le lemme qui suit est fondamental dans la démonstration du théorème 7. C'est une amélioration du lemme 3 de [24], p. 52-60.

Lemme (Aupetit-Wermer). Soit $\lambda \mapsto h(\lambda)$ une fonction bornée du domaine D de $\mathbb{C}$ telle que $\lambda \mapsto \mathrm{Log}\,|h(\lambda) - \alpha|$ soit sous-harmonique quel que soit $\alpha \in \mathbb{C}$ assez grand, alors h ou $\bar{h}$ est holomorphe. En particulier h est holomorphe sur D si et seulement si $\lambda \mapsto \mathrm{Log}|h(\lambda) - \alpha\lambda - \beta|$ est sous-harmonique quels que soient $\alpha, \beta \in C$, assez grands.

Théorème 7 (Aupetit [4]). Soit $\lambda \mapsto f(\lambda)$ une fonction analytique d'un domaine D de $\mathbb{C}$ dans une algèbre de Banach A et supposons que pour $\lambda_0 \in D$, $\mathrm{Sp}(f(\lambda_0))$ ait un point isolé α_0. Alors il existe un voisinage V de λ_0 tel que l'ensemble des $\lambda \in V$ pour lesquels $\mathrm{Sp}(f(\lambda))$ a un point isolé dans le voisinage de α_0 est de capacité extérieure nulle, ou sinon, quel que soit $\lambda \in V$, $\mathrm{Sp}(f(\lambda))$ a un point isolé $h(\lambda)$ dans un voisinage de α_0 et h est une fonction holomorphe sur V.

L'idée est d'utiliser le calcul fonctionnel holomorphe pour trouver un projecteur p tel que $\sigma_B(pyp) = \sigma(y) \cap U$, où U est un voisinage de α_0, B la sous-algèbre pAp, y voisin de x. On se sert alors du corollaire précédent sur le diamètre et du lemme de caractérisation des fonctions holomorphes.

Corollaire. Si $\lambda \mapsto f(\lambda)$ est une fonction analytique d'un domaine D de $\mathbb{C}$ dans une algèbre de Banach A, dont tout élément a son spectre dénombrable, alors en dehors d'un ensemble fermé de capacité nulle chaque point isolé de $\mathrm{Sp}f(\lambda)$ varie localement de façon holomorphe.

Cela s'applique en particulier pour une fonction analytique de D dans l'algèbre des opérateurs compacts $\mathcal{LC}(X)$.

Afin de caractériser un certain nombre d'algèbre de Banach nous nous sommes posés la question suivante: étant donné un arc analytique dans A, c'est-à-dire une application analytique f d'un domaine D de $\mathbb{C}$ dans une algèbre de Banach A, est-il vrai que l'ensemble des λ tels que $\# \mathrm{Sp}f(\lambda) \leq n$ soit "très petit" si l'on n'a pas $\# \mathrm{Sp}f(\lambda) \leq n$, pour tout $\lambda \in D$? Le résultat serait facile à prouver si l'on était capable de prouver la sous-harmonicité de $\lambda \mapsto \mathrm{Log}\, \delta_n(f(\lambda))$, mais apparemment ce dernier point semble très difficile. Il faut donc commencer par démontrer un résultat local à l'aide du corollaire de sous-harmonicité de

$\text{Log}\ \delta(f(\lambda))$, qu'on globalise à l'aide du théorème 5 de pseudo-continuité spectrale et ensuite utiliser le:

Lemme (Radó). Si une fonction continue h sur un domaine D est holomorphe sur $D \setminus f^{-1}(\{0\})$, alors elle est holomorphe sur tout D .

pour enfin obtenir le:

Théorème 8 (Aupetit [4]) (de rareté des opérateurs de spectre fini). Si $\lambda \mapsto f(\lambda)$ est une fonction analytique d'un domaine D de $\mathbb{C}$ dans une algèbre de Banach A , alors:

1) ou bien l'ensemble des λ de D tels que $\text{Sp}f(\lambda)$ soit fini est de capacité extérieure nulle

2) ou bien il existe un entier $n \geq 1$ tel que $\#\ \text{Sp}f(\lambda) = n$, pour tout $\lambda \in D$, sauf peut-être sur un ensemble fermé discret de D — donc dénombrable — où l'on a $\#\ \text{Sp}f(\lambda) < n$. Dans ce cas, pour λ en dehors de cet ensemble fermé discret, $\text{Sp}f(\lambda)$ varie holomorphiquement.

Nous ne donnerons aucuns détails sur la démonstration car elle est très technique. On peut en déduire les intéressantes caractérisations locales qui suivent, où en particulier les corollaires 2 et 5 sont de grosses généralisations d'un résultat de I. Kaplansky. Il serait très intéressant de savoir si le théorème 8 a des énoncés analogues dans le cas où on suppose $\text{Sp}f(\lambda)$ dénombrable ou $\text{Sp}f(\lambda)$ de capacité nulle. Ce dernier cas se démontrerait facilement à l'aide de la sous-harmonicité de $\lambda \mapsto \text{Log cap}\ (f(\lambda))$, où $\text{cap}\ (f(\lambda))$ désigne la capacité de $\text{Sp}f(\lambda)$. Mais cette dernière conjecture, qui aurait des conséquences très intéressantes dans la théorie, est loin d'être résolue. Elle résulterait évidemment de la sous-harmonicité de $\lambda \mapsto \text{Log}\ \delta_n(f(\lambda))$, quel que soit n .

Corollaire 1. Si dans une algèbre de Banach, $F = \{x \mid \#\ \text{Sp}x < \infty\}$ est stable par addition ou par multiplication, c'est un idéal de Lie de A , autrement dit $a \in F$, $x \in A$ implique $ax - xa \in F$. Dans ce cas, il existe un idéal bilatère

I de A , différent de $\{0\}$ tel que $I \subset F$, ou bien sinon F est dans le centre de A .

Corollaire 2. Si A est une algèbre de Banach réelle contenant un ouvert non vide sur lequel le spectre est fini, alors A/Rad A est de dimension finie.

La réciproque est évidemment vraie. D'après le corollaire précédent, les seules algèbres simples dont l'ensemble des éléments de spectre fini est stable par addition ou par multiplication sont les algèbres $M_n(\mathbb{C})$.

Corollaire 3. Une algèbre de Banach réelle noetherienne est de dimension finie.

Corollaire 4. Pour qu'une algèbre de Banach réelle soit de dimension finie il faut et il suffit que tout idéal à gauche soit fermé.

Corollaire 5. Soit A une algèbre de Banach avec involution telle que l'ensemble H des éléments hermitiens contienne un ouvert non vide de H sur lequel le spectre est fini, alors A/Rad A est de dimension finie.

Corollaire 6. Soit A une algèbre de Banach réelle contenant un ouvert non vide d'éléments inversibles sur lequel $\|x\|\|x^{-1}\| = 1$, alors $A = \mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$, ou $\mathbb{K}$.

C'est une jolie généralisation locale du théorème de Gelfand-Mazur. Pour un tas d'autres applications, voir [5].

*

Les techniques précédemment impliquées peuvent être utilisées pour améliorer notablement certains résultats de la théorie des algèbres de fonctions.

Soient K un compact, A une algèbre de fonctions sur K , M l'ensemble des caractères de A . Pour $f \in A$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ on pose $f^{-1}(\lambda) = \{\chi \in M \mid \chi(f) = \lambda\}$.

E. Bishop a prouvé le résultat suivant qui est fondamental dans la théorie de l'approximation polynomiale sur les courbes de $\mathbb{C}^n$ (voir [37]).

Théorème (Bishop). Soient K, A, M, f comme plus haut et soit W une composante connexe de $\mathbb{C}\setminus f(K)$. Supposons qu'il existe un sous-ensemble G de W tel que:

1) G est de mesure planaire strictement positive

2) $\# f^{-1}(\lambda) < \infty$, pour tout $\lambda \in G$.

Alors il existe un entier n tel que $\# f^{-1}(\lambda) \leq n$, pour tout $\lambda \in W$. De plus $f^{-1}(W)$ peut être muni d'une structure de variété analytique complexe de dimension un sur laquelle tout élément de A est analytique.

Une généralisation partielle de ce résultat a été obtenue par R. Basener [7].

Théorème (Basener). Soient K, A, M, f, W comme plus haut, supposons qu'il existe un sous-ensemble G de W tel que:

1) G est de mesure planaire strictement positive

2) $f^{-1}(\lambda)$ est dénombrable, pour tout $\lambda \in G$.

Alors il existe un ouvert non vide de $f^{-1}(W)$ qui a une structure de variété analytique complexe de dimension 1 sur lequel tout élément de A est analytique.

D'après le contre-exemple de G. Stolzenberg on sait qu'en général il n'y a pas de *structure analytique* sur une partie de M pour une algèbre de fonction quelconque, mais dans les cas importants qui précèdent c'est vrai.

Pour $g \in A$, en introduisant les fonctions $\rho_g(\lambda) = \operatorname{Max} |g(f^{-1}(\lambda))|$, $\delta_g(\lambda) = \text{diamètre } \{\chi(g) \mid \chi \in f^{-1}(\lambda)\}$, comme dans le théorème de Vesentini et le corollaire du théorème 6, on peut déduire que $\lambda \mapsto \operatorname{Log} \rho_g(\lambda)$ et $\lambda \mapsto \operatorname{Log} \rho_g(\lambda)$ sont sous-harmoniques. Dans [6], en suivant de très près les méthodes développées dans [4], nous avons pu améliorer les résultats de Bishop et Basener en remplaçant la condition G *de mesure strictement positive* par la condition plus faible G *de capacité extérieure strictement positive*. L'énoncé obtenu devient alors étrangement similaire de celui du théorème 8.

Ce résultat est le meilleur possible dans la mesure où si E est un compact de capacité nulle du disque unité Δ , il existe une algèbre de fonctions A , sur un compact K et $f \in A$ tels que

1) $f(K) = \partial\Delta$

2) $\# f^{-1}(\lambda) = 1$, pour $\lambda \in E$

3) $f^{-1}(\lambda)$ est non dénombrable pour $\lambda \in \Delta \backslash E$.

La construction est très technique.

Dans le cas du théorème de structure analytique de R. Basener à plusieurs variables [8], le résultat peut aussi être amélioré d'une façon semblable.

Tout cela peut être appliqué pour simplifier la démonstration du théorème d'Alexander-Björk, comme elle est faite dans [17], lequel théorème dit que toute fonction continue sur un arc rectifiable de $\mathbb{C}^n$ est limite uniforme de polynômes à plusieurs variables.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AUPETIT, B., On scarcity of operators with finite spectrum, Bull. Amer. Math. Soc., 82 (1976), 485-486.

[2] AUPETIT, B., Caractérisation spectrale des algèbres de Banach commutatives, Pacific J. Math., 63 (1976), 23-35.

[3] AUPETIT, B., Continuité et uniforme continuité du spectre dans les algèbres de Banach, Studia Math., 61 (1977), 99-114.

[4] AUPETIT, B., Caractérisation spectrale des algèbres de Banach de dimension finie, J. Functional Analysis, 26 (1977), 232-250.

[5] AUPETIT, B., Propriétés spectrales des algèbres de Banach, livre à paraître.

[6] AUPETIT, B. and WERMER, J., Capacity and uniform algebras, J. Functional Analysis, 28 (1978),.386-400.

[7] BASENER, R., A condition for analytic structure, Proc. Amer. Math. Soc., 36 (1972), 156-160.

[8] BASENER, R., A generalized Shilov boundary and analytic structure, Proc. Amer. Math. Soc., 47 (1975), 98-104.

[9] BONSALL, F.F., A survey of Banach algebra theory, Bull. London Math. Soc., 2 (1970), 257-274.

[10] BONSALL, F.F. and DUNCAN, J., Complete normed algebras, Springer-Verlag, New-York, 1973.

[11] BONSALL, F.F. and DUNCAN, J., Numerical ranges of operators on normed spaces and of elements of normed algebras, London Math. Soc. Lecture Note Series 2, Cambridge, 1971.

[12] BONSALL, F.F. and DUNCAN, J., Numerical ranges II , London Math. Soc. Lecture Note Series 10, Cambridge, 1973.

[13] BRELOT, M., Eléments de la théorie classique du potentiel, 3e édition, Centre de documentation universitaire, Paris, 1965.

[14] CONWAY, J.B., On the Calkin algebra and the covering homotopy property, Trans. Amer. Math. Soc., 211 (1975), 138.

[15] CUNTZ, J., Locally C*-equivalent algebras, J. Functional Analysis, 23 (1976), 95-106.

[16] DIXON, P.G., A Jacobson - semisimple Banach algebra with dense nil subalgebra, Colloq. Math., 37 (1977), 37 (1977), 81-82.

[17] GAMELIN, T.W., Polynomial approximation on thin sets, Symposium on several complex variables, Park City, Utah, 1970, Lecture Note no 184, Springer-Verlag.

[18] HARRIS, L.A., Schwarz's lemma in normed linear spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 62 (1969), 1014-1017.

[19] HARRIS, L.A., Banach algebras with involution and Möbius transformations, J. Functional Analysis 11 (1972), 1-16.

[20] HENKIN, G.M. and ČIRKA, E.M., Boundary properties of holomorphic functions of several complex variables, J. Soviet Math. 5 (1976), 612-687.

[21] HOFFMAN, K., Banach spaces of analytic functions, Prentice-Hall, 1962.

[22] HÖRMANDER, L., An introduction to complex analysis in several complex variables, North. Holland Publishing, 2nd edition, 1975.

[23] KADISON, R.V., Isometries of operator algebras, Ann. of Math. 54 (1951), 325-338.

[24] NARASIMHAN, R., Several complex variables, Chicago Lectures in Mathematics, The University of Chicago Press, Chicago, 1971.

[25] PTÁK, V. et ZEMÁNEK, J., Continuité lipschitzienne du spectre comme fonction d'un opérateur normal, Comm. Math. Univ. Carolinae, 17 (1976), 507-512.

[26] PTÁK, V. et ZEMÁNEK, J., On uniform continuity of the spectral radius in Banach algebras, Manuscripta Math., 20 (1977), 177-189.

[27] RAMSAY, R.W. and WILLIAMSON, J.H., Functions of measures on compact groups, à paraître.

[28] RICKART, C.E., General theory of Banach algebras, D. Van Nostrand Co., Princeton, 1960.

[29] RIESZ, F. et Sz. NAGY, B., Leçons d'analyse fonctionnelle, Académie des Sciences de Hongrie, 1955.

[30] RUSSO, B. and DYE, H.A., A note on unitary operators in C*-algebras, Duke Math. J., 33 (1966), 413-416.

[31] SŁODKOWSKI, Z., WOJTYŃSKI, W. and ZEMÁNEK, J., A note on quasinilpotent elements of a Banach algebra, Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Sci. Math. Astr. Phys., 25 (1977), 131-134.

[32] TAYLOR, A.E., Notes on the history of the uses of analicity in operator theory, Amer. Math. Monthly, 78 (1971), 331-342.

[33] TAYLOR, J.L., Homotopy invariants for Banach algebras in "Proc. Intern. Congress Mathematics, Vancouver, 1976", pp. 115-119.

[34] TSUJI, M., Potential theory in modern function theory, Maruzen, 1959.

[35] VESENTINI, E., On the subharmonicity of the spectral radius, Boll. Un. Mat. Ital., 4 (1968), 427-429.

[36] VESENTINI, E., Maximum theorems for spectra in "Essays on topology and related topics", pp. 111-117, Springer-Verlag, 1970.

[37] WERMER, J., Banach algebras and several complex variables, 2nd edition, Springer-Verlag, 1976.

Département de Mathématiques
Université Laval
Québec
G1K 7P4

Manuscrit reçu le 22 février 1977.