

ANALYSE NUMERIQUE DE PROBLEMES D'ELECTROTECHNIQUE A. Marrocco

On présente dans cet article l'analyse numérique des équations de Maxwell pour la magnétostatique, dans le cas d'un domaine borné bi ou tridimensionnel. Les machines étudiées sont des alternateurs (alternateur tétrapolaire dans le cas bidimensionnel, et alternateur à griffes dans le cas tridimensionnel).

L'approximation des problèmes est faite par la technique des éléments finis (P_1 conformes). Ce choix correspond à l'approximation suivante pour l'ingénieur : la perméabilité magnétique est constante sur chaque élément. On tient compte dans la modélisation de l'effet de saturation magnétique introduisant une non linéarité dans le problème. Différentes méthodes de résolution ont été testées dans le cas bidimensionnel et nous avons retenu une méthode itérative de surrelaxation pour le problème tridimensionnel.

I - FORMULATION DU PROBLEME

Les équations de Maxwell pour la magnétostatique sont les suivantes :

$$(1.1) \quad \text{rot } \vec{H} = \vec{j}$$

$$(1.2) \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$(1.3) \quad \text{div } \vec{B} = 0$$

où \vec{H} est la champ magnétique, \vec{j} est le vecteur densité de courant, \vec{B} est l'induction magnétique.

μ est la perméabilité magnétique (scalaire dans le cas de matériaux isotropes), et c'est une constante dans l'air $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ MKSA, mais dans les matériaux ferro-

magnétiques elle dépend non linéairement de $|\vec{H}|$ (ou $|\vec{B}|$), cette dépendance étant donnée par les courbes caractéristiques B-H (voir par exemple - fig. 1).

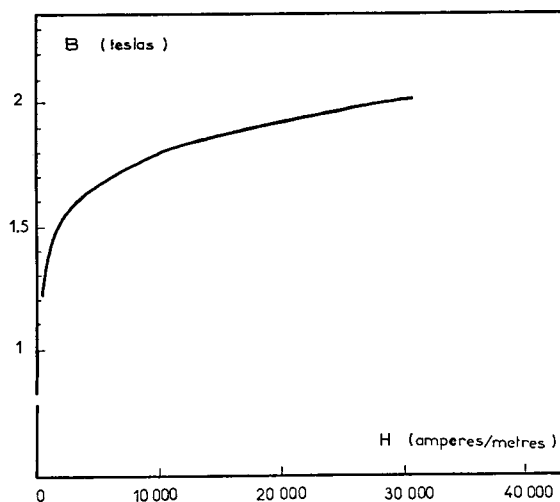


Fig. 1 - Caractéristique magnétique du STATOR

Si on introduit le potentiel vecteur \vec{A} (cf. E. Durand [1]), tel que

$$(1.4) \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

alors les 3 relations (1.1), (1.2), (1.3) se réduisent à :

$$(1.5) \quad \text{rot}(v \text{ rot } \vec{A}) = \vec{j}$$

où $v = \frac{1}{\mu}$ est la réluctivité magnétique.

L'équation (1.5) est théoriquement valable dans tout l'espace (\mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 selon le cas), mais dans la pratique on prendra un domaine Ω borné et on supposera que tout le phénomène magnétique se passe à l'intérieur de Ω . Nous verrons dans chaque cas les conditions aux limites traduisant cette propriété.

II - PROBLEME BIDIMENSIONNEL

Dans le cas bidimensionnel (cartésien par exemple), \vec{j} et \vec{A} ont la structure

particulière suivante

$$(2.1) \quad \begin{cases} \vec{A} = (0, 0, A) \\ \vec{j} = (0, 0, j) \end{cases}$$

et A et J ne dépendent que de x_1 et x_2 . Dans ce cas particulier (1.5) devient

$$- \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(v \frac{\partial A}{\partial x_i} \right) = j$$

que l'on peut aussi écrire

$$(2.3) \quad - \operatorname{div}(v \operatorname{grad} A) = j$$

La condition aux limites qu'il faut prendre sur $\partial\Omega$ pour traduire le fait qu'il ne se passe rien à l'extérieur est :

$$(2.4) \quad A|_{\partial\Omega} = 0$$

II.1 Modèle mathématique bidimensionnel

L'équation aux dérivées partielles que nous avons à résoudre dans Ω est :

$$(2.5) \quad \begin{cases} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(v(x, A) \frac{\partial A}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(v(x, A) \frac{\partial A}{\partial x_2} \right) = j \text{ dans } \Omega \\ A|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

où A est une fonction de x_1, x_2 . La réductivité v est une fonction de $x = (x_1, x_2)$ et aussi une fonction de $|\vec{B}|$ dans le fer et donc de A par l'intermédiaire de (1.4). En fait le paramètre fondamental intervenant dans (2.5) est la réductivité relative par rapport à l'air, et si nous écrivons

$$(2.6) \quad v = v_o v_r \quad \text{avec } v_o = \frac{1}{\mu_o} = \frac{10^7}{4\pi} \text{ MKSA,}$$

nous avons

$$(2.7) \quad \begin{cases} v_r \equiv 1 \text{ dans l'air (ou le cuivre)} \\ v_r \text{ est une fonction non linéaire de } |\vec{B}| \text{ dans le fer} \end{cases}$$

Il vaut mieux en fait exprimer v_r comme une fonction de $|\vec{B}|^2$, cela rendra plus sim-

ple l'écriture de la fonctionnelle d'énergie.

Ainsi utilisant la structure (2.1) nous pouvons écrire

$$(2.8) \quad |\operatorname{rot} \vec{A}| = |\operatorname{grad} A| = |\vec{B}|$$

et l'équation (2.5) s'écrit plus explicitement sous la forme

$$(2.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial}{\partial x_1} [v_r(x, |\operatorname{grad} A|^2) \frac{\partial A}{\partial x_1}] - \frac{\partial}{\partial x_2} [v_r(x, |\operatorname{grad} A|^2) \frac{\partial A}{\partial x_2}] = \mu_0 j \text{ dans } \Omega \\ A|_{\partial\Omega} = 0 \end{array} \right.$$

Cette équation (2.9) est l'équation d'Euler dans un espace fonctionnel adéquat, du problème de l'optimisation de l'énergie magnétique du système. Notons ψ la primitive de v_r par rapport à $|\operatorname{grad} A|^2$, s'annulant en 0, soit

$$(2.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi(x, |\vec{B}|^2)}{\partial |\vec{B}|^2} = v_r(x, |\vec{B}|^2) \\ \psi(x, 0) = 0 \end{array} \right.$$

alors, la fonctionnelle (énergie magnétique) à optimiser est

$$(2.11) \quad \mathfrak{F}(A) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \psi(x, |\operatorname{grad} A|^2) dx - \mu_0 \int_{\Omega} j \cdot A \, dx$$

II.2 Approximation de v_r

Nous avons été amené à approcher la réductivité relative v_r , dans les parties ferromagnétiques par une fonction appartenant à la famille suivante

$$(2.12) \quad \tilde{v}_{\varepsilon, C, T, \alpha}(x) = \varepsilon + (c - \varepsilon) \frac{x^\alpha}{x^\alpha + T}$$

($\varepsilon, C, \alpha, T$ étant > 0)

L'approximation est faite par une méthode des moindres carrés discrete pour des points tirés des caractéristiques magnétiques. Un ensemble typique de valeurs obtenues pour les paramètres est (voir fig. 2)

$$(2.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 5.16 \cdot 10^{-4} \\ C = 0.175 \\ \alpha = 5.419 \\ T = 8.75 \cdot 10^3 \end{array} \right.$$

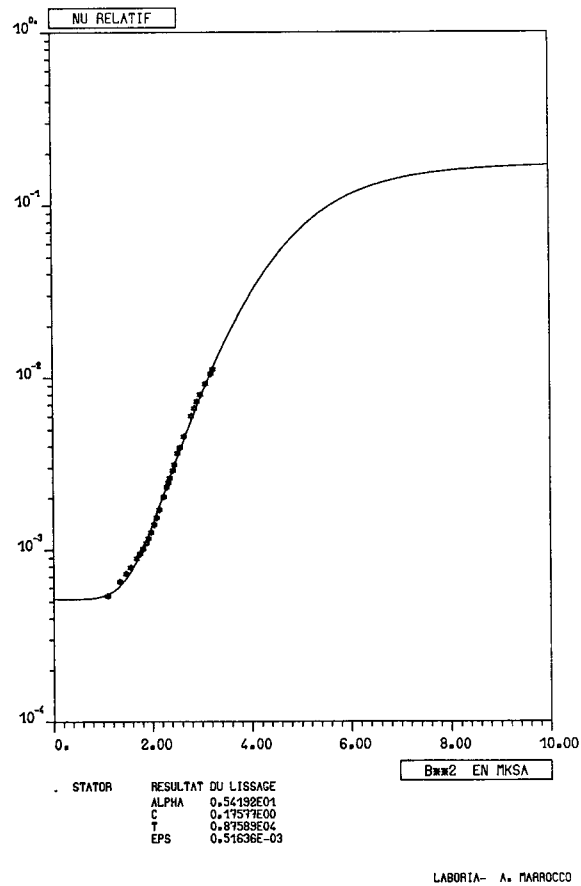


Fig. 2 - Approximation de v_r

donnant une erreur relative moyenne de 3 à 4 %.

Remarque : ψ définie en (2.10) est en fait la primitive de \tilde{v} , approximation de v_r .
On notera par la suite indifféremment v_r ou \tilde{v} .

II.3 Formulation précise du problème

Soit $H_0^1(\Omega)$ l'espace du SOBOLEV classique,

$$(2.14) \quad H_o^1(\Omega) = \{v \mid v \in L^2(\Omega), \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i=1,2, v|_{\Gamma} = 0\}$$

avec la norme

$$(2.15) \quad \|v\|_{H_o^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |\text{grad } v|^2 dx$$

Le problème précis est le suivant

$$(2.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } A \in H_o^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \mathfrak{F}(A) \leq \mathfrak{F}(v) \quad \forall v \in H_o^1(\Omega) \end{array} \right.$$

où \mathfrak{F} est donné par (2.11)

On peut montrer le résultat suivant (cf. R. Glowinski, A. Marrocco [2],[3]) les propriétés de \tilde{v} font que le problème d'optimisation (2.16) a une solution unique. Il est de plus facile de montrer que cette solution est l'unique solution de (2.9) dans $H_o^1(\Omega)$.

La formulation variationnelle du problème d'optimisation est

$$(2.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} v_r(x, |\text{grad } A|^2) \text{ grad } A \cdot \text{grad } v \, dx - \mu_o \int_{\Omega} j \cdot v \, dx = 0 \quad \forall v \in H_o^1(\Omega) \\ A \in H_o^1(\Omega) \end{array} \right.$$

II.4 - Approximation par les éléments finis

On considère une triangulation classique \mathcal{T}_h du domaine Ω , les triangles n'étant pas à cheval sur deux milieux différents (air, cuivre, fer) (voir fig. 3 pour une coupe transversale de l'alternateur et la figure 4 pour le découpage d'un quart de domaine).

L'espace fonctionnel $H_o^1(\Omega)$ est approché par

$$(2.18) \quad V_{oh} = \{v_h \mid v_h \in C^0(\bar{\Omega}), d^o v_h \leq 1 \text{ sur } T, T \in \mathcal{T}_h, v_h = 0 \text{ sur le bord}\}$$

Remarques

. $\dim V_{oh} = \text{Card}(w_h)$ où w_h est l'ensemble des noeuds intérieurs et $v_h \in V_{oh}$ est complètement déterminée par les valeurs qu'elle prend sur w_h

$$v_i = v_h(M_i) \quad \forall M_i \in w_h$$

- . V_{oh} peut être considéré comme un sous espace de $H_0^1(\Omega)$
- . $\text{grad } v_h$ est constant sur chaque élément $T \in \mathcal{T}_h$

La formulation du problème est très classique

$$(2.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } A_h \in V_{oh} \text{ tel que} \\ \mathfrak{F}(A_h) \leq \mathfrak{F}(v_h) \quad \forall v_h \in V_{oh} \end{array} \right.$$

avec \mathfrak{F} donnée par (2.11)

Ce problème d'optimisation admet une solution unique (cf. [2], [3]) caractérisée par

$$(2.20) \quad \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial v_i}(A_h) = 0 \quad \forall i$$

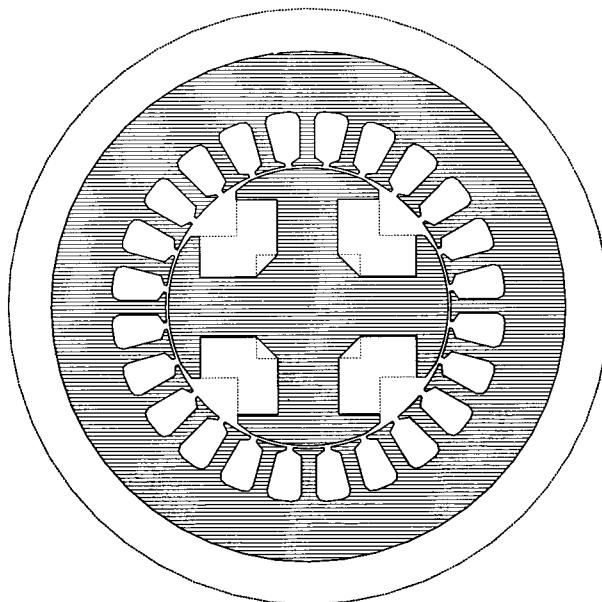


Fig. 3 - Coupe transversale de l'alternateur

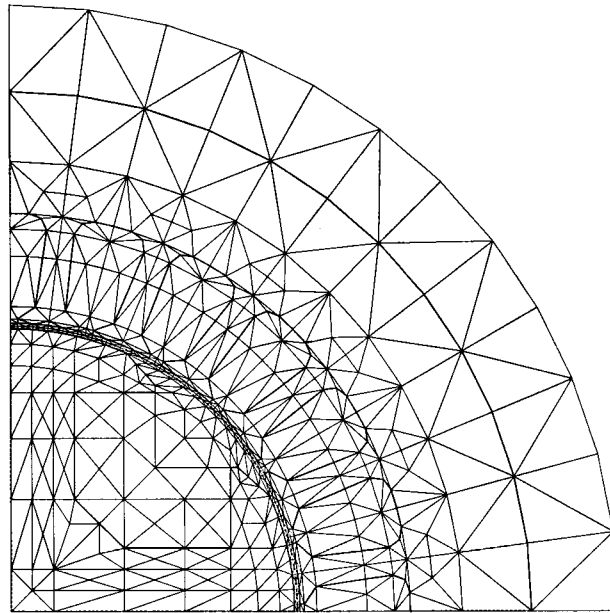


Fig. 4 - Découpage en triangles

II.5 - Résolution numérique - Résultats

II.5.1 Méthode de linéarisation

Au vu de la formulation variationnelle (2.17), il est tentant d'utiliser l'algorithme suivant

A_h^0 donné dans V_{oh} ($\equiv 0$ par exemple)

A_h^n connu, on calcule A_h^{n+1} solution du problème linéaire

$$(2.21) \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} v_r(x, |\text{grad } A_h^n|^2) \text{grad } A_h^{n+1} \cdot \text{grad } v_h \, dx - \mu_0 \int_{\Omega} j v_h \, dx = 0 \quad \forall v_h \in V_{oh} \\ A_h^{n+1} \in V_{oh} \end{array} \right.$$

Cet algorithme où la variante consistant à ne faire qu'un seul balayage de type relaxation pour obtenir A_h^{n+1} ne converge que pour des faibles valeurs du courant d'excitation j (conduisant alors à un problème pratiquement linéaire). Dans le cas où j est assez grand, il faut introduire un paramètre supplémentaire de sous-relaxation des reluctivités (cf. E.A. Erdelyi, E.F. Fuchs [4]) et cet algorithme

devient d'une utilisation délicate.

II.5.2. Méthode de Newton-Raphson

La forme explicite de cet algorithme est la suivante :

$$A_h^0 \text{ donné dans } V_{oh} (\equiv 0 \text{ par exemple})$$

on suppose connu A_h^n et on calcule A_h^{n+1} solution du problème linéaire

$$(2.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} [v_r(x, |\text{grad } A_h^n|^2) + 2v_r'(x, |\text{grad } A_h^n|^2) \cdot |\text{grad } A_h^n|^2] \cdot \text{grad } A_h^{n+1} \cdot \text{grad } v_h \, dx = \\ \mu \int_{\Omega} j \cdot v_h \, dx + 2 \int_{\Omega} v_r'(x, |\text{grad } A_h^n|^2) \cdot |\text{grad } A_h^n|^2 \cdot \text{grad } A_h^n \cdot \text{grad } v_h \, dx \end{array} \right.$$

pour $\forall v_h \in V_{oh}, A_h^{n+1} \in V_{oh}$

avec

$$v_r'(x, \xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} v_r(x, \xi)$$

On pourra trouver des résultats numériques détaillés dans [3] et [5]. Disons simplement que l'algorithme "marche bien" lorsque le problème traité n'est pas trop "non linéaire". Si j devient trop grand, il se produit un phénomène d'oscillation de la solution calculée, dû sans aucun doute à l'allure de la courbe $v_r(B^2)$ - fig.2 - et aussi à l'initialisation ($A_h^0 \equiv 0$) trop loin de la solution du problème. On peut remédier à ce phénomène d'oscillation en sous relaxant mais encore mieux, on peut utiliser la variante suivante consistant à calculer A_h^{n+1} par un balayage du type relaxation, les résultats obtenus sont assez bons lorsque j est grand (forte non-linéarité).

II.5.3. Résolution par surrelaxation ponctuelle non linéaire

Si on note $N = \dim V_{oh}$ et $v_h = (v_1, v_2, \dots, v_N)$, nous devons résoudre le système non linéaire

$$(2.23) \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v_i} (A_1, A_2, \dots, A_N) = 0 \quad i=1, 2, \dots, N$$

Algorithme SNL1

A_h^0 donné dans V_{oh} ($\equiv 0$ par exemple)
 A_h^n connu, A_h^{n+1} est calculé composante par composante par

$$(2.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v_i} [A_1^{n+1}, A_2^{n+1}, \dots, A_{i-1}^{n+1}, \bar{A}_i^{n+1}, A_{i+1}^n, \dots, A_N^n] = 0 \\ A_i^{n+1} = A_i^n + w(\bar{A}_i^{n+1} - A_i^n) \\ i = 1, 2, \dots, N \quad , \quad 0 < w \leq w_M < 2 \end{array} \right.$$

On peut montrer la convergence de cet algorithme en utilisant les résultats de SCHECHTER [6].

Algorithme SNL2

A_h^0 donné dans V_{oh} ($\equiv 0$ par exemple)
 A_h^n connu, A_h^{n+1} est calculé composante par composante en résolvant

$$(2.25) \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v_i} (A_1^{n+1}, \dots, A_i^{n+1}, A_{i+1}^n, \dots, A_N^n) = (1-w) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v_i} (A_1^{n+1}, \dots, A_{i-1}^{n+1}, A_i^n, \dots, A_N^n)$$

$$i = 1, 2, \dots, N. \quad 0 < w \leq w_M < 2$$

Pour chaque algorithme SNL1 et SNL2, nous devons résoudre pour chaque noeud i , une équation non linéaire d'une seule variable \bar{A}_i^{n+1} ou A_i^{n+1} . Si on utilise la méthode de Newton à une seule variable et si pour \bar{A}_i^{n+1} , on prend le premier itéré de Newton (l'algorithme étant initialisé par A_i^n), ces deux algorithmes conduisent au même algorithme que nous noterons EGSN et qui s'explique par

$$(2.26) \quad A_h^n \text{ donné dans } V_{oh} \text{ (} \equiv 0 \text{ par exemple)}$$

$$A_h^n \text{ connu, on calcule } A_h^{n+1} \text{ composante par composante par}$$

$$A_i^{n+1} = A_i^n - w \frac{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v_i} (A_1^{n+1}, \dots, A_{i-1}^{n+1}, A_i^n, \dots, A_N^n)}{\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial v_i^2} (A_1^{n+1}, \dots, A_{i-1}^{n+1}, A_i^n, \dots, A_N^n)}$$

$$i = 1, 2, \dots, N \quad 0 < w \leq w_M < 2$$

Ces algorithmes SNL1, SNL2, EGSN sont très simples à mettre en oeuvre numériquement, et nécessitent très peu de place mémoire. Ces algorithmes (surtout EGSN) sont très efficaces pour les grandes valeurs de j entraînant une forte saturation magnétique, ils sont peut être moins efficaces que Newton-Raphson pour des faibles

non-linéarités mais beaucoup plus souples d'utilisation (surtout pour prendre en compte d'autres conditions aux limites). On trouvera des résultats numériques très détaillés dans [2], [3], [5] [⊗]. C'est cet algorithme EGSN que nous avons généralisé au cas tridimensionnel.

II.5.4. Résolution par pénalisation-dualité

On trouvera des détails dans [3], [5], [7], disons simplement que cette méthode conduit à introduire le Lagrangien augmenté

$$(2.27) \quad \mathcal{L}_\varepsilon(v_h, z_h, \mu_h) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \psi(x, |z_h|^2) dx - \mu_0 \int_{\Omega} j \cdot v_h dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \eta(x) |z_h - \text{grad } v_h|^2 dx \\ + \int_{\Omega} \mu_h \cdot (z_h - \text{grad } v_h) dx$$

où $v_h \in V_{oh}$, z_h et $\mu_h \in L_h$ défini par

$$(2.28) \quad L_h = \left\{ z_h \mid z_h = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} z_T \chi_T, z_T \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$\eta(x)$ est une fonction > 0 , constante sur chaque triangle $T \in \mathcal{T}_h$, on notera η_T la restriction au triangle T . Cette fonction $\eta(x)$ joue le même rôle que v_r et pourra être estimée par l'ingénieur electro-technicien.

Comment se décompose l'algorithme de résolution :

On prend $A_h^0 \equiv 0$, $y_h^0 \equiv 0$, $\lambda_h^0 \equiv 0$
 On suppose connus $A_h^n, y_h^n, \lambda_h^n$ et on calcule

1° A_h^{n+1} solution du problème linéaire

$$(2.29) \quad \int_{\Omega} \eta(x) \text{grad } A_h^{n+1} \cdot \text{grad } v_h dx = \frac{\varepsilon}{2} \mu_0 \int_{\Omega} j \cdot v_h dx + \int_{\Omega} \left[\frac{\varepsilon \lambda_h^n}{2} + \eta(x) y_h^n \right] \cdot \text{grad } v_h dx$$

$$\forall v_h \in V_{oh}, A_h^{n+1} \in V_{oh}$$

[⊗] Le seul problème est la détermination du paramètre de relaxation, il est facile de déterminer une borne inférieure et une supérieure valable quel que soit j mais l'écart peut être grand (voir fig. 5 - détermination expérimentale pour EGSN)

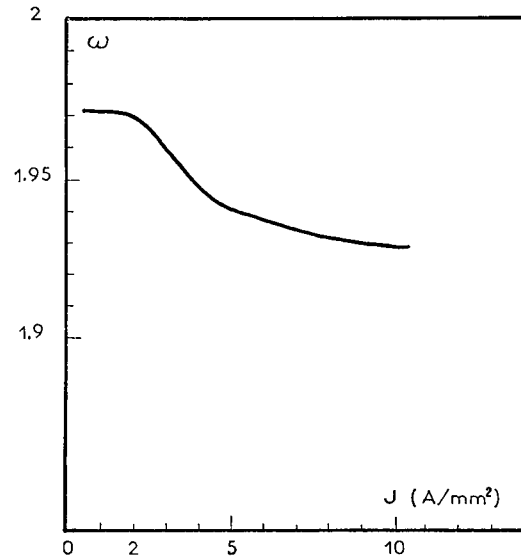


Fig. 5 - Détermination expérimentale du w optimal pour l'algorithme EGSN en fonction du courant d'excitation.

2° On calcule y_h^{n+1} en résolvant les équations non linéaires

$$(2.30) \int_{\Omega} v_r(x, |y_h^{n+1}|^2) y_h^{n+1} \cdot z_h \, dx + \frac{2}{\varepsilon} \int_{\Omega} \eta(x) \cdot (y_h^{n+1} - \text{grad } A_h^{n+1}) \cdot z_h \, dx + \int_{\Omega} \lambda_h^n \cdot z_h \, dx = 0$$

$$\forall z_h \in L_h, y_h^{n+1} \in L_h$$

3° On calcule λ_h^{n+1} triangle par triangle par

$$(2.31) \quad \lambda_{h,T}^{n+1} = \lambda_{h,T}^n + \rho \eta_T (y_{h,T}^{n+1} - \text{grad } A_h^{n+1} |_{T})$$

Il y a convergence de cet algorithme en prenant $\rho = \frac{2}{\varepsilon}$

Le système non linéaire (2.30) est en fait un ensemble de Card \mathfrak{C}_h équations non linéaires, d'une seule variable, indépendantes, la variable étant $q = |y_h^{n+1}|$, donnant pour chaque triangle l'équation

$$(2.32) \quad q \left[v_T(x, q^2) + \frac{2\eta_T}{\varepsilon} \right] = \left| \frac{2\eta_T}{\varepsilon} \text{grad } A_h^{n+1} - \lambda_h^n \right|$$

Chaque étape de l'algorithme est un problème très simple.

- . un système linéaire (toujours le même)
- . des équations non linéaires (1 inconnue)
- . des calculs très simples (2.31)

Vu cette décomposition il doit être facilement implémentable sur calculateur parallèle. De plus cet algorithme doit-être d'utilisation agréable pour l'ingénieur electro-technicien, car il peut "estimer" la solution en terme de répartition de flux (par l'intermédiaire de $\eta(x)$) et si son estimation n'est pas trop mauvaise, la processus précédent convergera très vite. Malheureusement cet algorithme présente le désavantage de nécessiter plus de place mémoire que les algorithmes précédents.

Pour illustrer les applications numériques, nous donnons dans les figures 6 et 7 la répartition des lignes d'induction pour deux valeurs du courant d'excitation j .

III. PROBLEME TRIDIMENSIONNEL

Le domaine Ω est un ouvert borné de \mathbf{R}^3 et le potentiel vecteur \vec{A} à trois composantes $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$.

Au vu de la fonctionnelle d'énergie (2.11), au moins deux généralisations viennent à l'esprit pour le cas tridimensionnel.

1°) La fonctionnelle d'énergie devient

$$(3.1) \quad \mathfrak{F}(\vec{V}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \psi(x, |\text{grad } \vec{V}|^2) dx - \mu_0 \int_{\Omega} \vec{j} \cdot \vec{V} dx$$

avec $\vec{V} = (v_1, v_2, v_3)$ et

$$|\text{grad } \vec{V}|^2 = \sum_{i=1}^3 |\text{grad } v_i|^2$$

2°) Il ne faut pas oublier que dans le cas bidimensionnel on a utilisé la relation $|\vec{B}| = |\text{rot } \vec{A}| = |\text{grad } A|$ et que l'expression de l'énergie magnétique devait en fait s'écrire

$$(3.2) \quad \mathfrak{F}(\vec{V}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \psi(x, |\text{rot } \vec{V}|^2) dx - \mu_0 \int_{\Omega} \vec{j} \cdot \vec{V} dx$$

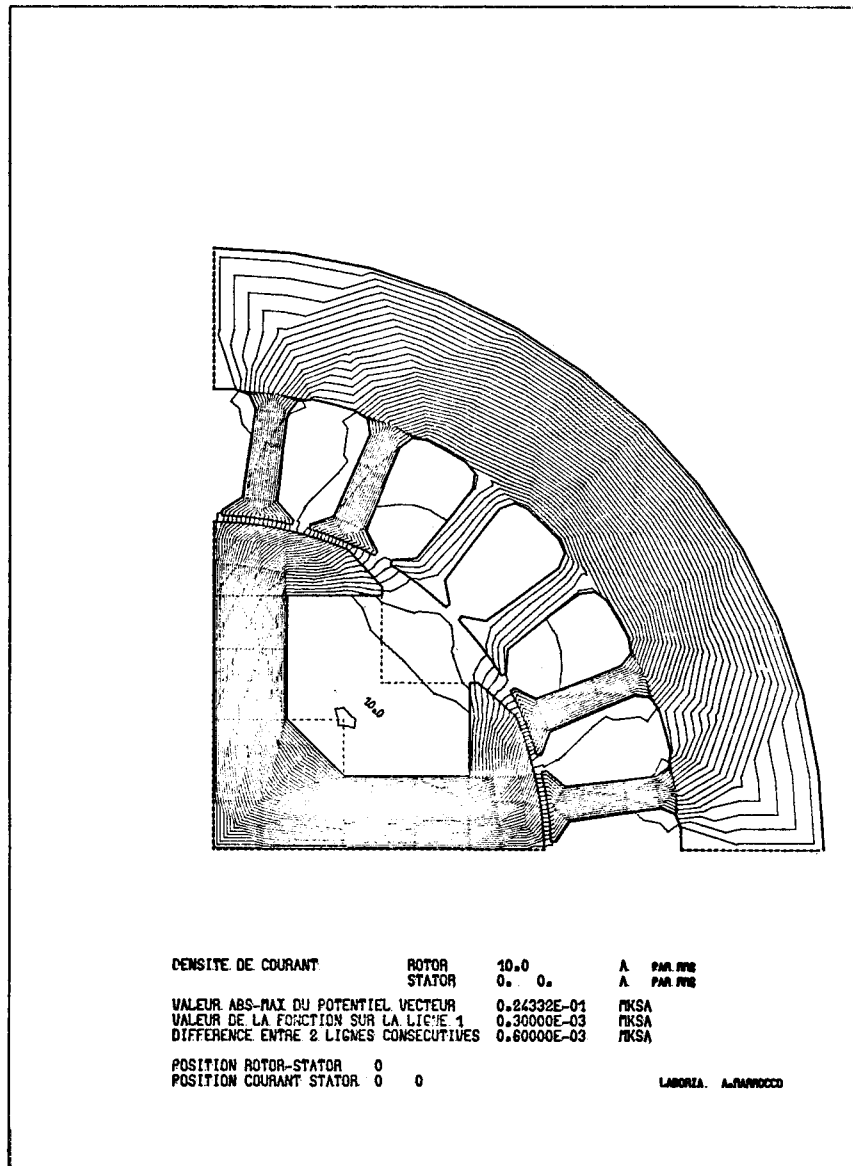


Figure 6

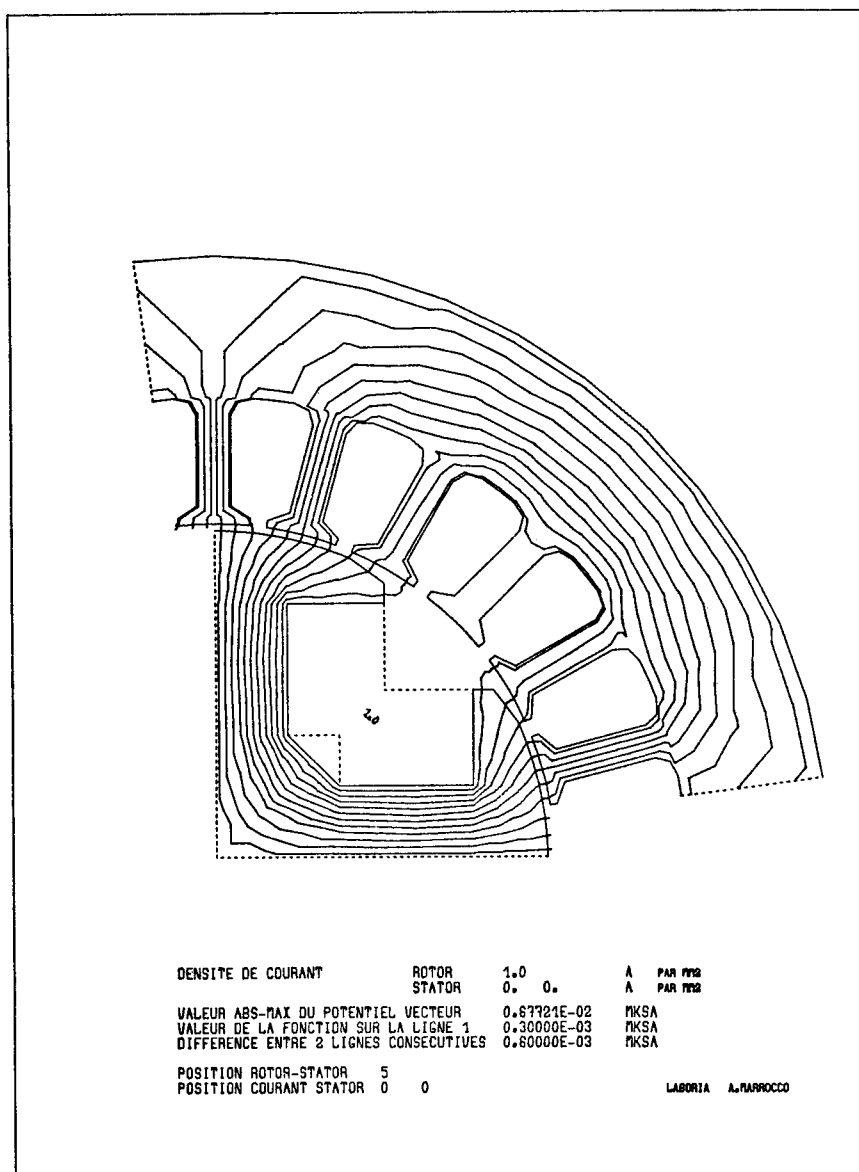


Figure 7

gardant rigoureusement la même écriture en "tridimensionnel". Les espaces fonctionnels vont évidemment changer pour la dimension 3. La condition aux limites traduisant l'absence de phénomène à l'extérieur de Ω est

$$(3.3) \quad \vec{A} \wedge \vec{n} = 0$$

\vec{n} désignant la normale à $\partial\Omega$.

(La condition (2.4) n'est qu'un cas particulier de (3.3))

Pour la cas tridimensionnel, les deux fonctionnelles (3.1) et (3.2) ne sont plus identiques, on n'a plus la relation (2.8), et la fonctionnelle (3.2) qui est celle découlant du problème physique est plus délicate à étudier. Pourtant dans le cas magnétiquement linéaire (v ne dépendant que de x), la fonctionnelle (3.1) semble être la fonctionnelle d'énergie car il est bien connu (cf. [1]) que le potentiel vecteur vérifie l'équation

$$-\operatorname{div}_0 \Delta \vec{A} = \vec{j} \quad (\text{dans l'air}),$$

Δ étant le Laplacien vectoriel. Cette équation découle directement de la fonctionnelle (3.1). Tout cela va trouver une explication grâce au prochain paragraphe.

III.1. Espaces fonctionnels - Résultats

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^3 de frontière suffisamment régulière, on note

$$(3.4) \quad W = \{ \vec{u}, \vec{v} \in [H^1(\Omega)]^3, \vec{v} \wedge \vec{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}$$

Résultat 1

Muni du produit scalaire

$$(3.5) \quad ((\vec{u}, \vec{v})) = \int_{\Omega} \operatorname{grad} \vec{u} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} \, dx = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 \operatorname{grad} u_i \cdot \operatorname{grad} v_i \, dx$$

W est un espace de Hilbert.

On peut montrer que la norme induite par le produit scalaire (3.5) est équivalente à la norme induite par la norme habituelle de $[H^1(\Omega)]^3$. On a de plus, dans l'espace W le résultat suivant qui est très intéressant.

Résultat 2

Quels que soient \vec{u} et $\vec{v} \in W$, on a

$$(3.6) \quad \int_{\Omega} \text{grad } \vec{u} \cdot \text{grad } \vec{v} \, dx = \int_{\Omega} \text{rot } \vec{u} \cdot \text{rot } \vec{v} \, dx + \int_{\Omega} \text{div } \vec{u} \cdot \text{div } \vec{v} \, dx$$

On le démontre facilement pour les fonctions suffisamment régulières et par passage à la limite pour W .

Compte tenu de ces deux résultats et de la remarque faite pour le cas linéaire, le problème de magnétostatique tridimensionnel peut se formuler ainsi

Trouver $\vec{A}^* \in W$ tel que

$$(3.7) \quad \int_{\Omega} \nu_r(x, |\text{rot } \vec{A}^*|^2) \text{rot } \vec{A}^* \cdot \text{rot } \vec{v} \, dx + \int_{\Omega} \eta(x) \text{div } \vec{A}^* \cdot \text{div } \vec{v} \, dx - \mu_0 \int_{\Omega} \vec{j} \cdot \vec{v} \, dx = 0$$

$\forall \vec{v} \in W$

$\eta(x)$ étant une fonction strictement positive (quelconque).

Pourquoi ne pas utiliser (3.2) directement ? tout simplement parce que ce problème n'admet pas une unique solution, mais une classe de solution. En résolvant (3.7) on détermine l'unique représentant à divergence nulle de la classe solution de (3.2).

Résultat 3

La solution A^* du problème (3.7) est la solution du problème de magnétostatique vérifiant $\text{div } A^* = 0$

Si on choisit $\phi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, alors $\text{grad } \phi \in W$ et (3.7) devient

$$\int_{\Omega} \eta(x) \text{div } A^* \cdot \Delta \phi \, dx - \int_{\Omega} \vec{j} \cdot \text{grad } \phi \, dx = 0 \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$$

Utilisant le fait que \vec{j} est un courant ($\text{div } \vec{j} = 0$), on a alors

$$\int_{\Omega} \eta(x) \text{div } A^* \cdot \nabla \phi \, dx = 0 \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$$

On en déduit donc que $\text{div } A^* = 0$ dans $L^2(\Omega)$.

Le problème (3.7) et le problème annexe (3.8) admettent chacun une solution et une seule, la démonstration étant analogue au cas bi-dimensionnel.

Trouver $A^* \in W$ tel que

$$(3.8) \int_{\Omega} \nu_r(x, |\text{grad } A^*|^2) \text{grad } \vec{A}^* \cdot \text{grad } \vec{v} \, dx - \mu_0 \int_{\Omega} \vec{j} \cdot \vec{v} \, dx = 0$$

$$\forall \vec{v} \in W$$

III.2. Approximation par les éléments finis

La machine étudiée numériquement est un alternateur à griffes. On a représenté sur les figures (8,9,10) différentes vues de la portion de machine étudiée (secteur 30°), bien entendu sur ces figures seules les parties ferromagnétiques ont

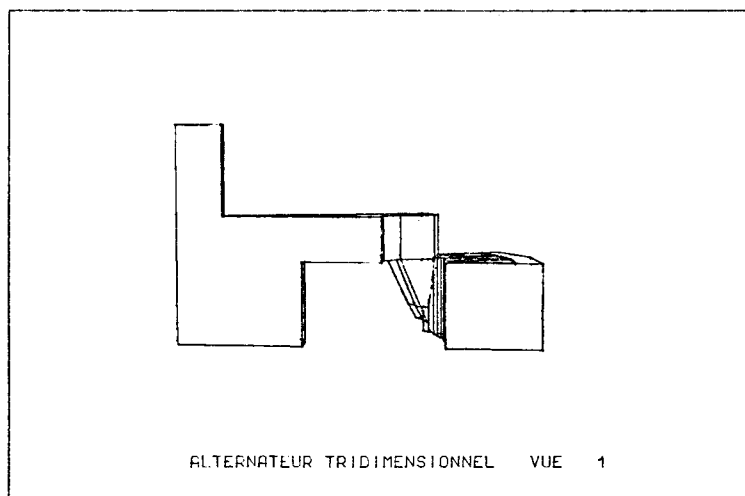
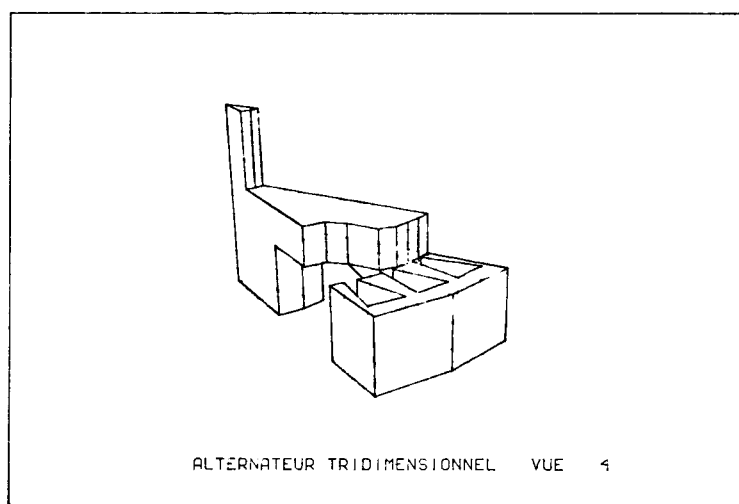


Figure 8

Figure 9



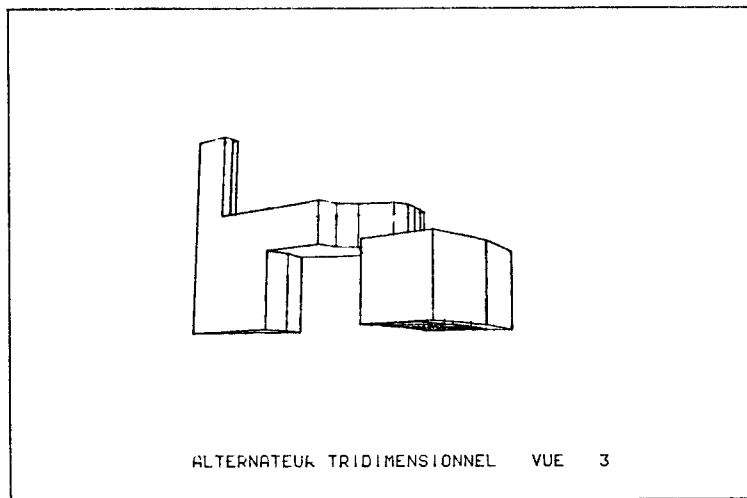


Figure 10

été représentées (axe, rotor, stator), mais le domaine retenu pour la résolution de (3.7) ou (3.8) est un prisme à base triangulaire.

Le découpage en tétraèdre (tétraédrisation \mathcal{T}_h) du domaine a été réalisé de la façon suivante. On part d'une triangulation dans le plan (x_1, x_2) respectant les milieux (air, fer, cuivre), on surélève dans la direction x_3 , cette triangulation d'une hauteur h , on déplace éventuellement certains noeuds de façon à respecter les frontières entre milieux. On obtient ainsi une couche d'éléments prismatiques à base triangulaire, chacun des prismes élémentaires est ensuite automatiquement découpé en 10 tétraèdres. Le domaine est constitué de NB couches (pour l'application numérique NB = 7)[⊗]. On a tenu compte pour la résolution numérique d'une certaine symétrie par rapport au plan $x_3 = 0$, nous verrons plus loin les conditions aux limites qu'il faut imposer sur ce plan.

L'espace fonctionnel W (3.4) est approché par

$$(3.9) \quad W_h = \{ \vec{v}_h, \vec{v}_h \in [C^0(\bar{\Omega})]^3, d^0_{v_h, i} \leq 1 \text{ sur } T, T \in \mathcal{T}_h, i = 1, 2, 3 \\ \vec{v}_h \wedge \vec{n} = 0 \text{ sur le bord} \}$$

Un élément $\vec{v}_h \in W_h$ s'explique de la façon suivante

[⊗] On pourra voir sur la fig. 11 la triangulation réalisée dans le plan $x_3 = 0$

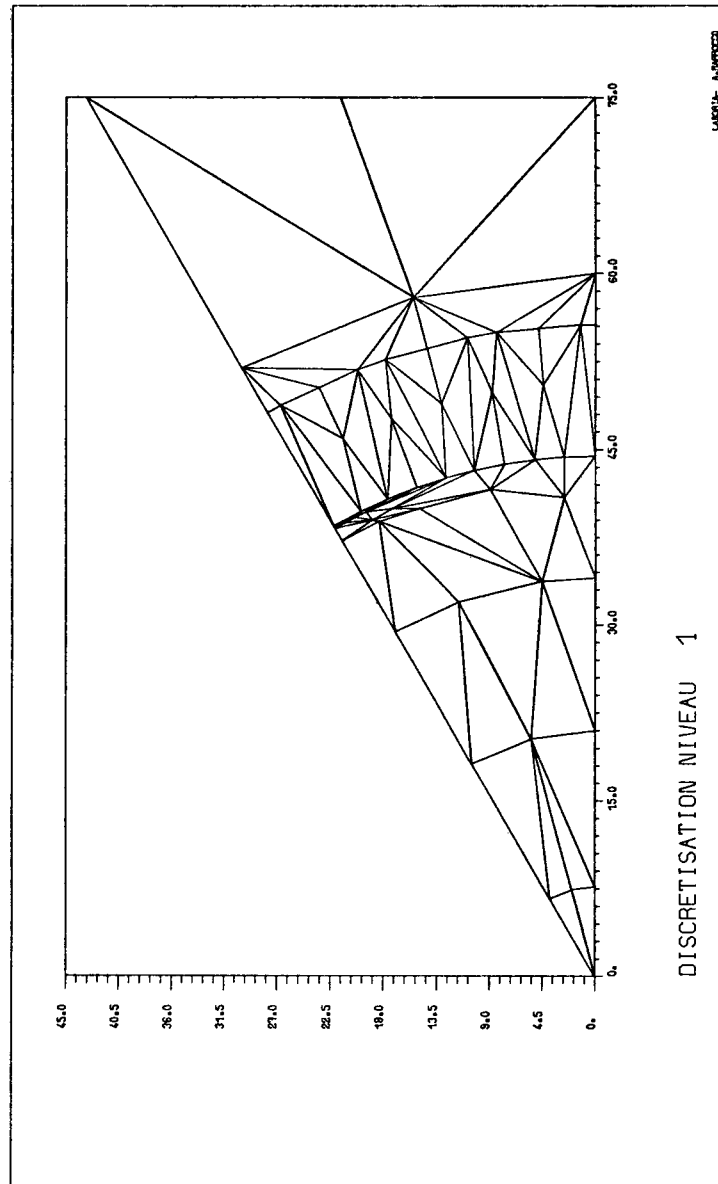


Figure 11

$$(3.10) \quad \vec{v}_h(x_1, x_2, x_3) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{6 \text{ vol}(T)} \left(\sum_{j=1}^4 (p_j^T + q_j^T x_1 + r_j^T x_2 + s_j^T x_3) \vec{v}_j^T \right) \theta_h^T(x_1, x_2, x_3)$$

où $\text{vol}(T)$ représente le volume du tétraèdre $T \in \mathcal{T}_h$,

θ_h^T est la fonction caractéristique du tétraèdre T ,

$p_j^T, q_j^T, r_j^T, s_j^T$ sont des fonctions des coordonnées des sommets de T ,

\vec{v}_j^T est la valeur de la fonction au sommet j du tétraèdre T .

III.2.1. Conditions aux limites

Si le domaine Ω était un parallélépipède (côtés parallèles aux axes), la condition $\vec{v} \wedge \vec{n} = 0$ sur le bord s'exprimerait facilement comme des conditions de Dirichlet pour certaines composantes sur certaines faces (voir par exemple [5],[8])

Dans notre cas nous avons un bord incliné à 30° , et

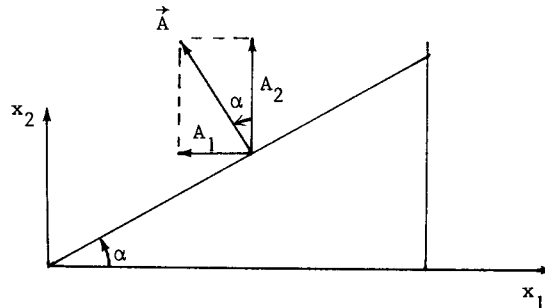


Figure 12

la condition $\vec{v} \wedge \vec{n}$ sur le bord incliné va entraîner une relation entre la première et deuxième composante de \vec{A} . Ainsi aux points de la face inclinée, il faudra prendre une fonction de base \vec{v} (dans la formulation variationnelle (3.7) ou (3.8)), telle que (par exemple)

$$(3.11) \quad \vec{v} = (\text{COEFF}, 1, 0)$$

avec $\text{COEFF} = -\text{tg } \alpha$

En ce qui concerne les conditions aux limites sur le plan $x_3 = 0$: si la structure est symétrique par rapport au plan $x_3 = 0$, alors il suffira dans la résolution numérique de laisser "libres" les composantes 1 et 2 de \vec{A} et d'imposer $A_3 = 0$

(\vec{A} se trouvera ainsi dans le plan tangent) mais en pratique si la structure est bien la même globalement, elle se trouve décalée et a subi une rotation de 30° , les conditions aux limites qu'il faut imposer sont autres. Des essais numériques sur une structure plus simple ainsi que des considérations physiques nous ont amené à cette conclusion :

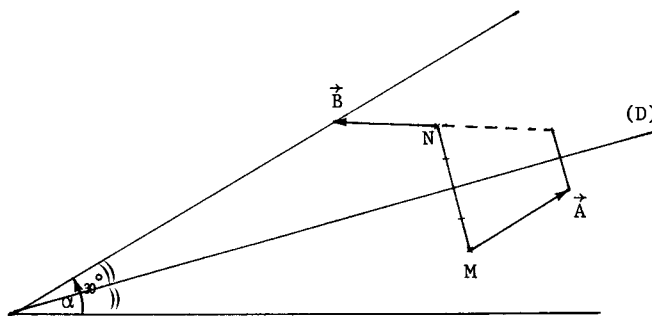


Figure 13

Si M et N sont deux points symétriques par rapport à (D) bissectrice, et si \vec{A} et \vec{B} sont les potentiels vecteurs en M et N respectivement, \vec{B} et \vec{A} sont liés par les relations :

$$(3.12) \quad \begin{aligned} & \cdot (B_1, B_2) \text{ anti-symétrique de } (A_1, A_2) \text{ par rapport à (D)} \\ & \cdot B_3 = A_3 \end{aligned}$$

Il est donc préférable dans ce cas d'avoir dans le plan $x_3 = 0$ une triangulation symétrique par rapport à (D).

III.2.2. Formulation des problèmes approchés - Résolution.

Le problème de magnétostatique tridimensionnel approché peut donc se ramener à la résolution du problème variationnel suivant

Trouver $\vec{A}_h^* \in W_h$, tel que

$$(3.13) \quad \int_{\Omega} \nu_r(x, |\text{rot } \vec{A}_h^*|^2) \text{rot } \vec{A}_h^* \cdot \text{rot } \vec{v}_h \, dx + \int_{\Omega} \eta(x) \text{div } \vec{A}_h^* \cdot \text{div } \vec{v} \, dx - \mu_0 \int_{\Omega} \vec{j} \cdot \vec{v}_h \, dx = 0$$

$$\forall \vec{v}_h \in W_h$$

Ce problème admet une solution unique, ainsi d'ailleurs que le problème sui-

vant, approchant (3.8)

$$(3.14) \quad \begin{aligned} & \text{Trouver } \vec{A}_h^* \in W_h \text{ tel que} \\ & \int_{\Omega} v_r(x, |\text{grad } \vec{A}_h^*|^2) \text{grad } \vec{A}_h^* \cdot \text{grad } \vec{v}_h \, dx - \mu_0 \int_{\Omega} \vec{j} \cdot \vec{v}_h \, dx = 0 \\ & \forall \vec{v}_h \in W_h \end{aligned}$$

On trouvera dans [8] des expériences numériques et des remarques sur la résolution des problèmes (3.13) et (3.14) pour des structures tridimensionnelles plus simples.

En ce qui concerne l'alternateur tridimensionnel à griffes, le découpage du domaine considéré comprend 6160 tétraèdres et 1419 noeuds (cas de symétrie de la machine par rapport à $x_3 = 0$). Il a fallu 389 itérations du type EGSN (2.26)[⊗], avec $w=1.85$ (non optimum), pour un courant d'excitation de 10 A/mm^2 (conduisant à une saturation magnétique). Le temps pour faire une itération est environ 1 mn sur CII IRIS 80.

Dans le cas où l'on impose sur $x_3=0$, les conditions aux limites du type (3.12), nous avons refait un découpage de Ω comportant cette fois 7420 tétraèdres et 1695 noeuds.

Il a fallu cette fois-ci 530 itérations, toujours avec $w=1.85$ pour un courant d'excitation de 3 A/mm^2 . Le temps de calcul pour chaque itération est un peu plus long que dans le cas précédent.

III.2.3. Visualisation des résultats

Les résultats en potentiel vecteur sont difficilement exploitables directement par l'électro-technicien ; ce qui l'intéresse surtout c'est de connaître le flux à travers certaines surfaces, et la propagation des lignes d'induction, dans l'espace fournit un renseignement appréciable. Pour visualiser ces lignes d'induction dans "l'espace" nous avons utilisé le software FORTRAN 3D réalisé au LABORIA par le projet graphique (M. LEMAIRE). On pourra voir sur les figures 14 et suivantes la propagation des lignes d'induction, les points de départ étant répartis sur des

⊗ Pour réaliser le test
$$\frac{\sum_{i=1}^N |A_i^{n+1} - A_i^n|}{\sum_{i=1}^N |A_i^{n+1}|} \leq 10^{-5}$$

où les variables ont été numérotées de 1 à N.

petits cercles contenus dans le rotor et $x_3=0$, et correspondant au problème symétrique.

Figure 14

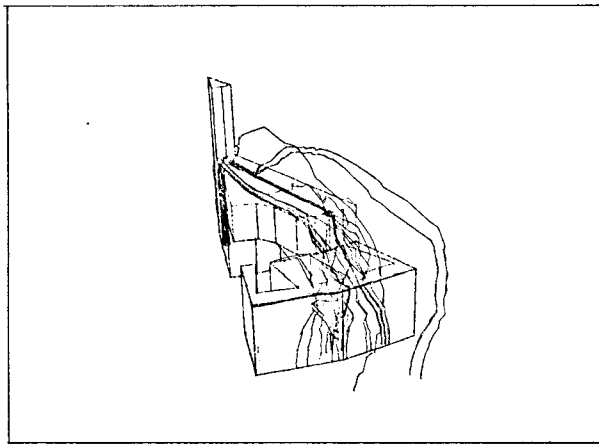
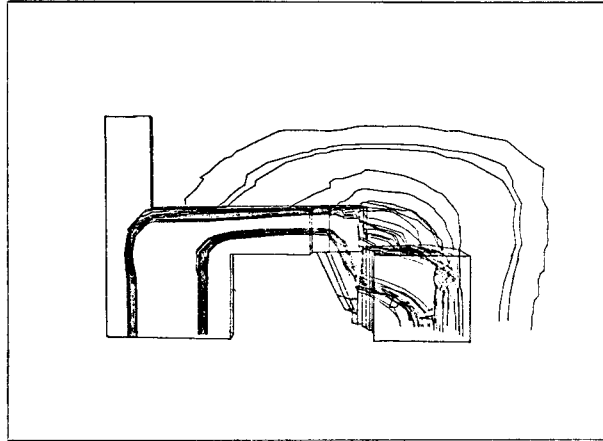
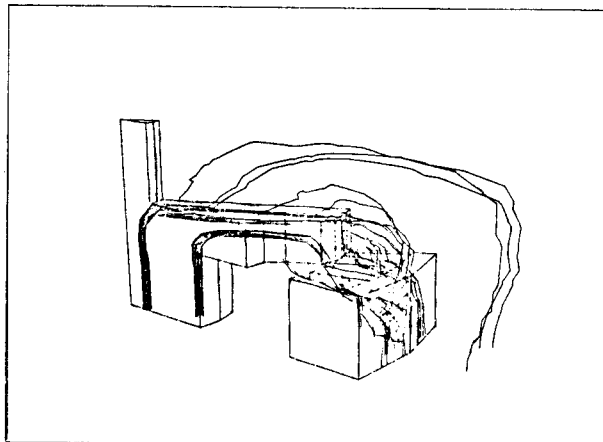


Figure 15

Figure 16



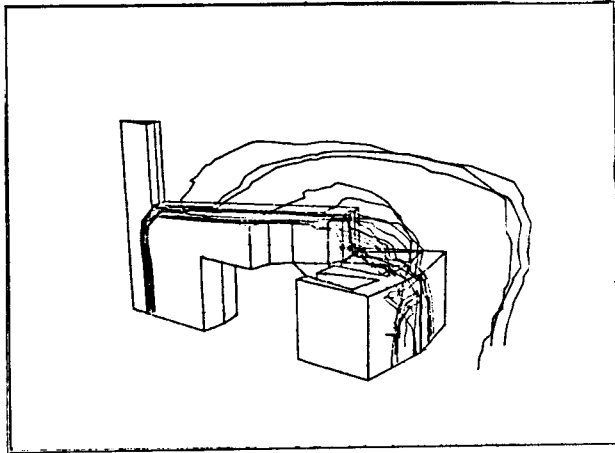


Figure 17

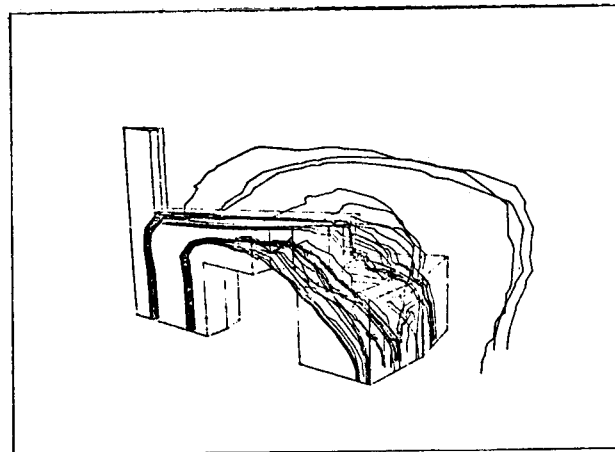


Figure 18

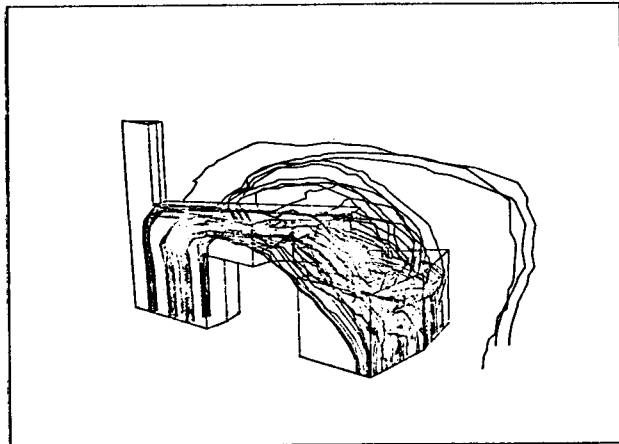


Figure 19

BIBLIOGRAPHIE

- [1] DURAND,E., Magnétostatique, Masson et Cie ed., Paris 1968.
- [2] GLOWINSKI,R. et MARROCCO,A., Analyse numérique du champs magnétique d'un alternateur par éléments finis et surrelaxation ponctuelle non linéaire. Computer methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.3,1, 1974.
- [3] GLOWINSKI,R. et MARROCCO,A., Finite element approximation and iterative methods of solution for 2.D. non-linear magnetostatic problems (à paraître dans "Proceedings of the First COMPUMAC Conference on Magnetic Field Computation", Oxford, 1976.
- [4] ERDELY,E.A. et FUCHS,E.F., Nonlinear field analysis of D.C. machines. IEEE PAS 80, 7, 1546-1583, 1970.
- [5] MARROCCO,A., A paraître.
- [6] SCHECHTER,S., Minimisation of convex functions by relaxation. Ch.7 of Integer and non linear programming, J.Abadie; North-Holland, 1970.
- [7] GLOWINSKI,R., et MARROCCO,A., Sur l'approximation par éléments finis d'ordre un et la résolution par pénalisation dualité d'une classe de problèmes de Dirichlet non-linéaire. RAIRO, R2, Août 1975.
- [8] MARROCCO,A., Analyse numérique de problèmes tridimensionnels en magnétostatique. A paraître dans "Proceedings du Iie Colloque International sur les Méthodes de Calcul Scientifique et Technique", Versailles, déc. 1975.

*IRIA-LABORIA
Domaine de Voluceau
Rocquencourt
78150 - Le Chesnay, France*