Ann. Sc. Math. Québec, 1977, vol. I, No. 2, pp. 195-209

UTILISATION D'UN THEOREME DE MELANGE POUR LE DECOUPLAGE GESTION COURT TERME, LONG TERME ET CONTROLE STOCHASTIQUE ET APPLICATION A LA GESTION DE RESERVOIRS

F. Delebecque et J.P. Quadrat

INTRODUCTION.

On se donne un problème de contrôle optimal stochastique dans lequel apparaît un coefficient evoluant de façon périodique en temps ou en espace. On se pose le problème de savoir vers quoi tend le coût lorsque la fréquence tend vers l'infini. Ces problèmes de mélanges ont été étudiés récemment par A. BENSOUSSAN - J.L. LIONS - G. PAPANICOLAOU [1] dans le cas difficile où le coefficient de mélange apparaît dans le terme de diffusion. Dans le problème qui nous intéresse ici le terme périodique apparaît dans le terme de dérive et dans la fonction coût, mais pas dans le terme de diffusion. Grâce à la méthode de monotonie LIONS [3] on donne un résultat de convergence sur l'équation de la programmation dynamique correspondante. Un corollaire intéressant est celui dans lequel le contrôle apparaît linéairement dans le terme de dérive. Le problème de contrôle optimal se découple alors en "une gestion court terme", et "une gestion long terme" utilisant comme critère le résultat de l'optimisation court terme. La motivation économique de ce problème a été la réduction de la dimension d'un problème de gestion de réservoirs. On montre alors sur cet exemple comment à partir de ce théorème de mélange on peut faire des approximations acceptables par les praticiens conduisant à une réduction considérable de la dimension du problème de contrôle stochastique à résoudre.

On suivra le plan suivant :

I) <u>Présentation des résultats et motivation (Un problème de gestion de réservoirs)</u>.

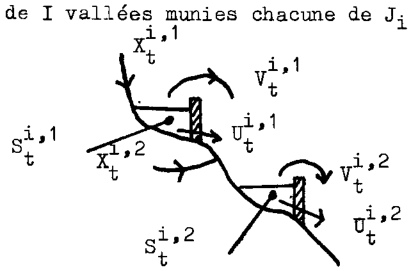
II) <u>Le théorème de Mélange</u>.

III) <u>Interprétation économique d'un cas particulier</u>.

I) <u>Présentation des résultats et motivation (Un problème de gestion de réservoirs)</u> (Modèle BRETON - FALGARONNE [5]).

On considère le problème suivant :

On dispose de I vallées munies chacune de J_i $i=1,\ldots I$ barrages



$x_t^{i,1}$ sont supposés être des diffusions indépendantes représentant les apports dans le lac de tête.

$x_t^{i,j}$ sont les apports intermédiaires, on les suppose déterminites ou fonctionnellement dépendants des apports dans le lac de tête

$S_t^{i,j}$ désignent les stocks d'eau dans les lacs

$u_t^{i,j}$ les débits turbinés

$v_t^{i,j}$ les débits déversés.

L'équation d'évolution des stocks s'écrit alors

$$dS_t^{i,j} = X_t^{i,j}+u_t^{i,j-1}+v_t^{i,j-1}-u_t^{i,j}-v_t^{i,j}$$

Chaque quantité turbinée produit de l'énergie on appelle

$$E^{i,j}(S_t^{i,j},u_t^{i,j})$$

la puissance fournie correspondante.

Si l'on désigne par D(t) la demande d'électricité à satisfaire, il faudra produire la puissance thermique

$$D(t) - \sum_{i,j} E^{i,j}(S_t^{i,j},u_t^{i,j})$$

pour satisfaire la demande.

On désigne alors par

$$C(D(t) - \sum_{i,j} E^{i,j}(S_t^{i,j},u_t^{i,j}))$$

le coût de la puissance thermique fournie. Et donc le problème de contrôle stochastique s'écrit :

$$\text{(1)} \qquad \underset{u,v}{\mathrm{Min}}\ E\int_0^T C(D(t)-\sum_{i,j} E\,(S_t^{i,j},u_t^{i,j}))dt$$

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} dx_t^{i,1} = b^i(t,x_t^{i,1})dt + \sigma^i(t,x_t^{i,1})dw_t^i \\ dS^{i,j} = X_t^{i,j} + u_t^{i,j-1} + v_t^{i,j-1} - u_t^{i,j} - v_t^{i,j} \\ X_t^{i,j} = \varphi^{i,j}(X_t^{i,1}) \end{cases}$$

Ce problème est de dimension grande (le nombre total de lac est environ 300). On est donc amené à essayer de réduire la dimension. On a déjà étudié DELEBECQUE - QUADRAT [2] comment on peut décomposer la gestion en vallées à condition de se restreindre à des feedbacks locaux (fonction seulement des aléas apparaissant dans la vallée à laquelle appartient le contrôle).

On va ici utiliser la structure particulière de la demande pour découpler la gestion en une gestion long terme et une gestion court terme.

En effet la demande $D(t)$ se décompose en $D^1(t) + D^2(t)$

$D^1(t)$ périodique de période un an

$D^2(t)$ périodique de période une semaine de et moyenne nulle.

Cette décomposition n'est pas unique mais on choisira celle qui maximise l'énergie spectrale de $D_2(t)$.

D_2 s'écrit donc en explicitant la périodicité de période une semaine $D_2(kt(1))$ avec ici $k=52$. $kt(1)$ veut dire kt modulo 1.

On se pose alors le problème suivant : que devient le problème de contrôle stochastique lorsque $k \to \infty$? Le problème limite est il plus maniable numériquement ?
La réponse est donnée par le corollaire du théorème de mélange objet des deux paragraphes suivants. Ce théorème de mélange définit, sur l'équation de la programmation dynamique correspondant au problème de contrôle stochastique (1) (2), le problème limite lorsque $k \to \infty$.

Dans notre cas le problème limite se décompose en deux problèmes :

- un problème de <u>contrôle optimal déterministe appelé problème court terme</u>.

$$\Psi(t,S,\bar{u}) = \underset{\tilde{u}(\theta)}{\mathrm{Min}} \int_0^1 C(D^1(t) + D^2(\theta) - \sum_{i,j} E^{ij}(S^{i,j},\bar{u}^{i,j}+\tilde{u}^{i,j}(\theta))d\theta$$

$$\int_0^1 \tilde{u}(\theta)d\theta = 0$$

- un problème de contrôle stochastique long terme

$$\begin{cases} dX_t^{i,1} = b^i(t,X_t^{i,1})dt + \sigma^i(t,X_t^{i,j})dw_t^i \\ dS_t^{i,j} = X_t^{i,j} + \bar{u}_t^{i,j-1} + \bar{v}_t^{i,j-1} - \bar{u}_t^{i,j} - \bar{v}_t^{i,j} \\ X_t^{i,j} = \varphi^{i,j}(X_t^{i,1}) \\ \underset{\bar{u},\bar{v}}{\mathrm{Min}} \; E\int_0^T \Psi(t,S,\bar{u}) \end{cases}$$

On fait alors deux approximations

- première approximation.

On distingue les lacs à grande capacité de stockage en tête de la vallée des lacs à faible capacité de stockage ; aux seconds on impose

$$X_t^{i,j}+\bar{u}_t^{i,j-1}+\bar{v}_t^{i,j-1}-\bar{u}_t^{i,j}-\bar{v}_t^{i,j} = 0$$

donc $$dS_t^{i,j} = 0 \quad j\neq 1$$

Ce qui s'interprète en disant : en moyenne sur une semaine les entrées des petits lacs doivent être égales à leurs sorties, ou bien on impose à la gestion d'être telle que le stock soit périodique de période une semaine. Ces dernières approximations n'ont pas de sens avant le passage à la limite à cause de la nature stochastique des $X_t^{i,j}$. Sur le problème limite elles prennent un sens précis. D'un point de vue pratique, elles sont acceptables par les ingénieurs.

- deuxième approximation.

On linéarise les $E^{i,j}(S^{i,j},u^{i,j})$ autour de $\bar{u}^{i,j}$ (la valeur moyenne du contrôle.

Le problème court terme s'écrit alors

$$\underset{\tilde{u}}{\mathrm{Min}} \int_0^1 C(D^1(t) + D^2(\theta) - \sum_{i,j} E^{i,j}(S^{i,j},\bar{u}^{i,j}) - \sum_{i,j} \frac{\partial E^{i,j}}{\partial u}(S^{i,j},\bar{u}^{i,j})\, \tilde{u}^{i,j}(\theta))d\theta$$

$$\int_0^1 \tilde{u}(\theta)d\theta = 0$$

On utilise alors la convexité de

$$C, \text{ et le fait } \int_0^1 D^2(\theta)d\theta = 0$$

On obtient alors qu'à l'optimum

$$D^2(\theta) - \sum \frac{\partial E^{i,j}}{\partial u}(S^{i,j},\bar{u}^{i,j})\ \tilde{u}^{i,j} = 0 \tag{3}$$

et donc grâce à cette approximation le critère long terme s'écrit

$$E\int_0^T C(D^1(t) - \sum_{i,j} E^{i,j}(S^{i,j},\bar{u}^{i,j}))dt$$

Cette structure du coût du problème long terme est essentielle au découplage en espace DELEBECQUE - QUADRAT [2].

Et donc l'utilisation de ces deux approximations <u>nous amène à résoudre le problème long terme suivant</u> :

$$(4)\quad \begin{cases} dx^{i,1} = b^i(t,x_t^{i,1})dt + \sigma(t,x_1^i)dw_t^i \\ \dfrac{dS_t^{i,1}}{dt} = x_t^{i,1} - \bar{u}_t^{i,1} - \bar{v}_t^{i,1} \\ x_t^{i,j} + \bar{u}_t^{i,j-1} + \bar{v}_t^{i,j-1} - \bar{u}_t^{i,j} - \bar{v}_t^{i,j} = 0 \qquad j \neq 1 \\ x_t^{i,j} = \varphi(x_t^{i,1}) \\ \underset{\bar{u},\,\bar{v}}{\operatorname{Min}}\ E\int_0^T C(D^1(t) - \sum_{i,j} E^{i,j}(S_t^{i,j},\bar{u}_t^{i,j})) \end{cases}$$

Problème que l'on <u>sait résoudre numériquement</u> à condition de se restreindre à des feedbacks locaux.

<u>La gestion court terme doit satisfaire la condition (3).</u>

En conclusion les approximations suivantes permettent de résoudre numériquement le problème de gestion de réservoirs :

1) indépendance de la loi des apports dans les lacs de tête
2) restriction à la recherche de feedbacks locaux
3) faire tendre vers 0 la petite période de la demande
4) imposer à la gestion des petits lacs une périodicité de période une semaine

5) linéariser l'énergie produite à un lac autour de la valeur moyenne du

feedback optimal pendant la semaine.

Le problème de mélange permet de donner un sens précis aux approximations 3), 4) et 5). L'approximation 4) permet une réduction considérable de la dimension du problème à résoudre (de 300 à 20 environ).

II) Mélange d'un problème de contrôle d'une diffusion stochastique.

II-1. Le problème de contrôle.

Soit W_t un processus de Wiener sur (Ω, F_t, F, P), y_t^x la diffusion stochastique sur R^n définie par

$$(1) \qquad \begin{aligned} dy_t^x &= b(t, y_t^x, \theta^k(t, y_t^x)\ ,\ u(t, y_t^x))dt + \sigma(t, y_t^x)dw_t \\ y^x(o) &= x \end{aligned}$$

avec : $U : R^n \to \mathcal{P}(R^m)$

multiapplication continue à valeurs fermées dans un compact fixe $\mathcal{U}$

$$u : R^n \to \mathcal{U} \quad \text{avec} \quad u \in \mathcal{U}_{ad}$$

où $$\mathcal{U}_{ad} = \{u : R^n \to \mathcal{U} \text{ borélienne vérifiant } u(x) \in U(x)\}$$

$$b : R^+ \times R^n \times T^{n+1} \times \mathcal{U} \to R^n \quad \text{continue bornée}$$

T^n désigne le tore de dimension n

$$\theta_k : \begin{matrix} R^+ \times R^n & \to & T^{n+1} \\ (t,x) & & (kt, kx) \end{matrix}$$

$$\sigma : R^+ \times R^n \to \mathcal{L}(R^n, R^n) \qquad C^1$$

On se donne un ouvert $\mathcal{O}$ de frontière $\partial\mathcal{O}$

τ_x le temps de sortie de $\mathcal{O}$ de la diffusion y_t^x.

Une fonction coût

$$\varphi : R^+ \times R^n \times T^{n+1} \times \mathcal{U} \to R^+ \quad \text{continue bornée}$$

soit alors le problème de contrôle optimal

$$(2) \qquad V^k(x,t) = \underset{u \in \mathcal{U}_{ad}}{Min} \ E^{x,t} \int_o^{\tau_x} \varphi(t, y_t^x, \theta^k(t, y_t^x),\ u(t, y_t^x))dt$$

On se pose le problème suivant vers quoi tend le problème de contrôle stochastique (1)(2) (coût V^k, et contrôle optimal) lorsque $k \to \infty$.

II-2. <u>L'équation de la programmation dynamique</u>.

L'équation de la programmation dynamique associée à (1)(2) s'écrit

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial V^k}{\partial t} + AV^k + \min\limits_u \{\sum\limits_{i=1}^n b_i(t,x,\theta^k(t,x),u)\, \dfrac{\partial V^k}{\partial x_i} \\ \qquad + \varphi(t,x,\theta^k(t,x),u)\} = 0 \\ V^k\Big|_\Sigma = 0 \qquad\qquad \text{dans } Q = \mathcal{O}\times[0,T[\\ \qquad\qquad\qquad\qquad \Sigma = \partial\mathcal{O}\times[0,T[\\ V(T) = 0 \end{cases}$$

$$(4)\qquad \text{avec } AV^k = \sum_{i,j} a_{ij}\, \frac{\partial^2 V^k}{\partial x_i \partial x_j}$$

Faisons les notations suivantes :

$$\Pi(t,x,\theta,p) = \min_u\{\sum_i b_i(t,x,\theta,u)p_i + \varphi(t,x,\theta,u)\}$$

on notera encore

$$\Pi : \underset{z}{L^2(Q,R^n)} \times \underset{\theta}{L^2(Q;T^{n+1})} \to L^2(Q)$$

$$(t,x) \to \Pi(t,x,\theta(t,x),z(t,x))$$

$$\Pi : \underset{z}{L^2(Q;R^n)} \to L^2(Q\times T^{n+1})$$

$$(t,x,\theta) \to \Pi(t,x,\theta,z(t,x)))$$

On note

$$a_t^\lambda(V,\varphi) = -\int_{\mathcal{O}} \sum_{i,j} a_{ij}(t,x)\, \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\, \varphi\, dx + \int_{\mathcal{O}} \lambda\, V\varphi\, dx$$

On suppose $\exists\ \lambda$ et α indépendant de t :

$$(5)\qquad a_t^\lambda(V,V) \geq \alpha\|V\|^2 \qquad (\|\ \ \| \text{ norme dans } H_o^1(\mathcal{O}))$$

d'autre part on a le

<u>Lemme 1</u>.

<u>$\Pi(t,x,\theta,p)$ est continue lipschitz en p uniformément.</u>

<u>Corollaire</u>.

<u>$\Pi(z)$ est opérateur lipschitzien de $L^2(Q;R^n) \to L^2(Q\times T^{n+1})$</u> .

<u>Démonstration</u> :

$$\Pi(t,x,\theta,p^1) - \Pi(t,x,\theta,p^2) = b(t,x,\theta,u_1).p_1 + \varphi(t,x,\theta,u_1) - [b(t,x,\theta,u_2)p_2$$
$$+ \varphi(t,x,\theta,u_2)] \leq b(t,x,\theta,u_2)(p_1-p_2)$$

de même

$$\Pi(t,x,\theta,p^1) - \Pi(t,x,\theta,p_2) \geq b(t,x,\theta,u_1)(p_1-p_2)$$

comme b est borné le résultat en découle

En faisant le changement de variable $V_k = e^{-\lambda t} y_k$ on est donc ramené au problème suivant :

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial y^k}{\partial t} + Ay^k - \lambda y^k + \Pi(\theta^k, Dy^k) = 0 \\ y_k\big|_\Sigma = 0 \\ y_k(T) = 0 \end{cases}$$

avec Π^k lipschitzien

$A_t - \lambda I$ coercif continu dans $H^1(\mathcal{O})$ uniformément en t.

On a alors le

<u>Théorème 1</u>.

<u>(6) admet une solution unique dans $W(0,T)^*$ $\forall$ k</u>

<u>Démonstration</u>.

méthode de monotonie LIONS [2].

<u>Corollaire</u>.

<u>La suite $\{y^k\}$ reste dans une borne de $H^{1,2}(Q)$.</u>**

<u>Démonstration</u>.

Montrons que $\{y_k\}$ reste dans un borné de $L^2(0,T;V)$*** en effet multiplions (6) y_k et intégrons par partie on obtient :

$$-|y^k|_H^2(t) - \int_t^T a_t^\lambda(y^k, y^k) + \int_t^T (\Pi(\theta_k, Dy), y^k) = 0$$

or

$$|\Pi(\theta^k, Dy^k)|_H \leq M(1 + |y^k|_V) \quad \text{M indépendant de k}$$

---

* $W(0,T) = \{y : y \in L^2(0,T;H_0^1(\mathcal{O})) \ \ \frac{dy}{dt} \in L^2(0,T;H_0^{1'}(\mathcal{O}))$

** $H^{1,2}(Q) = \{y : y, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(Q)\}$

*** $V = H_0^1(\mathcal{O})$ $H = L^2(\mathcal{O})$

et donc

$$(\Pi(\theta^k,Dy^k),y^k) \leq M(1 + |y^k|_V)|y|_H \leq \frac{M}{2}|y|_H^2 + \frac{M}{2} + \frac{M\varepsilon}{2}|y|_V^2 + \frac{M}{2\varepsilon}|y|_H^2$$

=> $\exists\ M^1,\ \alpha > 0$:

$$|z^k|_H^2(t) + \int_t^T \alpha|y^k|_V^2 \leq \int_t^T M'|y|_H^2(t) + M'$$

donc y^k est borné dans $L^\infty(0,T,H)$ donc dans $L^2(0,T,V)$ et la borne ne dépend pas de k..
donc $\Pi(\theta^k,Dy^k)$ reste dans un borné de $L^2(Q)$ indépendant de k ;
donc LIONS - MAGENES [4] $\{y^k\}$ reste dans un borné de $H^{1,2}(Q)$ cqfd.

■

Notons

$$\bar{\Pi} : L^2(Q;R^n) \to L^2(Q)$$
$$z \qquad (t,x) \to \bar{\Pi}(t,x) = \int_{T^{n+1}} \Pi(t,x,\theta,z(t,x))d\theta$$

$\bar{\Pi}$ est encore un opérateur lipschitzien de

$$L^2(Q;R^n) \to L^2(Q)$$

on a alors

<u>Théorème 2.</u>

$$(7) \qquad \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \lambda y + Ay + \bar{\Pi}(Dy) = 0 \\ y\big|_\Sigma = 0 \\ y(T) = 0 \end{cases}$$

<u>admet une solution unique dans $H^{1,2}(Q)$.</u>

<u>Démonstration</u> :

La méthode de monotonie LIONS [3] => (7) admet une solution unique dans W(0,T)

=> $\bar{\Pi}(Dy) \in L^2(Q)$ => LIONS - MAGENES [4] $y \in H^{1,2}(Q)$.

II-3. <u>Un théorème de convergence de (6) vers (7).</u>

Commençons par donner quelques notations et faire quelques rappels.

Notons

$$Q_i = \{(t,x)\ \frac{i_0}{k} \leq t \leq \frac{i_0+1}{k}\ ,\ \ \frac{i_l}{k} < x_l \leq \frac{i_{l+1}}{k} \quad l = 1,\dots,n$$

avec $i = \{i_0, i_1, \dots i_n\}$

$$\varphi_i(t,x) = \begin{cases} (\frac{1}{k})^{n+1} & \text{sur } Q_i \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$r_k : C^o(Q \times T^{n+1}) \cap L^2(Q \times T^{n+1}) \to L^2(Q \times T^{n+1})$$
$$z \qquad r_k z(\theta) = \sum_i (z(\theta),\varphi_k^i)\varphi_k^i$$

on a alors la relation

$$|r_k z - z| \leq \frac{M}{k} \sup_\theta |z(\theta)|_{H^1(Q)}$$

$$\lim_{k\to 0} |r_k z - z| = 0 \quad \forall z \in L^2(Q) \qquad \text{cf. par ex. AUBIN [1]}$$

Notons

$$\Pi^k : Q \times T^{n+1} \times R^n \to R$$
$$(t,x,\theta,p) \qquad \Pi^k(t,x,\theta,p) = \sum_i (\Pi(.,.,\theta,p),\varphi_i)\varphi_i$$

on fera encore les mêmes conventions pour définir les opérateurs $\Pi^k(z)$ et $\Pi^k(z,\theta)$, $\bar{\Pi}^k(z)$, $\bar{\Pi}^k(t,x,p)$.

On a alors le

<u>Lemme 2.</u>

<u>$\forall$ z dans $L^2(Q,R^n)$</u> $\exists M_1$ <u>indépendante z et k et</u> M_2 <u>indépendante de k</u> :

$$\int_0^T (\Pi(z,\theta_k) - \bar{\Pi}(z),v) \leq M_1 |v|_{L^2(Q)} (|z-r_k z|_{L^2(Q)} + \omega_{\frac{1}{k}}(\Pi)) + M_2 |v-r_k v|_{L^2(Q)}$$

<u>Démonstration.</u>

$$\langle \Pi(z,\theta_k) - \bar{\Pi}(z),v \rangle^* = \langle (\Pi(z,\theta_k) - \Pi(r_k z,\theta_k)) - (\bar{\Pi}(z) - \bar{\Pi}(r_k z)),v \rangle$$
$$+ \langle (\Pi(r_k z,\theta_k) - \Pi^k(r_k z,\theta_k)) - (\bar{\Pi}(r_k z) - \bar{\Pi}^k(r_k z)),v \rangle$$
$$+ \langle \Pi^k(r_k z,\theta_k) - \bar{\Pi}^k(r_k z) \, , \, v - r_k v \rangle$$
$$+ \langle \Pi^k(r_k z,\theta_k) - \bar{\Pi}^k(r_k z) \, , \, r_k v \rangle$$

* $\langle \quad \rangle$ produit scalaire dans $L^2(Q)$

En utilisant la périodicité en θ de Π il vient

a) $< \Pi^k(r_k z,\theta_k) - \bar{\Pi}^k(r_k z),\ r_k v > = 0$

b) $< \Pi^k(r_k z,\theta_k) - \bar{\Pi}^k(r_k z),\ v-r_k v > \leq |\Pi^k(r_k z,\theta_k) - \bar{\Pi}^k(r_k z)||v - r_k v|$

$\leq M|v-r_k v|$ dès que z est dans $L^2(Q,R^n)$

c) $<(\Pi(r_k z,\theta_k) - \Pi^k(r_k z,\theta_k)) - (\bar{\Pi}(r_k z) - \bar{\Pi}^k(r_k z)),\ v >$

$\leq < 2\omega_{\frac{1}{k}}(\Pi),|v| > \ \leq\ M\omega_{\frac{1}{k}}(\Pi)\ |v|_{L^2(Q)}$

où $\omega_{\frac{1}{k}}(\Pi)$ désigne le module de continuité de $\Pi(t,x,\theta,p)$

d) $< \Pi(z,\theta_k) - \Pi(r_k z,\theta_k) - (\bar{\Pi}(z) - \bar{\Pi}(r_k z)),v > \leq M <|z-r_k z|,v >$

$\leq\ M|v|\ |z-r_k z|$ en utilisant la propriété dc lipschitz en

p de $\Pi(t,x,\theta,p)$ cqfd.

■

<u>Théorème fondamental</u>:

<u>Soit y^k solution de (6)</u>

<u>y solution de (7)</u>

<u>alors $y^k \to y$ dans $L^2(0,T;V)$</u>

<u>On a de plus la majoration d'erreur lorsque y est $C^{1,0}(Q)$ suivante</u> :

<u>$\exists$ M indépendant de k</u> :

$$\underline{|y_k-y|_{L^2(0,T;V)} \ \leq\ M(\omega_{\frac{1}{k}}(\Pi) + \sqrt{\tfrac{1}{k}} + \omega_{\frac{1}{k}}(Dy))}$$

<u>Démonstration</u>.

Notons

$$\bar{C}(y,\varphi) = \int_0^T (\frac{\partial y}{\partial t} + A_t y - \lambda y + \bar{\Pi}(Dy),v)$$

$$C_k(y,\varphi) = \int_0^T (\frac{\partial y}{\partial t} + A_t y - \lambda y + \Pi(\theta^k,Dy),v)\ .$$

On a $\exists\ \alpha$ indépendant de k :

(8) $$C_k(v,v-y) - C_k(y,v-y) \geq \alpha|v-y|^2_{L^2(0,T;V)}$$

d'autre part si y [resp y^k] désigne la solution de (7) [resp (6)]

(9) $$C_k(y_k,y-y_k) = 0$$

(10) $$C(y,y-y_k) = 0$$

(8) =>

(11) $$C_k(y_k,y_k-y) - C_k(y,y_k-y) \geq \alpha|y-y_k|^2_{L^2(0,T;V)}$$

(11)-(10)+(9) =>

(12) $$C(y,y_k-y) - C_k(y,y_k-y) \geq \alpha|y-y_k|^2_{L^2(0,T;V)}$$

(12) se réécrit

(13) $$\int_0^T (\Pi(q_k,Dy),y_k-y) - (\overline{\Pi}(Dy),y_k-y) \geq \alpha|y-y_k|^2_{L^2(0,T;V)}$$

(13) et le lemme (2) =>

(14) $$M_1|y_k-y|_{L^2(Q)}(|Dy-r_kDy|_{L^2(Q)} + \omega_{\frac{1}{k}}(\Pi)) + M_2|(I-r_k)(y-y_k)| \geq \alpha|y-y_k|^2_{L^2(0,T;V)}$$

or $y-y_k$ reste dans un borné de $H^{1,2}$ indépendant de k

(15) $$\Rightarrow |(I-r_k)\ y-y_k| \leq \frac{M_3}{k}|y-y_k|_{H^1(Q)} \leq \frac{M_4}{k}$$

(14) et (15) =>

(16) $$M_1|y-y_k|_{L^2(Q)}(|Dy-r_kDy|_{L^2(Q)} + \omega_{\frac{1}{k}}(\Pi)) + \frac{M_5}{k} \geq \alpha|y-y_k|^2_{L^2(0,T;V)}$$

En majorant $|y-y_k|_{L^2(Q)} \leq |y-y_k|_{L^2(0,T;V)}$ et en résolvant l'inéquation du second degré en

$$|y-y_k|_{L^2(0,T;V)} \quad \Rightarrow$$

(17) $$|y-y_k|_{L^2(0,T;V)} \leq M_6(\omega_{\frac{1}{k}}(\Pi) + |Dy-r_kDy|_{L^2(Q)} + \sqrt{\tfrac{1}{k}})$$

en utilisant le fait que $Dy \in L^2(Q,R^n)$, le lemme affirmant la continuité de Π on obtient la première partie du résultat.
La seconde partie résulte du fait que si Dy et $C^o(Q)$ on a

$$|Dy - r_k Dy|_{L^2(Q,R^n)} \leq M_7 \, \omega_{\frac{1}{k}} (Dy) \qquad \blacksquare$$

III) <u>Interprétation économique d'un cas particulier</u>.

Considérons le cas particulier suivant $b(t,x,\theta,u) = b_1(t,x,\theta) + b_2(t,x,u)$ la dépendance $u \to b_2(t,x,u)$ étant linéaire.
Le problème limite s'écrit

$$(18) \qquad \frac{\partial V}{\partial t} + \Delta V + \min_{u(\theta)} \int_{T^{n+1}} \{ \sum b^i(t,x,\theta,u) \frac{\partial V}{\partial x_i} + \varphi(t,x,\theta,u)\} \, d\theta = 0$$

notons

$$\bar{u}(t,x) = \int_{T^{n+1}} u(t,x,\theta)$$

$$\tilde{u}(t,x,\theta) = u(t,x,\theta) - \int_{T^{n+1}} u(t,x,\theta)$$

(18) devient

$$(19) \qquad \frac{\partial V}{\partial t} + \Delta V + \min_{\substack{\tilde{u} \\ \int_{T^{n+1}} \tilde{u}(\theta) = 0}} \{\overline{b_1} \frac{\partial V}{\partial x} + b_2(t,x,\bar{u}) \frac{\partial V}{\partial x} + \int_{T^{n+1}} \varphi(t,x,\theta,\bar{u}+\tilde{u}) d\theta = 0$$

avec $\overline{b_1}(t,x) = \int_{T^{n+1}} b_1(t,x,\theta) d\theta$

Si l'on note

$$(20) \qquad \Psi(t,x,\bar{u}) = \operatorname*{Min}_{\substack{\tilde{u}(\theta) \\ \int_{T^{n+1}} \tilde{u}(\theta)=0}} \int_{T^{n+1}} \varphi(t,x,\theta,\bar{u}+\tilde{u}) d\theta$$

(19) se réécrit

$$(21) \qquad \frac{\partial V}{\partial t} + \Delta V + \min_{\bar{u}} \left\{ \overline{b_1}(t,x) \frac{\partial V}{\partial x} + b_2(t,x,\bar{u}) \frac{\partial V}{\partial x} + \Psi(t,x,\bar{u}) \right\} = 0$$

(20) peut être appelé gestion court terme par analogie avec le cas où θ ne dépend que de t

(21) gestion long terme.

On peut résumer ces considérations sous la forme d'un

Corollaire :

Lorsque $b(t,x,\theta,u) = b_1(t,x,\theta) + b_2(t,x,u)$
avec $u \rightarrow b_2(t,x,u)$ linéaire
le problème de contrôle optimal initial converge
lorsque $k \rightarrow \infty$ vers un problème, dont
la résolution se découple en :

- un problème de contrôle "court terme"

$$\Psi(t,x,\bar{u}) = \min_{\substack{\tilde{u}(\theta) \\ \int_0^1 \tilde{u}(\theta) = 0}} \int_{T^{n+1}} \varphi(t,x,\theta,\bar{u}+\tilde{u})d\theta$$

- un problème de contrôle stochastique "long terme"

$$dy_t^x = \bar{b}_1(t,y_t^x) + \bar{b}_2(t,y_t^x, \bar{u}(t,y_t^x)) \quad y_o^x = x$$

$$\min_{\bar{u}} E^x \int_0^{\tau_x} \Psi(t,y_t^x,\bar{u}(y_t^x))dt$$

La convergence des coûts ayant lieu dans $L^2(0,T;H_o^1)$

Conclusion.

On a donné un résultat de mélange pour les problèmes de contrôle stochastiques, les coefficients de mélange apparaissent dans les termes de dérive et le coût.

On a utilisé ce résultat et son interprétation économique en terme de découplage gestion long terme - court terme afin de diminuer la dimension d'un problème de gestion de réservoirs.

Le théorème de convergence s'étend au cas des problèmes de contrôle déterministe, lorsque le terme de mélange ne porte que sur le temps.

Bibliographie.

[1] J.P. AUBIN ; "Approximation of elliptic boundary value problems" ; Wiley Inter-Science, 1972.

[2] A. BENSOUSSAN - J.L. LIONS - G. PAPANICOLAOU ; "Sur de nouveaux problèmes asymptotiques" ; C.R.A.S. t. 282, 16.1.76.

[3] A. BRETON - F. FALGARONNE ; "Gestion de réservoirs d'une vallée hydraulique" ; Colloque International sur les méthodes de calcul scientifique et technique, IRIA 1973, Springer Verlag.

[4] F. DELEBECQUE - J.P. QUADRAT ; "Application de l'Identification et du contrôle de diffusion stochastique à la gestion de réservoirs" ; Colloque sur la théorie des systèmes et de gestion scientifique des services publics ; Janvier 1975, Université de Montréal.

[5] J.L. LIONS ; "Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites non linéaire" ; Dunod 1969.

[6] J.L. LIONS - E. MAGENES ; "Problèmes aux limites non homogènes" ; Dunod 1968.

F.D.
Conseil National de la Recherche Scientifique
France

J.-P.Q.
IRIA-LABORIA
Domaine de Voluceau
Rocquencourt
78150 - Le Chesnay, France