

IMPLEMENTATION D'ALGORITHME DE CONTROLE DE SYSTEMES DISTRIBUES

J.P. Yvon

L'application des algorithmes existants pour le contrôle des systèmes distribués présente de nombreuses difficultés en raison de l'importance des calculs et de la place mémoire qu'ils requièrent. Nous donnons ici un certain nombre d'algorithmes (en général non optimaux) qui peuvent être appliqués en temps réel et nous présentons un exemple d'application sur un calculateur "industriel".

1. Exemple type.

De façon à présenter les méthodes sur un exemple unique, considérons le problème parabolique suivant :

$$(1) \quad \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f(x,t) + v(x,t) \quad x \in]0,1[= \Omega \quad t \in]0,T[$$

$$(2) \quad y(0,t) = y(1,t) = 0$$

$$(3) \quad y(x,0) = y_0(x).$$

La fonction économique étant

$$(4) \quad J(v) = \int_0^T \int_0^1 |y(x,t;v) - z_d(x,t)|^2 dx dt + v \int_0^T \int_0^1 |v(x,t)|^2 dx dt$$

et le contrôle étant astreint à

$$(v > 0)$$

$$(5) \quad 0 \leq v(x,t) \leq M \quad \forall x \in \Omega \quad t \in]0,T[.$$

2. Méthodes de feedback "a priori".

Sans reprendre ce qui a été exposé dans LIONS [1], rappelons le principe de ces méthodes. On considère une famille d'opérateurs

$$\mathcal{K} = \{ t \rightarrow K(t) : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(L^2(\Omega); L^2(\Omega)) \}$$

et pour $K(\cdot) \in \mathcal{K}$ on considère le nouveau problème de contrôle, donné par

$$(1)' \quad \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f(x, t) + K(t) y(t)$$

(2) et (3) inchangés

$$(4)' \quad \tilde{J}(K) = \int_0^T \int_0^1 |y(x, t; K) - z_d(x, t)|^2 dx dt + \nu \int_0^T \int_0^1 |Ky(x, t; K)|^2 dx dt.$$

Exemple classique : feedback proportionnel.

Pour $\mu > 0$ on considère l'opérateur $K_\mu(t)$ donné par

$$[K(t)\varphi](x, t) = [-\mu \{z_d(x, t) - \varphi(x, t)\}]_0^M$$

où

$$[\chi]_0^M = \begin{cases} M & \text{si } \chi \geq M \\ \chi & \text{si } 0 < \chi < M \\ 0 & \text{si } \chi \leq 0 \end{cases}$$

Cette loi très utilisée dans les problèmes de poursuite

Lorsque $\mu \rightarrow \infty$ on est conduit au feedback tout ou rien défini par

$$(6) \quad [K_\infty(t)\varphi](x, t) = \begin{cases} M & \text{si } \varphi(x, t) < z_d(x, t) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans ces conditions l'équation (1)' se transforme en une inéquation variationnelle

$$(1)'' \quad (y', z-y) + \left(\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x} \right) + j(z) - j(y) \geq (f, z-y)$$

avec

$$j(z) = M \int_\Omega |z(x, t) - z_d(x, t)| dx$$

On peut également considérer des feedbacks de type proportionnel intégral (PI), cf. MORENO [1].

Concernant ces méthodes, notons le résultat suivant (BERMUDEZ [1]).

Théorème 2.1. Si l'état désiré z_d de (4) est accessible par un contrôle vérifiant (5) c'est-à-dire

$$(7) \quad \inf_{v \in u_{ad}} \int_0^T \int_0^1 |y(x,t;v) - z_d(x,t)|^2 dxdt = 0$$

alors le contrôle tout ou rien (6) réalise (7) (est donc optimal pour la fonctionnelle (4) avec $v = 0$).

Les différents feedbacks qui précèdent sont caractérisés par le fait qu'ils ne prennent pas en compte le "coût du contrôle" et donc qu'ils sont en général peu satisfaisants. Une façon de contourner cette difficulté consiste à utiliser les informations que l'on a sur le problème en boucle ouverte. Par exemple soient u et $y(u)$ respectivement le contrôle optimal et l'état optimal correspondant du problème de contrôle (1)...(5). On peut alors construire le nouveau problème de contrôle suivant

$$(8) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = f + w(x,t)$$

$$(9) \quad \varphi(0,t) = \varphi(1,t) = 0$$

$$(10) \quad \varphi(x,0) = y_0(x)$$

$$(11) \quad \tilde{J}(w) = \int_0^T \int_0^1 |\varphi(x,t;w) - y(u)|^2 dxdt$$

ce qui veut dire qu'on a remplacé le problème initial par un problème de poursuite de l'état optimal. Un feedback du type (5) peut être appliqué alors au problème (8)...(11).

Une méthode analogue à celle-ci consiste à reprendre un feedback proportionnel :

$$(12) \quad K_\mu(\varphi) = [u(t) - \mu(\varphi(x) - y(x,t;u))]_0^M$$

le choix de la constante μ ou l'utilisation d'un opérateur auxiliaire W

$$(12)' \quad K_\mu(\varphi) = [u(x,t) - \mu W(\varphi(x) - y(x,t;u))]_0^M$$

étant libres. cf. SORINE [1] ; BERMUDEZ - MORENO [2].

3. Méthodes de boucle ouverte adaptée.

Rappelons brièvement le principe : on se place dans un cadre déterministe et on suppose que l'équation (1) est perturbée par une fonction ξ

$$(13) \quad \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f(x,t) + v(x,t) + \xi(x,t)$$

les équations (2) (3) étant inchangées. On se propose toujours de minimiser la fonctionnelle (4) sous les contraintes (5).

La méthode consiste à recalculer à certains instants $t_1, \dots, t_k \dots$ un contrôle en boucle ouverte du problème suivant

$$(14) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = f(x,t) + w(x,t) \quad , \quad t \in]t_k, T[$$

$$(15) \quad \varphi(0,t) = \varphi(1,t) = 0 \quad ,$$

$$(16) \quad \varphi(t_k) = y(t_k) \quad , \quad y(t_k) \text{ observation de l'état à l'instant } t_k \quad ,$$

$$(17) \quad \text{Min}_w \int_{t_k}^T \int_{\Omega} |\varphi(x,t;w) - z_d(x,t)|^2 dxdt + v \int_{t_k}^T \int_{\Omega} |w(x,t)|^2 dxdt \quad ,$$

satisfaisant (5).

Contrôle noté w_k qui sera appliqué au système (13).

Un développement plus complet de cette méthode se trouve dans BAMBERGER - SAGUEZ - YVON [1].

On peut alors envisager d'utiliser conjointement les méthodes de feedback a priori et celles de boucle ouverte adaptée en utilisant comme il a déjà été dit les informations données par la solution du problème en boucle ouverte.

Par exemple si on dénote par φ_k l'état optimal du problème (14)...(17) correspondant au contrôle optimal w_k on peut appliquer les lois du type (6) ou (12).

Par exemple une application de (6) conduit à considérer l'état comme régi par

$$(18) \quad (y', \varphi - y) + \left(\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}(\varphi - y) \right) + j(\varphi) - j(y) \geq (f + \xi, \varphi - y)$$

ceci pour toute $\varphi \in H_0^1(0,1)$ avec

$$(19) \quad j(\varphi)(t) = \int_{\Omega} M |\varphi(x) - \varphi_k(x,t)| dx \quad \text{si} \quad t \in [t_k, t_{k+1}[\quad .$$

Le passage à la limite (lorsque le pas d'échantillonnage tend vers 0) conduit à une loi de feedback qui, si elle est intéressante dans le cas de la boucle ouver-

te adaptée, n'a pas grand intérêt dans le cas (18) (19). Il y a donc ici une antinomie entre certaines lois de feedback (adaptées) et le raffinement du pas d'échantillonnage.

Un autre exemple de cette situation est constitué par l'application de (12), l'état est régi par

$$(20) \quad y' - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f + \xi + K_{\mu}(y)$$

$$(21) \quad K_{\mu}(\varphi)(t) = [w_k(t) - \mu(\varphi(x) - \varphi_k(x,t))]_0^M.$$

Dans cette situation le résultat de convergence est décevant car il redonne le contrôle en boucle ouverte adaptée obtenu en appliquant directement w_k .

4. Exemple d'implémentation.

De façon à vérifier l'applicabilité des méthodes précédentes à des situations concrètes, un problème type a été simulé en temps réel par M. SORINE [1].

Le système considéré est une équation de la chaleur non linéaire

$$(22) \quad \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f(x,t)$$

$$(23)_0 \quad - \frac{\partial y}{\partial x}(0,t) + \alpha y^4(0,t) = v_0(t)$$

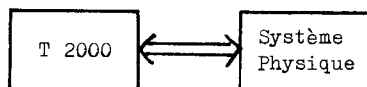
$$(23)_1 \quad \frac{\partial y}{\partial x}(1,t) + \alpha y^4(1,t) = v_1(t) \quad v = (v_0, v_1)$$

$$(24) \quad y(x,0) = y_0(x)$$

L'observation pouvant être distribuée, frontière ou par exemple finale

$$(25) \quad J(v) = \int_0^1 |y(x,T;v) - z_d(x)|^2 dx + \nu \int_0^T (|v_0(t)|^2 + |v_1(t)|^2) dt$$

Le modèle physique représenté par (22)...(24) est constitué d'un système analogique (réseau RC + générateur de fonction pour les non linéarités aux limites). Les ordres de grandeur des éléments électroniques ont été pris de sorte que le système puisse évoluer pendant 1 heure sans trop de dérive.



Ce système est relié à un ordinateur Télémécanique T 2000 de 16 K de mémoire (mots de 19 bits). Le calculateur numérique a comme fonctions

- acquisition de données (mesure de l'état aux "noeuds" de réseau)
- affichage des contrôles v_0 et v_1 .
- calcul des contrôles.

Différents algorithmes ont été mis en oeuvre sur ce système. En particulier la méthode de boucle ouverte adaptée a été utilisée en confiant au calculateur le calcul des contrôles en boucle ouverte.

Grâce à un algorithme de gradient conjugué très efficace le calcul complet d'un contrôle optimal ne requiert que quelques minutes au début du processus pour tomber à environ 1 minute dès la 3 ou 4ème itération. En particulier dans le cas d'une observation finale l'algorithme semble très robuste vis à vis des perturbations.

5. Utilisation de l'équation de Riccati. Conclusion.

Toutes les méthodes qui viennent d'être envisagées sont applicables à une large classe de problèmes de contrôle ; équation d'état non linéaire, contrainte sur le contrôle etc... Dans le cas de problèmes linéaires quadratiques l'utilisation de l'équation de Riccati est particulièrement intéressante si l'on peut utiliser les méthodes de réduction de dimension (cf. par exemple CASTI [1]).

Des difficultés d'ordre théorique apparaissent cependant dans le cas d'observation et/ou de contrôle frontières. Du point de vue numérique on peut cependant appliquer les méthodes telle que celles proposées par KAILATH et Al. [1] et aboutir à des algorithmes pratiquement très efficaces.

Il apparaît donc que pour des systèmes évoluant relativement lentement (réacteurs chimiques, échangeurs thermiques par exemple) il est possible d'utiliser une grande variété d'algorithmes, en général sous optimaux, et de les implémenter sur des calculateurs de type industriel, ce qui répond à la préoccupation majeure de la plupart des utilisateurs. Il est certain que de nombreux autres aspects du problème tels que filtrage, identification etc..., pour des systèmes distribués, sont également à envisager conjointement avec le problème de contrôle lui-même ce qui compli-

que de nouveau les algorithmes.

6. Références.

- A. BAMBERGER - C. SAGUEZ - J.P. YVON [1]
"Contrôle en boucle ouverte adaptée de systèmes distribués",
Rapport Laboria n° 128 (1975).
- A. BERMUDEZ [1],
"Contrôle de systèmes distribués par feedback a priori",
Rapport Laboria n° 129 (1975).
- A. BERMUDEZ [1] - C. MORENO [2],
"A priori feedback for control of distributed system",
à paraître.
- J. CASTI - L. LJUNG [1],
"Reduction of the operator Riccati equation",
Lecture note in economic and Math. Sc. N° 107 (1975).
- T. KAILATH - M. MORF - G. SIDHU [1],
"Some new algorithms for recursive estimation...",
IEEE Trans. in aut. Control, Vol 19 , n° 4 1972.
- J.L. LIONS [1],
SIAM Regional Conf. series in Appl. Math. N°6 (1972).
- C. MORENO [1],
Thèse Université de Santiago de Compostella (1975).
- M. SORINE [1],
Thèse de 3ème cycle Paris 1976.

IRIA-LABORIA
Domaine de Voluceau
Rocquencourt
78150 - Le Chesnay, France
et
Université de Technologie
de Compiègne
60206 - Compiègne, France

