Ann. Sc. Math. Québec, 1977, vol. I, No. 2, pp. 257-264

FORMULATION MIXTE EN CONTROLE OPTIMAL

J.L. Lions

Introduction.

Un grand nombre d'auteurs ont utilisé une formulation "*mixte*" des *problèmes aux limites elliptiques* en vue de l'usage d'éléments finis mixtes. Cf. Brezzi [1], Ciarlet-Raviart [1], Raviart-Thomas [1], M. Bercovier [1] et la Bibliographie de ces travaux.

On utilise ici ce type de formulation pour les *problèmes de contrôle*. On peut alors appliquer les méthodes de Bercovier [1], entre autres. Cf. aussi Lions [1], Chap. 5, n° 2.

Il ne semble pas que le type de considérations ci-après ait donné lieu à des calculs numériques.

S'ils étaient encourageants, on pourrait poursuivre l'étude esquissée ci-après, dans le sens des équations d'état non linéaires et des problèmes d'évolution.

Le plan est le suivant:

1. Formulation mixte de problèmes elliptiques.

1.1. Résultat général (Brezzi [1]).

On se donne deux espaces de Hilbert ϕ_1, ϕ_2 sur $\mathbb{R}$; on désigne par $(\ ,\ )_i$ et $\|\ \|_i$ le produit scalaire et la norme dans ϕ_i, $i=1,2$, et par ϕ_i' le dual de ϕ_i.

On se donne:

$$\left\{\begin{array}{l} a = \text{forme bilinéaire continue sur } \phi_1 \times \phi_1, \\ b = \text{forme bilinéaire continue sur } \phi_2 \times \phi_2. \end{array}\right. \tag{1.1}$$

On désigne par A et B les opérateurs associés aux formes a et b, i.e.

$$\left\{\begin{array}{ll} A \in \mathcal{L}(\phi_1;\phi_1'), & \langle A\varphi_1,\psi_1 \rangle = a(\varphi_1,\psi_1), \\ B \in \mathcal{L}(\phi_1;\phi_2'), & \langle B\varphi_1,\psi_2 \rangle = b(\varphi_1,\psi_2). \end{array}\right. \tag{1.2}$$

On utilisera aussi les adjoints de A et B:

$$\left\{\begin{array}{ll} A^* \in \mathcal{L}(\phi_1;\phi_1'), & \langle A^*\varphi_1,\psi_1 \rangle = a^*(\varphi_1,\psi_1) = a(\psi_1,\varphi_1), \\ B^* \in \mathcal{L}(\phi_2;\phi_1'), & \langle B^*\varphi_2,\psi_1 \rangle = b(\psi_1,\varphi_2). \end{array}\right. \tag{1.3}$$

On fait les hypothèses suivantes:

$$\left\{\begin{array}{l} a(\varphi_1,\varphi_1) \geq 0, \quad \forall\ \varphi_1 \in \phi_1, \\ a(\varphi_1,\varphi_1) \geq \alpha\|\varphi_1\|_1^2, \quad \alpha > 0, \quad \forall\ \varphi_1 \in \operatorname{Ker} B; \end{array}\right. \tag{1.4}$$

$$\sup_{\varphi_1} \frac{|b(\varphi_1,\psi_2)|}{\|\varphi_1\|_1} \geq c\|\psi_2\|_2, \quad c > 0. \tag{1.5}$$

D'après la 2^e hypothèse (1.4), A est un isomorphisme de (Ker B) $\rightarrow$ (Ker B)', et (1.5) équivaut à

$$\|B^*\psi_2\|_{\phi_1'} \geq c\|\psi_2\|_2. \tag{1.6}$$

Donc

$$\text{B est un isomorphisme de } \phi_1/\operatorname{Ker} B \rightarrow \phi_2'. \tag{1.7}$$

Il existe alors S avec

$$S \in \mathcal{L}(\phi_2';\phi_1), \quad B_0 S = \text{identité sur } \phi_2'. \ \blacksquare \tag{1.8}$$

Le problèmes aux limites.

Pour $\varphi,\psi \in \phi = \phi_1 \times \phi_2$, $\varphi = \{\varphi_1,\varphi_2\}$, $\psi = \{\psi_1,\psi_2\}$, on pose:

$$\pi(\varphi,\psi) = a(\varphi_1,\psi_1) + b(\psi_1,\varphi_2) - b(\varphi_1,\psi_2) \tag{1.9}$$

et on se donne

$$\psi \to L(\psi) \text{ forme linéaire continue sur } \phi. \tag{1.10}$$

On cherche $\varphi \in \phi$ solution de

$$\pi(\varphi,\psi) = L(\psi), \quad \forall\ \psi \in \phi. \tag{1.11}$$

On a alors (Brezzi, loc. cit.)

(1.12) $\begin{cases} \textit{sous les hypothèses } (1.4)\ (1.5), \textit{ le problème } (1.11) \\ \textit{admet une solution unique.} \end{cases}$

On rappelle brièvement la démonstration au point 1.2 ci-dessous, un exemple simple étant donné en 1.3. ■

On peut écrire

$$L(\psi) = L_1(\psi_1) + L_2(\psi_2), \quad L_i \in \phi_i'. \tag{1.13}$$

Alors (1.11) s'écrit

$$\begin{cases} A\varphi_1 + B^*\varphi_2 = L_1, \\ \quad - B\varphi_1 = L_2. \end{cases} \tag{1.14}$$

Dans les applications, cette écriture revient à remplacer une *équation* elliptique par un *système* elliptique d'*ordre inférieur*.

1.2. Démonstration de (1.12).

On utilise d'abord S avec (1.8); si l'on pose

$$\theta_1 = - SL_2$$

alors la 2^e^ équation (1.14) devient

$$B(\varphi_1-\theta_1) = 0. \tag{1.15}$$

Si donc l'on pose

$$\varphi_1 - \theta_1 = z \tag{1.16}$$

on a:

$$z \in \operatorname{Ker} B \tag{1.17}$$

et la 1^{re} équation (1.14) devient

$$Az + B^*\varphi_2 = L_1 - A\theta_1 = g_1 \in \phi_1'. \tag{1.18}$$

Mais A est un isomorphisme de Ker B $\to$ (Ker B)' et B* un isomorphisme de ϕ_2 sur $(\phi_1/\operatorname{Ker} B)'$.

Or $\phi_1' = (\operatorname{Ker} B)' \dotplus (\phi_1/\operatorname{Ker} B)'$; si

$g_1 = h_1 + k_1$ est la décomposition correspondante,

on a donc

$$g = A^{-1}h_1, \quad \varphi_2 = (B^*)^{-1}k_1, \tag{1.19}$$

les inverses étant pris sur (Ker B)' et $(\phi_1/\operatorname{Ker} B)'$. ■

1.3. Exemple.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et soit le problème de Dirichlet

$$-\Delta y = f \quad \text{dans} \quad \Omega, \quad y = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma = \partial\Omega. \tag{1.20}$$

On pose

$$y = \varphi_2, \quad \operatorname{grad} \varphi_2 = \varphi_1.$$

Alors (1.20) s'écrit:

$$\begin{cases} \varphi_1 - \operatorname{grad} \varphi_2 = 0, \\ \quad - \operatorname{div} \varphi_1 = +f. \end{cases} \tag{1.21}$$

On se place dans les conditions précédentes avec

$$\phi_1 = (L^2(\Omega))^n, \quad \phi_2 = H_0^1(\Omega),$$

$$A = \text{identité dans } \phi_1,$$

$$B = \operatorname{div} \in \mathcal{L}((L^2(\Omega))^n; H^{-1}(\Omega)).$$

Donc

$$B^* = - \operatorname{grad}$$

et si l'on prend

$$L_1 = 0, \quad L_2 = +f$$

alors (1.14) donne (1.21).

Reste à vérifier (1.4) (1.5); (1.4) est évident; (1.5) équivaut à (1.6) qui s'écrit

$$\|\text{grad } \psi_2\|_{(L^2(\Omega))^n} \geq c\|\psi_2\|_{H_0^1(\Omega)} \tag{1.22}$$

ce qui n'est autre que *l'inégalité de Poincaré*.

1.4. Le problème adjoint.

Il est essentiel pour la suite d'introduire *l'adjoint* du problème (1.9) (ou (1.14)).

On pose

$$\pi^*(\varphi,\psi) = a^*(\varphi_1,\psi_1) - b(\psi_1,\varphi_2) + b(\varphi_1,\psi_2) = \pi(\psi,\varphi), \tag{1.23}$$

l'équation adjointe étant alors

$$\pi^*(\varphi,\psi) = L(\psi). \tag{1.24}$$

Utilisant les opérateurs A et B cela équivaut à

$$\begin{cases} A^*\varphi_1 - B^*\varphi_2 = L_1, \\ B\varphi_1 = L_2. \end{cases} \tag{1.25}$$

Les hypothèses (1.4) (1.5) *sont invariantes par passage à l'adjoint.*

2. Problèmes de contrôle optimal.

2.1. Position du problème.

Les données sont celles du n° 1.1. On se donne en outre deux espaces de Hilbert:

$$\begin{cases} \mathcal{U} = \text{espace des contrôles}, \\ \mathcal{H} = \text{espace des observations} \end{cases} \tag{2.1}$$

et deux opérateurs K et C

$$K \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\phi'), \quad C \in \mathcal{L}(\phi;\mathcal{H}). \tag{2.2}$$

L'équation d'état est:

$$\pi(y(v),\psi) = \langle L+Kv,\psi \rangle, \quad \forall\ \psi \in \Phi. \tag{2.3}$$

D'après (1.12), (2.3) *admet une solution unique* $y(v)$ et, comme on le vérifie aisément

$$v \to y(v) \text{ est affine continue de } \mathcal{U} \to \phi. \ \blacksquare \tag{2.4}$$

Fonction coût:

$$\begin{cases} J(v) = \|C\ y(v)-z_d\|^2_{\mathcal{H}} + N\|v\|^2_{\mathcal{U}}, \\ z_d \text{ donné dans } \mathcal{H},\ N \text{ donné} > 0. \ \blacksquare \end{cases} \tag{2.5}$$

Le problème de contrôle est: si $\mathcal{U}_{ad}$ est un ensemble convexe fermé (non vide) de $\mathcal{U}$, on cherche

$$\inf J(v), \quad v \in \mathcal{U}_{ad}. \tag{2.6}$$

D'après (2.4) et comme $N > 0$, il est immédiat que

(2.7) *le problème* (2.6) *admet une solution unique.*

Soit donc u (= *contrôle optimal*) tel que

$$J(u) = \inf J(v), \quad v \in \mathcal{U}_{ad}. \tag{2.8}$$

Alors u est *caractérisé* par

$$\tfrac{1}{2}(J'(u),v-u) \geq 0, \quad \forall\ v \in \mathcal{U}_{ad}, \quad u \in \mathcal{U}_{ad}, \tag{2.9}$$

i.e. si l'on pose

$$y(u) = y, \tag{2.10}$$

la *condition d'optimalité:*

$$(Cy-z_d, C(y(v)-y))_{\mathcal{H}} + N(u,v-u)_{\mathcal{U}} \geq 0, \quad \forall\ v \in \mathcal{U}_{ad},\ u \in \mathcal{U}_{ad}. \tag{2.11}$$

On va simplifier (2.11) en introduisant *l'état adjoint.*

2.2. Système d'optimalité.

On introduit *l'état adjoint* p par

$$\pi^*(p,\psi) = (Cy-z_d, C\psi)_{\mathcal{H}}, \quad \forall\ \psi \in \phi. \tag{2.12}$$

Ce problème admet une solution unique (cf. 1.4).

Prenant dans (2.12) $\psi = y(v) - y$, il vient

$$(Cy-z_d, C(y(v)-y))_{\mathcal{H}} = \pi^*(p,y(v)-y) = \pi(y(v)-y,p) = \text{(par usage de (2.3))} = \langle K(v-u),p\rangle$$

et l'on *définit* K^* par

$$(K^*p,v)_{\mathcal{U}} = \langle Kv,p\rangle, \quad K^* \in \mathcal{L}(\phi;\mathcal{U}) \tag{2.13}$$

on voit donc que (2.11) s'écrit

$$(K^*p+Nu,v-u)_{\mathcal{U}} \geq 0, \quad \forall\, v \in \mathcal{U}_{ad}. \tag{2.14}$$

En résumé, *le système d'optimalité est donné par*

$$\begin{cases} \pi(y,\psi) = \langle L+Ku,\psi\rangle, & \forall\, \psi \in \phi, \\ \pi^*(p,\psi) = (Cy-z_d,C\psi), & \forall\, \psi \in \phi, \\ (K^*p+Nu,v-u)_{\mathcal{U}} \geq 0, & \forall\, v \in \mathcal{U}_{ad}, \quad u \in \mathcal{U}_{ad}. \end{cases} \tag{2.15}$$

2.3. <u>Exemple</u>.

On se place dans le cadre du n° 1.3. Donc

$$\phi_1 = (L^2(\Omega))^n, \quad \phi_2 = H_0^1(\Omega),$$

$$\pi(\varphi,\psi) = (\varphi_1,\psi_1)_1 + (\text{div}\,\psi_1,\varphi_2) - (\text{div}\,\varphi_1,\psi_2). \tag{2.16}$$

On prend

$$L_1 = 0, \quad L_2 = +f,$$

$$\mathcal{U} = L^2(\Omega),$$

$$Kv = \{0,+v\},$$

$$C\varphi = \varphi_2, \quad \mathcal{H} = L^2(\Omega).$$

L'équation d'état est alors:

$$\pi(y(v),\psi) = +(f+v,\psi_2) \tag{2.17}$$

et la *fonction coût* est

$$J(v) = \int_\Omega |y_2(v)-z_d|^2 dx + N \int_\Omega v^2 dx. \tag{2.18}$$

L'état adjoint est donné par

$$\pi^*(p,\psi) = (y_2-z_d,\psi_2) \tag{2.19}$$

et la condition d'optimalité devient

$$(p_2+Nu,v-u)_{L^2(\Omega)} \geq 0, \quad \forall\, v \in \mathcal{U}_{ad}. \tag{2.20}$$

Explicitant tout cela, le système d'optimalité s'écrit

$$\begin{cases} y_1 - \operatorname{grad} y_2 = 0, \\ \quad - \operatorname{div} y_1 = f + v, \\ p_1 + \operatorname{grad} p_2 = 0, \\ \quad \operatorname{div} p_1 = y_2 - z_d, \\ y_2, p_2 \in H_0^1(\Omega), \\ \int_\Omega (p_2+Nu)(v-u)\,dx \geq 0, \quad \forall\, v \in \mathcal{U}_{ad}, \quad u \in \mathcal{U}_{ad}. \end{cases} \tag{2.21}$$

Bibliographie.

M. BERCOVIER [1], Thèse, Université de Rouen. Mai 1976.

F. BREZZI [1], On the existence, uniqueness, and approximation of saddle point problems arising from Lagrange multipliers, R.A.I.R.O. (1974), 129-151.

Ph. CIARLET et P.A. RAVIART [1], Mixed finite element methods for the biharmonic equation, dans "Mathematical Aspects of Finite Elements in P.D.E.", Acad. Press, 1974, 125-145.

J.L. LIONS [1], Remarks on the Theory of Optimal Control of Distributed Systems, à paraître.

P.A. RAVIART et J.M. THOMAS [1], Mixed finite elements for 2^{nd} order elliptic problems, Conf. Rome, 1975.

IRIA-LABORIA
Domaine de Voluceau
Rocquencourt
78150 - Le Chesnay, France