Ann. Sc. Math. Québec, 1977, vol. I, No. 2, pp. 265-269

COMMANDABILITE DES SYSTEMES RETARDES DU POINT DE VUE DES SEMI-GROUPES D'OPERATEURS

A. Manitius et R. Triggiani

Dans cette note, nous présentons quelques uns de nos plus récents résultats sur la commandabilité des systèmes retardés, résultats obtenus en utilisant une représentation de tels systèmes par une équation différentielle abstraite dans l'espace de Banach $R^n \times L_2([-h,0]; R^n)$ (désigné succinctement par M_2). Les preuves et un traitement plus compréhensif de ces résultats sont donnés dans [1,2,3].

Nous étudions la commandabilité des systèmes

$$\dot{z}(t) = A_0 z(t) + A_1 z(t-h) + Bu(t) \tag{1}$$

où $z \in R^n$, $u \in R^n$, A_0, A_1 et B sont des matrices de dimensions appropriées. Le système (1) a une représentation équivalente

$$\dot{x}(t) = \tilde{A}x(t) + \tilde{B}u(t) \tag{2}$$

où $x \in M_2$, $x = (x^0, x^1)$, $x^0 \in R^n$, $x^1 \in L_2([-h,0], R^n)$; $x^0(t) = y(t)$, $x^1(t) = z_t = z_t(\theta) = z(t+\theta)$, $\theta \in [-h,0]$; $\tilde{A}$ est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu d'opérateurs linéaires bornés, donné par $\tilde{A}x = (A_0 x^0 + A_1 x^1(-h), dx^1/d\theta)$, et $\tilde{B}u = (Bu, 0)$. On définit l'opérateur résolvant de $\tilde{A}$ par $R(\lambda, A) = (I\lambda - \tilde{A})^{-1}$, et l'ensemble résolvant par $\rho(\tilde{A}) = \{\lambda | \det \Delta(\lambda) \neq 0\}$, où $\Delta(\lambda)$ est une matrice $n \times n$ donnée par $\Delta(\lambda) = I\lambda - A_0 - A_1 e^{-\lambda h}$.

L'opérateur $R(\lambda, \tilde{A})\tilde{B}$ est alors donné par

$$R(\lambda, \tilde{A})\tilde{B}u = (\Delta^{-1}(\lambda)Bu,\ e^{\lambda\theta}\Delta^{-1}(\lambda)Bu), \quad \lambda \in \rho(A). \tag{3}$$

Pour un t fixé, soit C_t l'ensemble des fonctions accessibles $z_t \in L_2([-h,0], R^n)$, et soit K_t l'ensemble des couples accessibles $(z(t), z_t) \in R^n \times L_2([-h,0], R^n)$. Le système (1) sera dit L_2-approximativement commandable si $\overline{UC_t} = L_2([-h,0], R^n)$, et M_2-approximativement commandable si $\overline{UK_t} = M_2$, où l'union est prise sur tous les $t > 0$ et la barre représente la fermeture dans L_2 ou M_2, respectivement. La caractérisation générale de la commandabilité approchée des systèmes abstraits (2) donnée dans les travaux antécédents de Fattorini et de Triggiani donne que le système est M_2-approximativement commandable si et seulement si

$$\langle \eta, R(\lambda,\tilde{A})\tilde{B}u\rangle_{M_2} = 0 \quad \forall\lambda \in \rho(\tilde{A}) \qquad \forall u \in R^m \tag{4}$$

implique que $\eta = 0$.

Pour tout $\xi \in L_2([-h,0],R^n)$, définissons

$$q(\lambda) = \int_{-h}^{0} \xi(\theta)e^{\lambda\theta}d\theta. \tag{5}$$

La fonction $q(\lambda)$ est une transformée de Laplace finie de la fonction $\xi(\cdot)$.

On notera par $FLT_2([-h,0],R^n)$ une classe de telles fonctions. Soit $c \in R^n$ et soit T, la transposition. Utilisant (3),(4) et (5), on a prouvé le résultat suivant.

Théorème 1. Le système (2), i.e. (1) est

(i) L_2-approximativement commandable si et seulement si pour $q(\cdot) \in FLT_2([-h,0],R^n)$, $q^T(\lambda)\Delta^{-1}(\lambda)B \equiv 0 \quad \forall\lambda \in \rho(\tilde{A})$ implique que $q(\lambda) \equiv 0$.

(ii) M_2-approximativement commandable si et seulement si pour $q(\cdot) \in FLT_2([-h,0],R^n)$, $[c^T\, q^T(\lambda)]\Delta^{-1}(\lambda)B \equiv 0 \quad \forall\lambda \in \rho(\tilde{A})$ implique que $c = 0$ et $q(\lambda) \equiv 0$.

(iii) R^n-commandable si et seulement si, pour $c \in R^n$, $c^T\Delta^{-1}(\lambda)B \equiv 0 \quad \forall\lambda \in \rho(\tilde{A})$ implique que $c = 0$.

Ce théorème est général dans le sens qu'il s'applique à tout système retardé (avec une modification appropriée de la matrice $\Delta(\lambda)$), non seulement au cas simple du système (1).

Puisque la matrice $\mathrm{adj}\Delta(\lambda)$ est un polynôme matriciel des deux variables, λ et $e^{-\lambda h}$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\Delta^{-1}(\lambda)B &= [\det\Delta(\lambda)]^{-1}[\mathrm{adj}\Delta(\lambda)]B \\ &= [\det\Delta(\lambda)]^{-1}\, P(\lambda)v(e^{-\lambda h})\end{aligned} \tag{6}$$

où $P(\lambda)$ est une matrice polynomiale $n\times n$, et $v(e^{-\lambda h}) = [I_m, I_m e^{-\lambda h},\dots, I_m e^{-\lambda(n-1)h}]^T$, I_m étant une matrice identité $m\times m$. La matrice $P(\lambda)$ joue un rôle essentiel dans les conditions de commandabilité. Ses colonnes peuvent être calculées à partir d'un algorithme récursif [2] utilisant directement les matrices A_0,

A_1 et B.

Théorème 2. Une condition nécessaire pour la commandabilité L_2-approchée de (1) est que $P(\lambda)$ soit de rang n, ou, de façon équivalente, que $H(\lambda)$ soit de rang n, où

$$\begin{aligned} H(\lambda) &= [G(\lambda), F(\lambda)G(\lambda), \ldots, F^{n-1}(\lambda)G(\lambda)] \\ F(\lambda) &= (I\lambda - A_0)^{-1}A_1 \\ G(\lambda) &= (I\lambda - A_0)^{-1}B. \end{aligned} \tag{7}$$

(Pour $H(\lambda)$, les valeurs de λ sont restreintes à $\{\lambda | \det(I\lambda - A_0) \neq 0\}$.)

Cette condition est nécessaire et devient suffisante sous quelques hypothèses supplémentaires. Par exemple, pour $m = 1$, si $P(\lambda)$ peut être transformée, par la multiplication à gauche par une matrice $n \times n$ constante inversible à une matrice triangulaire droite (i.e. de la forme ◥ ou ◢) (resp. gauche ◣ , ◤), alors la condition du théorème 2 devient suffisante pour la commandabilité M_2 (resp. L_2)-approchée. A partir de telles idées, on a prouvé plusieurs conditions suffisantes dont

Théorème 3. Supposons que

(i) rang $[B, A_1B, \ldots, A_1^{n-1}B] = n$

(ii) $A_0 \operatorname{Im} A_1^i B \subset \sum_{j=0}^{i} \operatorname{Im} A_1^j B, \quad i = 0, \ldots, n-1.$

Alors le système (1) est M_2-approximativement commandable, pour toute valeur de $h > 0$. (Im signifie "image")

En utilisant l'analyse spectrale du générateur infinitésimal, on peut prouver qu'une condition nécessaire pour la commandabilité M_2-approchée est que le système (2) soit commandable sur tous ses sous-espaces propres. Ceci nous conduit au résultat suivant.

Théorème 4. Soit $m = 1$. Une condition nécessaire pour la commandabilité M_2-approchée est que

(i) $\det P(\lambda) \neq 0$ et

(ii) $P(\lambda)v(e^{-\lambda h}) \neq 0$ pour tout complexe λ;

la condition est suffisante pour $n=2$.

Notons que la condition (ii) restreinte à $\{\lambda | \mathrm{Re}\lambda \geq 0\}$ est nécessaire et suffisante pour la commandabilité sur les sous-espaces propres correspondant aux valeurs propres instables, donc pour la stabilisabilité du système (1).

Soit $p_k(\lambda)$ un vecteur $1\times m$ de polynômes en λ, arbitraire, de degré d'au plus k. Soit $Q(\lambda)$ une matrice polynomiale $1\times(n-1)m$ de la forme

$$Q(\lambda) = [p_{n-2}(\lambda),p_{n-3}(\lambda),\dots,p_0] \tag{8}$$

et soient $[0_m,Q(\lambda)]$ et $[Q(\lambda),0_m]$ des matrices $1\times nm$, où 0_m désigne une rangée de m zéros.

<u>*Théorème 5.*</u> Une condition nécessaire et suffisante pour la commandabilité M_2-approchée est que pour $c \in R^n$, $q(\cdot) \in FLT_2([-h,0],R^n)$, $Q(\lambda)$ donné par (8), l'équation

$$[c^T+q^T(\lambda)]P(\lambda) = [0_m,Q(\lambda)]e^{-\lambda h}-[Q(\lambda),0_m] \tag{9}$$

ne possède pas de solution non-nulle $\{c,q(\cdot),Q(\cdot)\}$.

Puisque l'on peut prouver que $q(\lambda) \in FLT_2$ vérifiant (9) est de la forme $[g_1(\lambda)+g_2(\lambda)e^{-\lambda h}]/\det P(\lambda)$ où $g_1(\lambda)$ et $g_2(\lambda)$ sont des vecteurs $n\times 1$ de polynômes en λ de degré d'au plus $N-1$, où $N = \deg P(\lambda)$, vérifier les conditions du théorème 5 revient à vérifier l'existence de solutions non-nulles d'un système d'équations algébriques homogènes linéaires par rapport aux coefficients de $g_1(\lambda)$, $g_2(\lambda)$, c et tous les $p_k(\lambda)$ apparaissant dans $Q(\lambda)$. Des exemples résolus montrent que ce test est pratiquement utilisable.

Il y a une relation intéressante entre la dégénérescence ponctuelle des équations retardées et la non-commandabilité approchée au sens de L_2.

<u>*Théorème 6.*</u> Tout système (1) tel que le système transposé

$$\dot{\xi}(t) = A_0^T\xi(t) + A_1^T\xi(t-h)$$

est dégénéré ponctuellement par rapport à B sur l'intervalle $[2h,\infty)$, n'est pas L^2-approximativement commandable.

Comme exemples de tels systèmes, on peut prendre les systèmes dégénérés décrits précédemment par Popov et par Zverkin; on constate que dans chacun de ces exemples, on a que $\operatorname{rang} P(\lambda) = n$, i.e. la condition nécessaire du théorème 2 est satisfaite, mais le système (1) n'est pas L_2-approximativement commandable.

Plusieurs autres résultats ont été établis dans les rapports [1],[2],[3], [8].

REFERENCES

[1] MANITIUS,A., et TRIGGIANI,R., Function space controllability of linear retarded systems: a derivation from abstract operator conditions. Rapport CRM-605, Université de Montréal, 1976 et SIAM J. Control and Optimization (à paraître).

[2] MANITIUS,A., et TRIGGIANI,R., Sufficient conditions for function space controllability and feedback stabilizability of linear retarded systems. Proc. 1976 IEEE Conference on Decision and Control, Clearwater, Florida, 1-3 Dec. 1976, pages 1209-1216.

[3] MANITIUS,A., et TRIGGIANI,R., New results on functional controllability of time-delay systems. Proc. 1976 Conference on Information Sciences and Systems, The John Hopkins University, Baltimore, Maryland (1976), 401-405.

[4] DELFOUR,M.C., et MITTER,S.K., Controllability, observability and optimal feedback control of affine hereditary differential systems. SIAM J.Control 10 (no.2, 1972), 298-328.

[5] JACOBS,M.Q., et LANGENHOP,C.E., Criteria for function space controllability of linear neutral systems. SIAM J. Control and Optimization 14 (1973), 1009-1048.

[6] MANITIUS,A., Optimal control of hereditary systems. Notes du cours "Control theory and topics in functionsl analysis", IAEA, Vienne 1976, Vol.III, 43-178. (Rapport CRM-472, Université de Montréal, 1975).

[7] TRIGGIANI,R., Extensions of rank conditions for controllability and observability to Banach spaces and unbounded operators. SIAM J. Control 14 (1976) 313-338.

[8] MANITIUS,A., Controllability, observability and stabilizability of linear retarded systems. Proc. 1976 IEEE Conference on Decision and Control, Clearwater, Florida, 1-3 Dec.1976, 752-758.

A.M.
Centre de Recherches Mathématiques
Université de Montréal
Montréal, Québec, Canada H3C 3J7

R.T.
Department of Mathematics
Iowa State University
Ames. Iowa 50010, U.S.A.