Ann. Sc. Math. Québec, 1977, vol. I, No. 2, pp. 247-255

ESTIMATION OPTIMALE ET STRUCTURE DU FILTRE POUR LES SYSTEMES STOCHASTIQUES A RETARD

Raymond H. Kwong

SOMMAIRE

On étudie le filtrage linéaire et non-linéaire des systèmes stochastiques à retard. On énonce un théorème de représentation des fonctionnelles de moment conditionnel. On l'utilise ensuite pour obtenir les équations différentielles stochastiques qui caractérisent le filtre linéaire ou non-linéaire. Le filtre optimal linéaire est complètement caractérisé pour les systèmes linéaires avec bruits Gaussiens. Pour les retards dans la variable d'état, les propriétés de stabilité du filtre linéaire optimal et du système de commande stochastique en boucle fermée sont établies. On examine aussi la structure du système optimal du point de vue de la théorie linéaire-quadratique Gaussienne pour les systèmes stochastiques ordinaires. Pour plus de détails et les démonstrations de ces résultats, le lecteur peut consulter [1]-[3].

I INTRODUCTION

On étudie le problème de filtrage pour les systèmes stochastiques à retard de la forme

$$\left.\begin{aligned} dx(t) &= f(x_t,t)dt + F(t)dw(t), \quad t \in [0,T] \\ x(\theta) &= x_0(\theta), \quad \theta \in [-\tau,0]. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

L'équation d'observation est donnée par

$$\left.\begin{aligned} dz(t) &= h(x_t,t)dt + N(t)dv(t), \quad t \in [0,T] \\ z(t) &= 0, \quad t \le 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

La fonction x_t sur $[-\tau,0]$ est la transposée de la solution x; elle est définie comme suit:

$$x_t(\theta) = x(t+\theta), \quad \theta \in [-\tau,0].$$

Pour la discussion de l'existence et de l'unité des solutions de (1) et (2), voir [4],[5]. On suppose que f et h satisfont les mêmes hypothèses que celles données dans [5] et on suppose que $N(t)$ est non-singulière. On écrira par la suite $N(t)N'(t) = R(t)$.

L'estimé optimal de $x(t)$, qui minimise l'erreur au sens des moindres carrés, est donné par $E\{x(t)|z^t\}$, où $z^t = \{z(s): 0 \le s \le t\}$. Le problème de filtrage optimal consiste à trouver une caractérisation de $E\{x(t)|z^t\}$. Pour ce faire, on doit en fait caractériser les fonctionnelles de moment conditionnel $E\{\phi(x_t)|z^t\}$, où ϕ est une fonctionnelle appropriée définie sur la fonction x_t. On écrira $E^t[\phi(x_t)]$ pour $E\{\phi(x_t)|z^t\}$. On donnera une représentation abstraite des fonctionnelles de moment conditionnel dans la section suivante.

II UN THEOREME DE REPRESENTATION POUR LES FONCTIONNELLES DE MOMENT CONDITIONNEL

Théorème 1. Soit ϕ une fonctionnelle telle que $E|\phi(x_t)|^2 < \infty$ et $\int_0^T E|\phi(x_t)h(x_t,t)|^2 dt < \infty$. Alors nous avons la représentation suivante pour l'espérance conditionnelle de ϕ par rapport à z^t:

$$E^t[\phi(x_t)] = E[\phi(x_t)] + \int_0^t E^s\{E[\phi(x_t)|x_s][h^t(x_s,s)-E^s h(x_s,s)]\}R^{-1}(s)d\nu(s) \quad (3)$$

où

$$\nu(t) = z(t) - \int_0^t E^s[h(x_s,s)]ds$$

est l'innovation.

Corollaire 1. L'estimé lissé $E^t[x(t+\theta)]$, $-\tau \le \theta < 0$, est donné par

$$E^t[x(t+\theta)] = E^{t+\theta}[x(t+\theta)] + \int_{t+\theta}^{t} E^s\{x(t+\theta)[h'(x_s,s)-E^s h(x_s,s)]\}R^{-1}(s)d\nu(s). \quad (4)$$

Le théorème ci-dessus apporte une solution abstraite au problème de l'estimation optimale. En fait, l'estimé optimal $E^t[x(t)]$ peut être caractérisé en prenant $\phi(x_t) = x(t)$. Cependant, cette représentation est complètement non-récursive dans le sens qu'une connaissance de $E^t[\phi(x_t)]$ est inutilisable pour déterminer $E^{t+\Delta}[\phi(x_{t+\Delta})]$. Pour obtenir une solution récursive, on aurait besoin de construire une équation différentielle stochastique pour l'évolution de l'estimé optimal. Nous aborderons ce problème pour des systèmes à retard linéaires dans la section suivante.

III. LE FILTRAGE OPTIMAL DES SYSTEMES STOCHASTIQUES A RETARD

On considère maintenant des fonctionnelles f et h qui sont linéaires en x_t. De façon plus précise le système est gouverné par l'équation

$$\left.\begin{aligned} dx(t) &= \int_{-\tau}^{0} d_\theta A(t,\theta)x(t+\theta)dt + F(t)dw(t) \\ x(\theta) &= x_0(\theta), \quad \theta \in [-\tau,0], \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

où x_0 est un processus Gaussien sur $[-\tau,0]$ de moyenne $\bar{x}_0(\theta)$ et de covariance $\operatorname{cov}[x_0(\theta),x_0(\xi)] = \Sigma_0(\theta,\xi)$. L'observation est donnée par l'équation

$$dz(t) = \int_{-\tau}^{0} d_\theta C(t,\theta)x(t+\theta)dt + N(t)d\nu(t). \tag{6}$$

On suppose que les applications $A(t,\theta)$ et $C(t,\theta)$ satisfont les mêmes hypothèses que dans [6] pour les systèmes linéaires déterministiques à retard. On notera par $\hat{x}(t+\theta|t)$ l'estimé $E^t\{x(t+\theta)\}$, $\theta \in [-\tau,0]$. On définit la covariance de l'erreur conditionnelle lissée comme

$$P(t,\theta,\xi) = E^t\{[x(t+\theta)-\hat{x}(t+\theta|t)][x(t+\xi)-\hat{x}(t+\xi|t)]'\} \qquad -\tau \le \theta, \ \ \xi \le 0.$$

On peut maintenant appliquer le théorème de représentation pour obtenir une caractérisation complète du filtre linéaire optimal.

Théorème 2. Le filtre optimal pour le système (5)-(6) défini dans l'intervalle de temps $[0,T]$ est caractérisé comme suit:

(i) La moyenne conditionnelle $\hat{x}(t|t)$ est solution de

$$d\hat{x}(t|t) = \int_{-\tau}^{0} d_\theta A(t,\theta)\hat{x}(t+\theta|t)dt + \int_{-\tau}^{0} P(t,0,\theta)d_\theta C'(t,\theta)R^{-1}(t)d\nu(t) \tag{7}$$

où $\nu(t)$ est l'innovation donnée par

$$\nu(t) = z(t) - \int_0^t \int_{-\tau}^{0} d_\theta C(s,\theta)\hat{x}(s+\theta)ds.$$

(ii) L'estimé lissé $\hat{x}(t+\theta|t)$ est solution de

$$\hat{x}(t+\theta|t) = \hat{x}(t+\theta|t+\theta) + \int_{t+\theta}^{t} \int_{-\tau}^{0} P(s,t+\theta-s,\xi)d_\xi C'(s,\xi)R^{-1}(s)d\nu(s) \qquad -\tau\le\theta<0\,. \tag{8}$$

(iii) La covariance conditionnelle $P(t,\theta,\xi)$ est une quantité déterministe qui est caractérisée par le système d'équations couplées suivant:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}P(t,0,0) &= \int_{-\tau}^{0} P(t,0,\theta)d_\theta A'(t,\theta) + \int_{-\tau}^{0} d_\theta A(t,\theta)P(t,\theta,0) \\ &-\int_{-\tau}^{0}\int_{-\tau}^{0} P(t,0,\theta)d_\theta C'(t,\theta)R^{-1}(t)d_\xi C(t,\xi)P(t,\xi,0) + F(t)F'(t) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{2}P_\eta(t,\theta,0) &= \int_{-\tau}^{0}(t,\theta,\xi)d_\xi A'(t,\xi)\\ &-\int_{-\tau}^{0}\int_{-\tau}^{0}P(t,\theta,\xi)d_\xi C'(t,\xi)R^{-1}(t)d_\alpha C(t,\alpha)P(t,\alpha,0)\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

$$\sqrt{3}P_\sigma(t,\theta,\xi) = -\int_{-\tau}^{0}\int_{-\tau}^{0}P(t,\theta,\beta)d_\beta C'(t,\beta)R^{-1}(t)d_\alpha C(t,\alpha)P(t,\alpha,\xi), \quad (11)$$

où η est le vecteur unitaire dans la direction (1,-1,0), σ est le vecteur unitaire dans la direction (1,-1,-1) et $P_\eta(t,\theta,0)$ et $P_\sigma(t,\theta,\xi)$ sont les dérivées directionnelles de $P(t,\theta,0)$ et $P(t,\theta,\xi)$ dans les directions et η,σ respectivement. Les conditions initiales sont données par

$$\hat{x}(\theta|0) = \bar{x}_0(\theta), \quad \theta \in [-\tau,0]$$
$$P(0,\theta,\xi) = \Sigma_0(\theta,\xi), \quad -\tau\leq\theta, \quad \xi\leq 0.$$

Remarque 1. L'équation (7) montre que l'évolution de la moyenne conditionnelle dépend de l'estimé lissé $\hat{x}(t+\theta|t)$. Si l'on interprète ceci formellement comme le processus $E[x_t|z^t]$, on voit que nous avons besoin de la moyenne conditionnelle de l'état x_t au temps t afin de déterminer $\hat{x}(t|t)$. De façon analogue, on peut interpréter $P(t,\theta,\xi)$ comme la covariance de l'état x_t. Ainsi, alors que l'on est principalement intéressé au processus $\hat{x}(t|t)$ et à la covariance $P(t,0,0)$ de l'erreur associée, on a besoin de $\hat{x}(s,t)$ dans l'intervalle $t-\tau \leq s < t$ et de la fonction $P(t,\theta,\xi)$, $-\tau\leq\theta$, $\xi\leq 0$. Ceci contient tous les renseignements sur le filtre optimal.

Nous allons maintenant voir ce que donne le théorème 2 dans le cas particulier suivant:

$$\left.\begin{aligned}dx(t) &= Ax(t)+Bx(t-\tau)\ dt + Fdw(t)\\ x(\theta) &= 0, \quad \theta \in[-\tau,0]\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

$$dz(t) = Cx(t)dt + Ndv(t). \quad (13)$$

Le filtre optimal correspondant à (12)-(13) est alors donné par les équations

$$\left.\begin{aligned}d\hat{x}(t|t) &= A\hat{x}(t|t)dt + B\hat{x}(t-\tau|t)dt + P_0(t)C'R^{-1}[dz(t)-C\hat{x}(t|t)dt]\\ \hat{x}(\theta|0) &= 0, \quad -\tau\leq\theta\leq 0.\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

$$\hat{x}(t-\tau|t) = \hat{x}(t-\tau|t-\tau) + \int_{t-\tau}^{t} P_1(s,t-\tau-s)C'R^{-1}[dz(s)-C\hat{x}(s|s)ds], \qquad (15)$$

où $P_0(t)$ est égal à $P(t,0,0)$ et $P_1(t,\theta)$ à $P(t,\theta,0)$. Plus loin, on utilisera aussi la notation $P_2(t,\theta,\xi)$ pour $P(t,\theta,\xi)$. En combinant les deux équations précédentes, il vient

$$\begin{aligned} d\hat{x}(t|t) &= [A\hat{x}(t|t)\ B\hat{x}(t-\tau|t-\tau)]dt + P_0(t)C'R^{-1}[dz(t)-C\hat{x}(t|t)dt] \\ &\quad + \int_{t-\tau}^{t} BP_1(s,t-\tau-s)C'R^{-1}[dz(s)-C\hat{x}(s|s)ds]dt. \end{aligned} \qquad (16)$$

On voit donc que le filtre optimal est donné par une équation différentielle stochastique à retard où apparaissent les observations. Cette équation sera utilisée dans la section suivante.

IV STABILITE DES FILTRES LINEAIRES OPTIMAUX ET DES SYSTEMES DE COMMANDE STOCHASTIQUES

Afin de mieux comprendre les propriétés structurelles fondamentales du filtre optimal, nous allons en étudier les propriétés de stabilité. La démonstration des résultats est assez compliquées (cf.[2]-[3]), mais les idées principales sont faciles à énoncer et sont assez voisines de celles rencontrées pour la stabilité en dimension finie du filtre de Kalman pour les systèmes de la forme

$$dx_f(t) = Ax_f(t) + Fdw(t) \qquad (17)$$

$$dz_f(t) = Cx_f(t) + Ndv(t). \qquad (18)$$

On énonce d'abord les propriétés du filtre de Kalman correspondant au système (17)-(18), puis l'on indique les résultats pour le cas du retard en le comparant au cas de la dimension finie sans retard.

Propriétés de Kalman en dimension finie

(a) L'estimé optimal $\hat{x}_f(t:t)$ est donné par une équation différentielle stochastique ordinaire où apparaissent les observations.

(b) La covariance de l'erreur est une quantité déterministique, indépendante des observations, et elle est solution de l'équation différentielle matricielle de Riccati en horizon fini.

(c) Le problème d'estimation est le dual du problème de commande optimale avec coût quadratique pour les systèmes linéaires. Plus précisément, l'équation de Riccati associée au problème de commande optimale duale est identique à celle associée au problème de filtrage.

(d) La solution de l'équation de Riccati associée au problème de commande optimale tend asymptotiquement vers une matrice constante sous l'hypothèse de stabilisabilité, et si l'on ajoute l'hypothèse de détectabilité, la loi de retrocommande stationnaire nous donne un système en boucle fermée asymptotiquement stable. Par dualité, on peut montrer que la covariance de l'erreur du filtre tend asymptotiquement vers une matrice de covariance constante lorsque t tend vers l'infini et lorsque le couple (A,C) est détectable. Si, en plus, on fait l'hypothèse que (A,F) est stabilisable, on peut montrer que le filtre stationnaire est asymptotiquement stable.

(e) Finalement, la combinaison du filtre optimal stationnaire et de la loi de rétrocommande stationnaire (c.à.d., par le principe de séparation) donne un système de commande en boucle fermée qui est asymptotiquement stable.

En gros, tous les résultats ci-dessus se généralisent aux systèmes linéaires stochastiques à retard (12)-(13). Cependant, comme dans la Remarque 1, au lieu d'utiliser l'estimé $\hat{x}(t|t)$ et la covariance $P(t,0,0)$ de l'erreur du filtre, on a aussi besoin de l'estimé lissé $\hat{x}(t+\theta|t)$, $\theta \in [-\tau,0)$, et de la fonction de covariance de l'erreur lissée $P(t,\theta,\xi)$, $-\tau \leq \theta, \xi \leq 0$. De plus, les conditions de stabilisabilité et de détectabilité font appel à une rétro-commande sur x_t et z_t au lieu de simplement $x(t)$ et $y(t)$. Ceci est en accord avec le fait que x_t et non $x(t)$ est le vrai état du système au temps t. On indique maintenant les étapes nécessaires pour le cas du retard.

La propriété (a) est analogue. Nous avons déjà vu (cf. l'équation (16), que l'estimé optimal est donné par une équation différentielle stochastique à retard où apparaissent les observations. Si l'on considère $P_0(t)$, $P_1(t,\theta)$ et $P_2(t,\theta,\xi)$ comme constituant le noyau de l'opérateur de covariance $P(t)$ nous pouvons voir à partir du Théorème 2, que $P(t)$ est une quantité déterministe, indépendante des observations, et qu'elle satisfait une équation différentielle opérationnelle de Riccati sur un horizon fini (les composantes $P_0(t)$,$P_1(t,\theta)$ et $P_2(t,\theta,\xi)$ du noyau satisfont au système couplé d'équations différentielles ordinaire et aux dérivées partielles). Ceci est la contrepartie de la propriété (b).

Les analogues respectifs des propriétés (c) et (d) peuvent être obtenus comme suit. On définit le système dual de commande par

$$\left.\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -A'y(t) - B'y(t+\tau) - C'u(t) \\ y(T) &= b, \quad y(s) = 0 \quad s>T, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

avec la fonction coût

$$J_T(b,u) = \int_0^T [y'(t)FF'y(t)+u'(t)Ru(t)]dt. \tag{20}$$

Enfin l'estimé optimal donné par (14)-(15) est lié à la commande optimale u_T pour (19)-(20) par

$$b'\hat{x}(T|T) = -\int_0^T u_T(s)dz(s).$$

En utilisant cette relation, on peut relier les fonctions $P_0(t)$, $P_1(t,\theta)$ et $P_2(t,\theta,\xi)$ aux composantes $\tilde{K}_0(t)$, $\tilde{K}_1(t,\theta)$ et $\tilde{K}_2(t,\theta,\xi)$ du noyau de l'opérateur solution de l'équation de Riccati associée avec le problème de commande optimale (19)-(20). En fait

$$P_0(t) = \tilde{K}_0(t)$$

$$P_1'(t,\theta-\tau)B' = \tilde{K}_1(t,\theta)$$

$$BP_2(t,\theta-\tau,\xi-\tau)B' = \tilde{K}_2(t,\theta,\xi).$$

On peut alors montrer que sous l'hypothèse de stabilisabilité de (A',B',C') et de détectabilité de (A',B',F'), les fonctions $\tilde{K}_0(t),\tilde{K}_1(t,\theta)$ et $\tilde{K}_2(t,\theta,\xi)$ tendant vers $\tilde{K}_0$, $\tilde{K}_1(\theta)$ et $\tilde{K}_2(\theta,\xi)$, et le système de commande optimal stationnaire en boucle fermée est asymptotiquement stable. Par dualité, comme pour le cas de la dimension finie, on peut conclure que $P_0(t)$, $P_1'(t,\theta)B'$ et $BP_1(t,\theta,\xi)B'$ tendent aussi vers $P_0, P_1'(\theta)B'$ et $BP_2(\theta,\xi)B'$ sous l'hypothèse de détectabilité de (A,B,C). Si, de plus, on suppose la stabilisabilité de (A,B,F), on obtient que le filtre optimal stationnaire est asymptotiquement stable. Enfin la généralisation de la propriété (e) peut être facilement obtenue en suivant la démarche de la dimension finie sans retard. On résume ce qui précède sous la forme du théorème suivant.

Théorème 3. *(1)* Si (A,B,C) est détectable et (A,B,F) est stabilisable alors le filtre linéaire optimal stationnaire est déterminé par l'équation

$$d\hat{x}(t|t) = \{[A-P_0C'R^{-1}C]\hat{x}(t|t)+B\hat{x}(t-\tau|t-\tau)\}dt \tag{21}$$
$$-B\int_{-\tau}^{0} P_1(-\theta-\tau)C'R^{-1}C\hat{x}(t+\theta|t+\theta)d\theta dt + P_0C'R^{-1}dz(t) + \int_{t-\tau}^{t} P_1(t-\tau-s)C'R^{-1}dz(s)dt;$$

ce filtre est asymptotiquement stable.

(2) Soit le problème de commande stochastique pour le système

$$\left.\begin{aligned} dx(t) &= [Ax(t)+Bx(t-\tau)+Gu(t)]dt + Fdw(t) \\ x(\theta) &= x(\theta) \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

$$dz(t) = Cx(t)dt + Ndv(t) \tag{26}$$

avec la fonction coût

$$J = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} E\{\int_0^T [x'(t)H'Hx(t)+u'(t)Su(t)]dt\}.$$

On suppose que (A,B,G) et (A,B,F) sont stabilisables et que (A,B,C) et (A,B,H) sont détectables. Alors la loi de rétro-commande est donnée par

$$u(t) = -S^{-1}G.K_0\hat{x}(t|t) - S^{-1}G'\int_{-\tau}^{0} K_1(\theta)\hat{x}(t+\theta|t)d\theta,$$

où K_0 et $K_1(\theta)$ proviennent de la loi de commande optimale stationnaire, et, $\hat{x}(t+\theta|t)$, $-\tau \le \theta \le 0$, est généré par le filtre stationnaire (21). Le système en boucle fermée qui en résulte est asymptotiquement stable. □

On obtient une théorie "linéaire-quadratique-Gaussienne" complète pour les systèmes à retard. Ceci, combiné aux schémas numériques pour la résolution des équations du système optimal (7)-(8), nous donne donc une méthode complète pour la conception de cette très importante catégorie de systèmes.

REFERENCES

[1] KWONG,R.H. et WILLSKY,A.S.,Optimal filtering and filter stability of linear stochastic delay systems. IEEE Trans.Auto.Contr., Vol. AC-22, avril 1977, 196-201.

[2] KWONG,R.H. et WILLSKY,A.S., Estimation and filter stability of stochastic delay systems. Rapport CRM-613, Université de Montréal, avril 1976.

[3] KWONG,R.H., Structural properties and estimation of delay systems. Electr. Syst.Lab., M.I.T., Cambridge, Rapport ESL-R-614, septembre 1975.

[4] FLEMING,W.H. et NISIO,M., On the existence of optimal stochastic controls. J.Math.Mech., 15 (1966), 777-794.

[5] FUJISAKI,M., KALLIANPUR,G. et KUNITA,H., Stochastic differential equations for the nonlinear filtering problem. Osaka J.Math., 9 (1972), 19-70.

[6] HALE,J.K., *Functional Differential Equations*, Springer, New York, 1971.

[7] DELFOUR,M.C., The linear quadratic optimal control problem for hereditary differential systems: theory and numerical solution. J. Appl. Math. and Opt. 3 (1977), 101-162.

[8] DELFOUR,M.C., Filtering of linear stochastic hereditary differential systems: numerical solution. Proc. 14th Allerton Conference on Circuit and System Theory, University of Illinois (1976), 535-544.

Centre de Recherches Mathématiques
Université de Montréal
Montréal, Québec, Canada H3C 3J7

et

Department of Electrical Engineering
McGill University
3480 University Street
Montreal, Quebec, Canada H3A 2A7