

**SUR UNE METHODE QUASI-DIRECTE POUR L'OPERATEUR
BIHARMONIQUE ET SES APPLICATIONS A LA RESOLUTION
DES EQUATIONS DE NAVIER-STOKES**
R. Glowinski* et O. Pironneau**

Résumé

Le but de cet exposé est de montrer que par l'utilisation d'une approximation par élément fini mixte convenable, on peut ramener la résolution du problème de Dirichlet pour Δ^2 à celle d'un nombre fini de problèmes de Dirichlet pour $-\Delta$ et à la résolution d'un petit système linéaire de matrice symétrique défini positive. On montre aussi qu'on peut faire la même chose pour l'opérateur de Stokes. De nouveaux schémas implicites pour les équations de Navier Stokes sont donc obtenus.

1. PLAN

2. Introduction
3. Résolution numérique du problème de Dirichlet pour l'opérateur biharmonique par une méthode quasi-directe.
4. Quelques nouveaux schémas de résolution des équations de Navier-Stokes.

2. INTRODUCTION

Tant en différences finies qu'en éléments finis, la résolution numérique d'un problème de Dirichlet pour l'opérateur biharmonique est délicate. Il faut soit faire des éléments finis d'ordre 5 conformes, soit remplacer le problème par une suite de problèmes approchés dont la solution converge vers la solution du problème biharmonique⁽¹⁾. L'opérateur de Stokes présente les mêmes difficultés si on désire construire des schémas à divergence nulle. On se propose d'utiliser la linéarité des opérateurs précédents pour décomposer les problèmes en une suite de problèmes d'ordres inférieurs

* Paris VI

** IRIA

et bien conditionnés.

La méthode consiste à remplacer le problème

$$\Delta^2 \phi = f \quad \phi|_{\Gamma} = g_1 \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} |_{\Gamma} = g_2$$

par

$$\Delta \omega = f \quad \omega|_{\Gamma} = \lambda$$

et

$$\Delta \phi = \omega \quad \phi|_{\Gamma} = g_1$$

où λ est calculé tel que $\frac{\partial \phi}{\partial n} |_{\Gamma} = g_2$. On montre que λ peut être obtenu en résolvant un système linéaire bien conditionné.

3. RESOLUTION NUMERIQUE DU PROBLEME DE DIRICHLET POUR L'OPERATEUR BIHARMONIQUE PAR UNE METHODE QUASI-DIRECTE.

3.1. Le problème continu - Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 de frontière Γ régulière. Le problème de Dirichlet pour Δ^2 est défini par

$$(1) \quad \Delta^2 \phi = f \text{ sur } \Omega, \quad \phi = g_1 \text{ sur } \Gamma, \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = g_2 \text{ sur } \Gamma,$$

ce qui équivaut encore à trouver $\{\phi, \omega\}$ tels que :

$$(2) \quad -\Delta \omega = f \text{ sur } \Omega, \quad -\Delta \phi = \omega \text{ sur } \Omega, \quad \phi = g_1 \text{ sur } \Gamma, \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = g_2 \text{ sur } \Gamma.$$

On démontre que si $f \in L^2(\Omega)$, $g_1 \in H^{3/2}(\Gamma)$, $g_2 \in H^{1/2}(\Gamma)$, alors (1) admet une solution et une seule dans $H^2(\Omega)$.

3.2. Sur un isomorphisme entre $H^{-1/2}(\Gamma)$ et $H^{1/2}(\Gamma)$. - On a le :

THEOREME 1 - Soit $\lambda \in H^{-1/2}(\Gamma)$. Le problème

$$(3) \quad \Delta^2 \phi = 0, \quad -\Delta \phi = \lambda \text{ sur } \Gamma, \quad \phi = 0 \text{ sur } \Gamma$$

admet une solution et une seule dans $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et l'opérateur A défini par

$A\lambda = -\partial\phi/\partial n|_{\Gamma}$ est un isomorphisme de $H^{-1/2}(\Gamma)$ sur $H^{1/2}(\Gamma)$. En outre la forme bilinéaire $a(.,.)$, définie par $a(\lambda, \mu) = \langle A\lambda, \mu \rangle$, où $\langle ., . \rangle$ est la forme bilinéaire de la dualité entre $H^{1/2}(\Gamma)$ et $H^{-1/2}(\Gamma)$, est continue, symétrique et $H^{-1/2}(\Gamma)$ -elliptique, i.e. $\exists \alpha > 0$ tel que

$$a(\mu, \mu) \geq \alpha \|\mu\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 \quad \forall \mu \in H^{-1/2}(\Gamma).$$

Remarque 1. - Si $\Omega = \{x | x \in \mathbb{R}^2, x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ et si λ est suffisamment régulier, on a, $\forall x \in \Gamma$:

$$(A\lambda)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left[\left(1 - \frac{|y-x|^2}{2}\right) \log \frac{1}{|y-x|} + |y-x| \sqrt{1 - \frac{|y-x|^2}{4}} \operatorname{Arc} \cos \frac{|y-x|}{2} - \frac{1}{2} \right] \lambda(y) d\Gamma(y).$$

3.3. Réduction de (1) à une équation variationnelle dans $H^{-1/2}(\Gamma)$. Soit ω_o et ϕ_o les solutions respectives de

$$(4) \quad -\Delta \omega_o = f \text{ sur } \Omega, \quad \omega_o = 0 \text{ sur } \Gamma,$$

$$(5) \quad -\Delta \phi_o = \omega_o \text{ sur } \Omega, \quad \phi_o = g_1 \text{ sur } \Gamma,$$

on a alors le

THEOREME 2. - Soit ϕ la solution de (1). La trace λ de $-\Delta\phi$ sur Γ est la solution unique de l'équation variationnelle :

$$(6) \quad \langle A\lambda, \mu \rangle = \left\langle \frac{\partial \phi_o}{\partial n} - g_2, \mu \right\rangle, \quad \forall \mu \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad \lambda \in H^{-1/2}(\Gamma).$$

Remarque 2. - Pour déterminer $\partial\phi_o/\partial n$ il faut résoudre les deux problèmes de Dirichlet (4), (5), puis λ connu, il faut encore résoudre deux problèmes de Dirichlet pour déterminer $\{\phi, \omega\}$.

Remarque 3. - Compte tenu de la formule de Green on a, si μ est suffisamment régulier

$$\left\langle \frac{\partial \phi_o}{\partial n}, \mu \right\rangle = \int_{\Omega} \nabla \phi_o \cdot \nabla \tilde{\mu} dx - \int_{\Omega} \omega_o \tilde{\mu} dx,$$

où $\tilde{\mu}$ est un relèvement régulier de μ sur Ω .

3.4. Approximation de (1) par une méthode d'éléments finis mixtes. - On suit ⁽³⁾ (1) et ⁽⁴⁾ ; on suppose pour simplifier l'exposé que Ω est polygonal, \mathcal{T}_h étant une triangulation classique de Ω , on définit les espaces suivants - avec P_k = espace des polynômes à deux variables de $d^0 \leq k$ - :

$$V_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}), v_h|_T \in P_k, \forall T \in \mathcal{T}_h\},$$

$$V_{oh} = V_h \cap H_0^1(\Omega) = \{v_h \in V_h, v_h = 0 \text{ sur } \Gamma\},$$

$$(7) \quad W_h = \{(v_h, q_h) \in V_h \times V_h, v_h = g_{1h} \text{ sur } \Gamma\},$$

$$\int_{\Omega} \nabla v_h \cdot \nabla \mu_h dx = \int_{\Omega} q_h \mu_h dx + \int_{\Gamma} g_{2h} \mu_h d\Gamma, \quad \forall \mu_h \in V_h.$$

Dans (7), g_{1h} et g_{2h} sont des approximations de g_1, g_2 . On approche ensuite (1) par

$$(8) \quad \text{Min } j_h(v_h, q_h), \quad (v_h, q_h) \in W_h; \quad j_h(v_h, q_h) = \int_{\Omega} q_h^2 dx - 2 \int_{\Omega} f_h v_h dx.$$

Le problème (8) admet une solution unique $\{\phi_h, \omega_h\}$ et lorsque $h \rightarrow 0$, on démontre cf. ⁽³⁾, que si $(\mathcal{T}_h)_h$ est une famille régulière de triangulations et si $k \geq 2$, on a $\lim_{h \rightarrow 0} \{\phi_h, \omega_h\} = \{\phi, -\Delta \phi\}$ dans $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ fort.

Pour $k=1$, cf. ⁽⁴⁾ et ⁽⁵⁾. Dans ce qui suit, on désignera par \mathcal{M}_h un supplémentaire de V_{oh} dans V_h , i.e. $V_h = V_{oh} \oplus \mathcal{M}_h$, et $N_h = \dim(\mathcal{M}_h)$.

3.5. Réduction de (8) à un problème variationnel dans \mathcal{M}_h . - Soit $a_h: \mathcal{M}_h \times \mathcal{M}_h \rightarrow \mathbb{R}$. la forme bilinéaire définie à partir de $\lambda_h \in \mathcal{M}_h$ par

$$(9) \quad \int_{\Omega} \nabla \omega_h \cdot \nabla v_h dx = 0, \quad \forall v_h \in V_{oh}, \quad \omega_h - \lambda_h \in V_{oh},$$

$$(10) \quad \int_{\Omega} \nabla \phi_h \cdot \nabla v_h dx = \int_{\Omega} \omega_h v_h dx, \quad \forall v_h \in V_{oh}, \quad \phi_h \in V_{oh},$$

$$(11) \quad a_h(\lambda_h, \mu_h) = \int_{\Omega} \omega_h \mu_h dx - \int_{\Omega} \nabla \phi_h \cdot \nabla \mu_h dx, \quad \forall \mu_h \in \mathcal{M}_h.$$

LEMME 1. - La forme $a_h(.,.)$ est symétrique et définie positive sur $\mathcal{M}_h \times \mathcal{M}_h$. On en déduit le

THEOREME 3. - Soit $\{\phi_h, \omega_h\}$ la solution de (8) et λ_h la composante de ω_h dans

\mathcal{M}_h ; λ_h est l'unique solution du problème variationnel linéaire :

$$(12) \quad a_h(\lambda_h, \mu_h) = \int_{\Omega} \nabla \phi_{oh} \cdot \nabla \mu_h dx - \int_{\Omega} \omega_{oh} \mu_h dx - \int_{\Gamma} g_2 \mu_h d\Gamma, \quad \forall \mu_h \in \lambda_h, \lambda_h \in \mathcal{M}_h,$$

où ω_{oh} et ϕ_{oh} sont les solutions respectives de

$$(13) \quad \int_{\Omega} \nabla \omega_{oh} \cdot \nabla v_h dx = \int_{\Omega} f_h v_h dx, \quad \forall v_h \in V_{oh}, \omega_{oh} \in V_{oh}$$

$$(14) \quad \int_{\Omega} \nabla \phi_{oh} \cdot \nabla v_h dx = \int_{\Omega} \omega_{oh} v_h dx, \quad \forall v_h \in V_{oh}, \phi_{oh} \in V_h, \phi_{oh} = g_{1h} \text{ sur } \Gamma.$$

Remarque 4. - Le calcul du second membre de (12) nécessite la résolution des deux problèmes de Dirichlet approchés (13), (14). De même, λ_h étant connu, le calcul de ω_h et ϕ_h nécessite la résolution des deux problèmes de Dirichlet approchés :

$$(15) \quad \int_{\Omega} \nabla \omega_h \cdot \nabla v_h dx = \int_{\Omega} f_h v_h dx, \quad \forall v_h \in V_{oh}, \omega_h - \lambda_h \in V_{oh},$$

$$(16) \quad \int_{\Omega} \nabla \phi_h \cdot \nabla v_h dx = \int_{\Omega} \omega_h v_h dx, \quad \forall v_h \in V_{oh}, \phi_h = g_{1h} \text{ sur } \Gamma.$$

3.6. Construction du système linéaire équivalent à (12). - Soit $B_h = \{w_i\}_{i=1}^{N_h}$ une base de \mathcal{M}_h . On a

$$\lambda_h = \sum_{j=1}^{N_h} \lambda_j w_j ;$$

(12) équivaut au système linéaire :

$$(17) \quad \sum_{j=1}^{N_h} a_h(w_j, w_i) \lambda_j = \int_{\Omega} \nabla \phi_{oh} \cdot \nabla w_i dx - \int_{\Omega} \omega_{oh} w_i dx - \int_{\Gamma} g_2 w_i d\Gamma \quad 1 \leq i \leq N_h.$$

On notera $a_{ij} = a_h(w_j, w_i)$, b_i le second membre de (17) et A_h la matrice des a_{ij} ; A_h est symétrique et définie positive. Soit ω_j et ϕ_j les solutions de (9), (10), correspondant à $\lambda_h = w_j$. Compte tenu de (11) on peut construire la j -ième colonne de A_h moyennant la résolution des deux problèmes de Dirichlet approchés ci-dessus. A_h étant symétrique, on se limite au calcul des a_{ij} tels que $j \leq i \leq N_h$.

3.7. Choix de \mathcal{M}_h . - Le calcul de A_h et des b_i sera simplifié si on définit \mathcal{M}_h par [cf. (1)] \mathcal{M}_h : supplémentaire de V_{oh} dans V_h ,

$$v_h \in \mathcal{M}_h \implies v_h|_T = 0, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad T \cap \Gamma = \emptyset.$$

3.8. Résolution de (12). - A_h étant symétrique et définie positive, (12) peut être résolu par la méthode de Cholesky. En outre, la factorisation de Cholesky se faisant colonne par colonne, peut être effectuée au fur et à mesure du calcul des a_{ij} sans qu'il soit nécessaire de stocker A_h .

3.9. Récapitulation. - La résolution de (8) peut donc se ramener à la résolution de $2N_h + 4$ problèmes de Dirichlet approchés et à la résolution d'un système linéaire dont la matrice A_h , de type $N_h \times N_h$, est pleine, symétrique et définie positive. On peut donc appliquer la méthode de Cholesky.

Remarque 5. - Les $2N_h + 4$ problèmes de Dirichlet approchés peuvent également être résolus par une méthode de Cholesky dont la factorisation a été effectuée une fois pour toutes.

Pour la résolution itérative de (8), (12), se référer à (1), (4) et (6). Dans (6) on décrira en particulier l'application de la méthode du gradient conjugué.

3.10. Exemples numériques. - On a appliqué la méthode "quasi-directe" décrite dans (1) et l'algorithme (18)-(22) à la résolution de (1) lorsque $\Omega =]0,1[\times]0,1[$,

$$g_1 = g_2 = 0, \quad f = 3(x^2(1-x)^2 + y^2(1-y)^2) + (1-6x+6x^2)(1-6y+6y^2)$$

d'où

$$\psi = \frac{1}{8} x^2(1-x)^2 y^2(1-y)^2.$$

On a utilisé des éléments finis affines par morceaux sur une triangulation uniforme de 162 triangles, engendrée par des droites parallèles aux axes de coordonnées et à la deuxième bissectrice (ce qui équivaut à la discrétisation par le classique schéma à 13 points) d'où $N_h = 36$. La méthode de (1) conduit à une erreur sur w de l'ordre de 10^{-2} , le temps calcul correspondant étant de 4" sur IBM 370-168. Si on utilise 450 triangles, soit $N_h = 60$, la précision sur ω est de l'ordre de 3×10^{-3} et le temps calcul 26" sur IBM 370-168. L'utilisation du gradient conjugué conduit à des précisions comparables en 12 itérations, soit des temps de calculs respectifs de 3" et 12" sur IBM 370-168.

4. QUELQUES NOUVEAUX SCHEMAS DE RESOLUTION DES EQUATIONS DE NAVIER-STOKES

Soit $u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))$ la vitesse d'un fluide incompressible au point x , soit Ω , ouvert de R^3 , la région occupée par le fluide. En régime stationnaire u

et p , à une constante près, la pression, sont solutions des équations de Navier-Stokes :

$$(18) \quad \begin{cases} \nu \Delta^2 \mathbf{u} - \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} = \nabla p \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (\nabla \cdot \mathbf{u} = \text{div } \mathbf{u}) \end{cases}$$

dans Ω + conditions aux limites, par exemple ($\Gamma = \partial\Omega$)

$$(19) \quad \mathbf{u}|_{\Gamma} = \mathbf{z} ; \left(\int_{\Gamma} \mathbf{z} d\Gamma = 0 \right)$$

4.1. Ecoulements bidimensionnels. - Si l'écoulement reste parallèle à un plan, $u_3 = 0$ et, lorsque Ω est supplément connexe, (18)(19) est équivalent à

$$(20) \quad \nu \Delta^2 \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} \text{ dans } \Omega, \quad \psi|_{\Gamma} = \psi_0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma} = \vec{z} \cdot \vec{s}$$

où ψ , la fonction de courant, est reliée à \mathbf{u} par

$$(21) \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u_1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -u_2$$

La méthode exposée au §3 permet de construire un solveur rapide pour l'opérateur Δ^2 . On peut donc envisager d'approcher la solution de (20) par une suite $\{\psi_n\}_{n=1}^N$ construite par

$$(22) \quad \psi_{n+1} = \psi_n + w(\bar{\psi}_n - \psi_n)$$

où w est un paramètre de relaxation ($w > 0$) et $\bar{\psi}_n$ est la solution de

$$(23) \quad \nu \Delta^2 \bar{\psi}_n = \frac{\partial \psi_n}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi_n}{\partial y} - \frac{\partial \psi_n}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi_n}{\partial x}, \quad \bar{\psi}_n|_{\Gamma} = \psi_0, \quad \frac{\partial \bar{\psi}_n}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma} = \mathbf{z} \cdot \mathbf{s}$$

Comme la matrice A_n du §3 est factorisée une fois pour toute, chaque itération de (22)-(23) coûte la résolution de 4 problèmes de Dirichlet dont la matrice est factorisée.

La méthode a été testée sur le problème de la cavité dont la paroi supérieure est en translation à vitesse V . Pour un nombre de Reynolds $R = 100$, les temps de calcul (30" d'IBM 370-168 pour une discrétisation uniforme 16×16 et 9' pour une discrétisation 10×10) sont meilleurs que ceux des méthodes implicites utilisant des algorithmes du type Uzawa (cf.(²)) car la méthode converge rapidement ($N=2$ si $R < 10$, $N=15$ si $R=100$). Les résultats sont tracés sur les figures 1, 2, 3, 4.

4.2. Ecoulements tridimensionnels. - On peut généraliser la méthode en remarquant que (18) s'écrit

$$(24) \quad (\nabla \times)^4 \psi = \nabla \times (\nabla \times \psi \nabla (\nabla \times \psi)) \quad , \quad \psi \in (H^2(\Omega))^3 \quad (\nabla \times \psi = \text{rot } \psi)$$

On peut donc penser à décomposer (24) en deux équations

$$(\nabla \times)^2 \psi = w \quad , \quad (\nabla \times)^2 w = f$$

mais l'opérateur $(\nabla \times)^2$ n'est pas fortement elliptique on ne pourra donc pas factoriser sa matrice. Les méthodes numériques associées à cette idée risquent donc d'être coûteuses.

Considérons donc la méthode suivante : soit à résoudre

$$(25) \quad \begin{cases} \Delta u = \nabla p + f \\ \nabla \cdot u = 0 \text{ dans } \Omega, \quad u|_{\Gamma} = z \end{cases} ; \quad f \in L^2(\Omega), \quad z \in H^{1/2}(\Gamma), \quad \int_{\Gamma} z d\Gamma = 0$$

Soit $p_0 \in H^1(\Omega)$ la solution de

$$(26) \quad \Delta p_0 = -\nabla \cdot f \text{ dans } \Omega, \quad p_0|_{\Gamma} = 0$$

Soit $u_0 \in H^1(\Omega)$ la solution de

$$(27) \quad \Delta u_0 = \nabla p_0 + f \text{ dans } \Omega, \quad u_0|_{\Gamma} = z$$

Soit $\phi_0 \in H^2(\Omega)$ la solution de

$$(28) \quad \Delta \phi_0 = -\nabla \cdot u_0, \quad \phi_0|_{\Gamma} = 0$$

On définit maintenant un opérateur $A' : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{+1/2}(\Gamma)$ par

$$(29) \quad A' \lambda = \frac{\partial \phi}{\partial n} |_{\Gamma}$$

où ϕ est obtenu en résolvant les 5 problèmes de Dirichlet découplés :

$$(30) \quad \Delta p = 0, \quad p|_{\Gamma} = \lambda, \quad p \in L^2(\Omega)$$

$$(31) \quad \Delta u = \nabla p \quad u|_{\Gamma} = 0, \quad u \in H^1(\Omega)$$

$$(32) \quad \Delta \phi = \nabla \cdot u \quad \phi|_{\Gamma} = 0, \quad \phi \in H^2(\Omega)$$

THEOREME 3. - Soit \bar{u} la solution du problème (2.5). Alors $\bar{u} - u_0$ est aussi la solution de (30)-(31) où λ est la solution de l'équation variationnelle sur $H^{-1/2}(\Gamma)$

$$(33) \quad \min_{\lambda \in H^{-1/2}(\Gamma)} \left\{ \frac{1}{2} \langle A' \lambda, \lambda \rangle - \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi_0}{\partial n} \lambda d\Gamma \right\}$$

Démonstration : D'après (29) la solution de (33) est telle que

$$(34) \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \phi_0}{\partial n} \quad \text{dans } H^{1/2}(\Gamma)$$

D'après (26) (27) (28)

$$(35) \quad \Delta^2 \phi_0 = \nabla \cdot (\Delta u_0) = \Delta p_0 + \nabla \cdot f = 0$$

D'après (30)(31)(32)

$$(36) \quad \Delta^2 \phi = \nabla \cdot (\Delta u) = \Delta p = 0$$

Comme $\phi|_{\Gamma} = \phi_0|_{\Gamma} = 0$, (34)-(36) implique que $\phi \equiv \phi_0$ dans Ω .
Donc $\Delta \phi = \Delta \phi_0$, c'est-à-dire

$$(37) \quad \nabla \cdot (u + u_0) = 0$$

De (27) et (30) on déduit : $\Delta(u + u_0) = \nabla(p + p_0) + f$, $(u + u_0)|_{\Gamma} = z$

THEOREME 4. - L'opérateur A' est symétrique.

Démonstration : Soit (q, v, ψ) les solutions de (30) (31)(32) avec $\lambda = \mu$. De (31) mise sous forme variationnelle on déduit

$$I \triangleq \int_{\Omega} \nabla u_i \cdot \nabla v_i dx = \int_{\Omega} q \nabla \cdot u dx$$

De (32) on déduit

$$I = \int_{\Omega} q \Delta \phi dx = \int_{\Omega} \phi \Delta q dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial n} q d\Gamma$$

Donc d'après (30) et (29)

$$(38) \quad \langle A'\lambda, \mu \rangle = \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial n} q d\Gamma = \int_{\Omega} \nabla u_i \nabla v_i dx$$

A' est donc symétrique.

On démontrera la continuité et l'ellipticité comme dans (7), à condition de ne prendre que les fonctions de $H^{-1/2}(\Gamma)$ définies à une constante près.

Un nouveau schéma dans R^3

La méthode ci-dessus permet donc de construire un solveur rapide pour l'équation (25). La matrice de A' pouvant être calculée en résolvant $5N+5$ problème de Dirichlet, N étant le nombre de points frontières. On factorise la matrice de A' une fois pour toute par une méthode de Cholesky. On résoud alors (18) par

$$u_{n+1} = u_n + w(\bar{u}_n - u_n)$$

où (\bar{u}_n, \bar{p}_n) est la solution de

$$\begin{cases} \nu \Delta \bar{u}_n = \nabla \bar{p}_n + u_n \nabla u_n \\ \nabla \cdot \bar{u}_n = 0 \quad \bar{u}_n|_{\Gamma} = z \end{cases}$$

Chaque itération de cette méthode nécessite la résolution de 9 problèmes de Dirichlet dont la matrice est factorisée, (contre 3 pour les méthodes implicites de type Uzawa). Mais la condition $\nabla \cdot u = 0$ est toujours satisfaite.

On remarquera que dans le cas d'un écoulement externe (écoulement autour d'un corps dans un milieu infini) N peut être pris égal au nombre de points frontières internes car on connaît p sur la frontière "infinie".

Ces nouveaux schémas sont peut être plus coûteux que les méthodes d'Uzawa mais ils permettent de travailler avec des écoulements à divergence nulle sur des éléments finis conformes classiques (on choisira des éléments P_2 pour u et P_1 pour

p). D'autre part il n'y a qu'un seul paramètre de relaxation à ajuster.

Le méthode peut s'étendre aux cas compressibles.

REFERENCES

- (1) P.G. CIARLET et R. GLOWINSKI, Computer Methods in Appl. Mechanics Eng., 1975, p. 277-295.
- (2) F. THOMASSET, Rapport Laboria N° 150.
- (3) P.G. CIARLET et P.A. RAVIART, Mathematical Aspects of Finite Elements in Part. Diff. Equat., C. de Boor ed. Academic Press, 1974, p. 125-145.
- (4) R. GLOWINSKI, J.L. LIONS et R. TREMOLIERES, Analyse numérique des inéquations variationnelles, chap. 4, Dunod, Paris, (à paraître, 1976).
- (5) R. GLOWINSKI, Topics in Num. Analysis, J.J. Miller éd. Academic Press, 1973, p. 123-171.
- (6) R. GLOWINSKI et O. PIRONNEAU, Comptes rendus, 1976 (à paraître).
- (7) R. GLOWINSKI et O. PIRONNEAU, C.R.A.S., Série A, t. 282 (26 Janvier 1976).

R.G.
Université de Paris VI
U.E.R. 48
Laboratoire Analyse Numérique
Paris, France

O.P.
IRIA-LABORIA
Domaine de Voluceau
Rocquencourt
78150 Le Chesnay
France

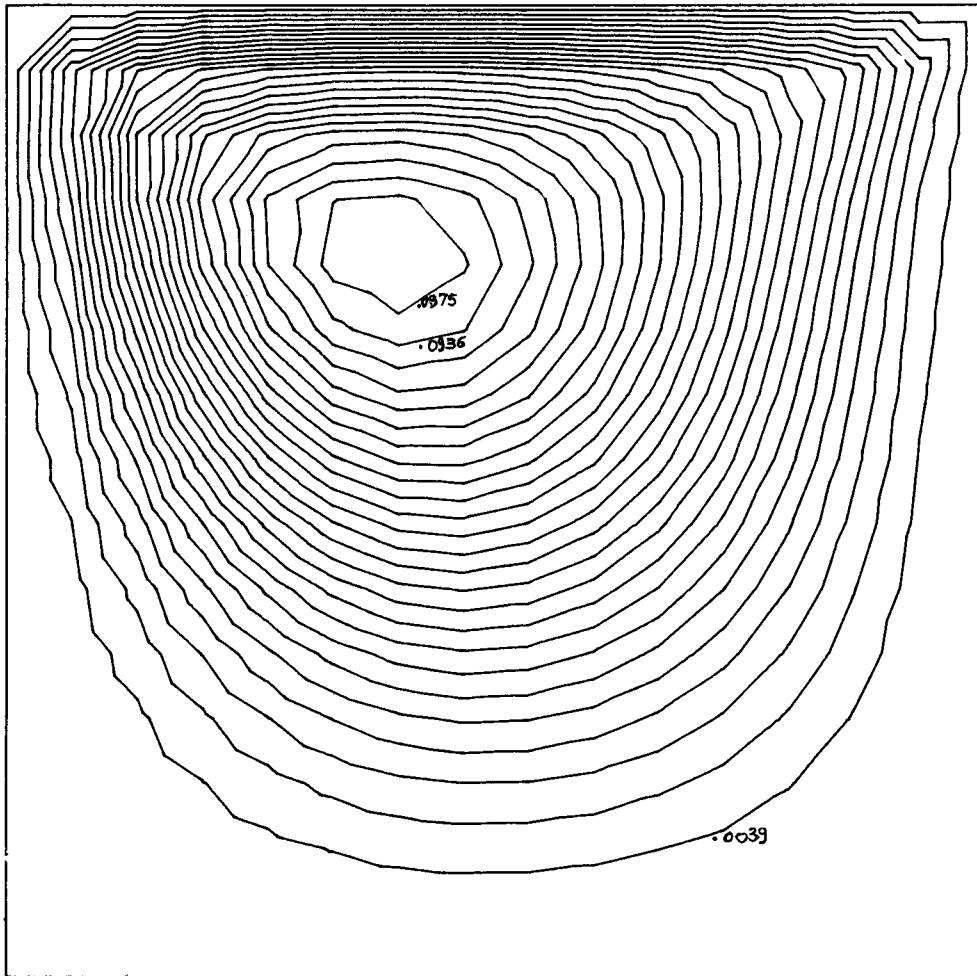


Figure 1 : Lignes de courant de l'écoulement dans une cavité carrée dont la paroi supérieure glisse vers la gauche à vitesse unité. Largeur du carré : 1. Viscosité cinématique $\nu = 1/100$. Grille de discrétisation uniforme 16×16 . (450 triangles). La convergence est obtenue en 15 itérations avec $w = 0.5$.

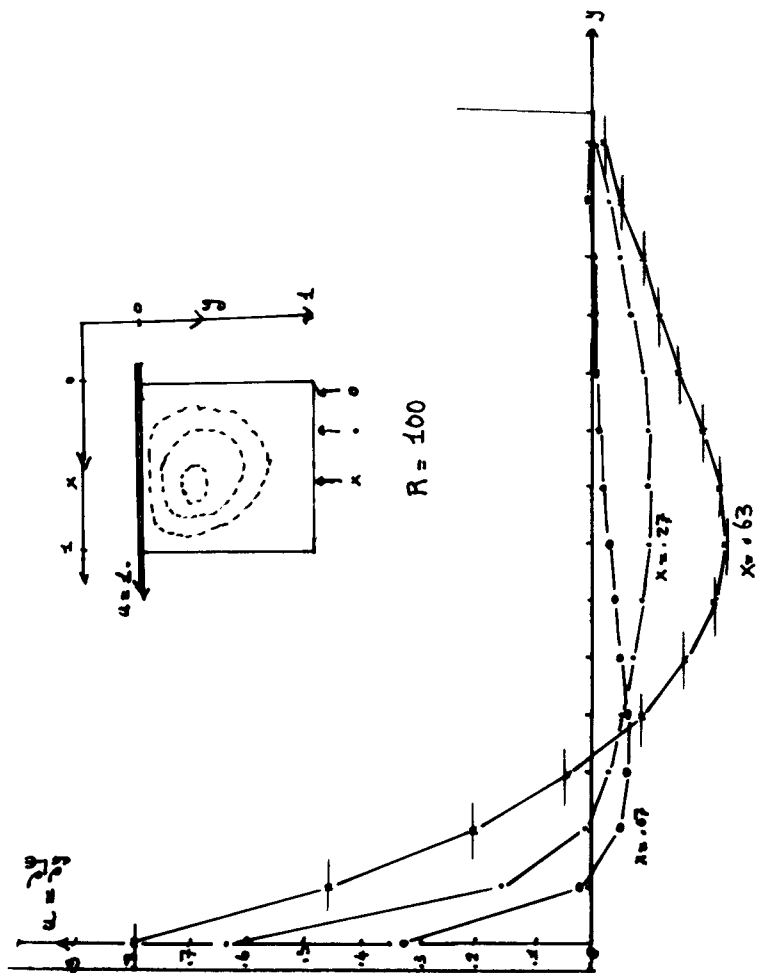


Fig. 2 - Profil des vitesses horizontales en 3 sections verticales de la cavité (les vitesses sont constantes par morceau mais les courbes ont été tracées pour faciliter la lecture).



Figure 3 - Ligne de Vorticité correspondant au cas de la figure 1.

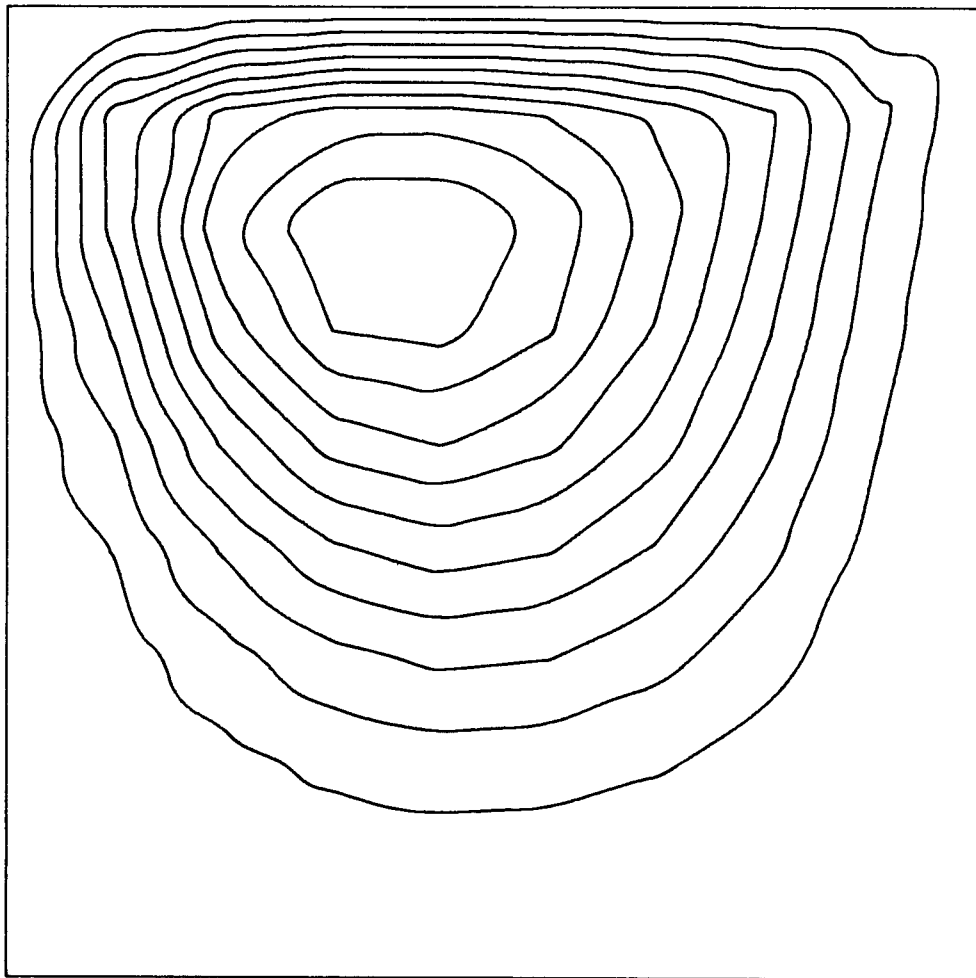


Figure 4 - Même calcul que pour la figure 1 mais avec une grille de discrétisation 10×10 (162 triangles). La convergence est obtenue en 9 itérations.

