Ann. Sc. Math. Québec, 1977, vol. I, No. 2, pp. 227-230

THEOREMES RECIPROQUES POUR L'APPROXIMATION POLYNOMIALE PAR MORCEAUX

Jacques Gélinas

Nous montrons que l'on peut obtenir pour l'approximation polynomiale par morceaux des théorèmes réciproques analogues à ceux de Bernstein, Jackson et Zygmund concernant l'approximation trigonométrique, donnant ainsi la solution d'un problème original posé par le professeur P.G. Ciarlet.

1. Théorie classique de l'approximation trigonométrique.

Si f est continue et de période 2π, son module de continuité est défini par

$$\omega(f,h) = \sup_{0<t<h} \sup_{x} |f(x+t)-f(x)|.$$

Jackson a montré en 1911 l'existence d'un polynôme trigonométrique T_n tel que, pour une constante numérique C,

$$\|f-T_n\|_{L^\infty} \leq C\ \omega(f;h).$$

Réciproquement, s'il existe un polynôme trigonométrique S_n tel que

$$\|f-S_n\|_{L^\infty} = 0\left(\frac{1}{n^\lambda}\right),$$

Bernstein a prouvé en 1912 que

i) $\omega(f;h) = 0(h^\lambda)$, $0 < \lambda < 1$

ii) f' existe et $\omega(f';h) = 0(h^{\lambda-1})$, $1 < \lambda < 2$.

Le cas $\lambda=1$ a été résolu par Zygmund en 1945:

$$\|f-S_n\|_{L^\infty} = 0(1/n) \Leftrightarrow \omega_2(f;h) = 0(h)$$

où

$$\omega_2(f;h) = \sup_{0<t<h} \sup_x |f(x+2t)-2f(x+t)+f(x)|.$$

Cette théorie est complète, chaque théorème ayant sa réciproque. On va obtenir le même type de résultats pour l'approximation polynomiale par morceaux (éléments finis).

2. Notations.

a) Espaces de Sobolev.

Si Ω est un ouvert borné de R^n et $1 \le p \le \infty$, on notera par $W_p^k(\Omega)$ l'espace de Sobolev muni de la norme usuelle $\|f\|_{k,p,\Omega}$. On désignera par $D^k f$ la dérivée de Fréchet de f et on utilisera (Ciarlet, Wagschal, 1971) la semi-norme

$$\|D^k f\|_{L^p} = (\int_\Omega \|D^k f(x)\|^p dx)^{1/p}.$$

b) Espaces de Lipschitz $\mathrm{Lip}(\lambda,k;p)$.

Définition: $f \in \mathrm{Lip}(\lambda,k;p) \Leftrightarrow f \in L^p(\Omega)$ et

$$\omega_k(f;h) = 0(h^\lambda),$$

où $\omega_k(f;h)$ désigne le k-ième module de régularité de f:

$$\omega_0(f;h) = \|f\|_{L^p},$$

$$\omega_1(f;h) = \sup_{0<|t|<h} (\int_{\Omega'} |f(x+t)-f(x)|^p dx)^{1/p}$$

avec

$$\Omega' = \{x \in \Omega |\text{ le segment } [x,x+t] \subseteq \Omega\}.$$

c) Lorsque $p > 1$, $W_p^k(\Omega) = \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Lip}(i,i;p)$.

d) Lorsque $p > 1$ et Ω est un ouvert Lipschitzien,

$$W_p^k(\Omega) = \mathrm{Lip}(k,k;p).$$

On peut aussi prouver dans ce cas des théorèmes de réduction (Butzer, Berens, 1967) comme par exemple:

$$\omega_2(f;h) = 0(h^{3/2}) \Rightarrow \omega_1(f;h) = 0(h^{1/2})$$

$$\omega_4(f;h) = 0(h^3) \Rightarrow \omega_2(Df;h) = 0(h).$$

e) Polynômes par morceaux.

Si Π est une partition de Ω en "éléments" K mesurables,

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{K\in\Pi} \bar{K},$$

on désignera par h sa norme i.e.

$$h = \sup_{K\in\Pi} \mathrm{diam}(K).$$

L'espace des fonctions approximantes sera

$$P_k(\Pi) = \{w \in L^\infty(\Omega) \mid w|_K \in P_k(R^n),\ K \in \Pi\}.$$

Aucune condition de continuité n'est imposée entre les éléments adjacents: $P_k(\Pi)$ contient à la fois les "éléments finis" conformes et non conformes. Finalement, si $f \in L^p(\Omega)$, on écrira pour l'erreur d'approximation par des polynômes par morceaux de degré k

$$\|f-P_k(\Pi)\|_{L^p} = \inf_{w\in P_k(\Pi)} \|f-w\|_{L^p}.$$

3. Théorèmes directs.

a) Si Ω est convexe et $f \in W_p^{k+1}(\Omega)$,

$$\|f-P_k(\Pi)\|_{L^p} \leq R \frac{h^{k+1}}{(k+1)!} \|D^{k+1}f\|_{L^p}$$

pour *toute* partition Π de norme h, avec

$$R = (2^n-1)^{1/p}2^{n/p}4^{k+1}.$$

Ce résultat, obtenu en utilisant une formule de type Taylor-Sobolev, se généralise au cas où l'ouvert Ω est Lipschitzien. Il faut alors remplacer R par une constante $C(\Omega)$.

b) Si $f \in L^p(\Omega)$ et Ω est Lipschitzien,

$$\|f-P_k(\Omega)\|_{L^p} \leq C_1(\Omega)\omega_{k+1}(f;h).$$

La démonstration utilise la technique de régularisation par produit de convolution avec des noyaux bien choisis (Gélinas, 1976).

4. Théorèmes réciproques.

Théorème 4.1. Si Ω est un ouvert borné de R^n, $1 \le p \le \infty$, $f \in L^p(\Omega)$ et pour toute partition de norme h

$$\|f-P_k(\Pi)\|_{L^p} = O(h^\lambda) \text{ où } \lambda > 0,$$

alors $f \in \mathrm{Lip}(\lambda,k+1;p)$.

Corollaire 4.2. Si $\lambda = k+1$ dans le théorème (4.1), alors $f \in W_p^{k+1}(\Omega)$ lorsque $p > 1$ et Ω est Lipschitzien.

a) Dans le Corollaire (4.2), on peut remplacer l'hypothèse Ω Lipschitzien par

$$\|f-P_i(\Pi)\|_{L^p} = O(h^{i+1}),\ 0 \le i \le k.$$

b) Il suffit en fait de connaître l'erreur d'approximation seulement pour les "triangulations régulières" de (Ciarlet, Raviart, 1972) ou même, lorsque $\Omega = (0,1)$, pour les partitions *uniformes*. On peut aussi remplacer $P_k(\Pi)$ par $Q_k(\Pi)$, espace obtenu par produit tensoriel de polynômes à une variable.

c) En résumé, on a obtenu une caractérisation des espaces de Sobolev:

$$f \in W_p^{k+1}(\Omega) \Leftrightarrow \|f-P_k(\Pi)\|_{L^p} = O(h^{k+1}).$$

De plus, si $\|f-P_k(\Pi)\|_{L^p} = o\ (h^{k+1})$, alors f doit être un polynôme de degré k sur tout l'ouvert Ω: ceci justifie le qualificatif d'optimal pour l'exposant k+1.

On condense les deux propriétés précédentes en disant avec le mathématicien français Favard que les espaces de Sobolev forment des classes de saturation pour l'approximation polynômiale par morceaux.

Département de Mathématiques
Université de Montréal
Montréal, Québec, Canada H3C 3J7