Ann. Sc. Math. Québec, 1977, vol. I, No. 2, pp. 183-194

GESTION OPTIMALE DES SYSTEMES HYDRO-THERMIQUES A L'AIDE DE LA METHODE GRG

Jean-Pierre Combot et Michael P. Polis

RESUME

On considère le problème de gestion optimale des systèmes hydrothermiques, et la méthode du gradient réduit généralisé (GRG) est utilisée pour calculer la solution optimale. Un modèle déterministe est présenté qui tient compte des déversements, des contraintes sur toutes les variables physiques et une fonction nonlinéaire exprimant la relation entre la hauteur de chute et l'emmagasinement. Sous certaines hyphothèses sur les déversements on démontre que si une solution existe elle est unique. Un exemple numérique est présenté pour démontrer que GRG est une méthode efficace pour résoudre le type de problème de gestion optimale considéré dans cette communication.

1. INTRODUCTION

Le problème d'exploitation optimale des systèmes hydrothermiques a déjà été examiné et traité à l'aide du principe du maximum [1] et de l'analyse fonctionnelle [2]. Dans les deux cas, les modèles utilisés ne tiennent pas compte de certaines variables ou contraintes physiques. L'objet du présent article est de considérer un modèle de système hydrothermique tenant compte des diverses contraintes physiques et de résoudre le problème à l'aide d'une méthode souple et efficace. La méthode du gradient réduit généralisé (GRG) [3,4,5] est applicable aux problèmes d'optimisation non linéaires avec contraintes sur l'état et la commande sans passer par une méthode de pénalisation. Le GRG est aussi une méthode efficace [4,5] pour traiter les problèmes de commande optimale avec contraintes sur l'état et la commande. C'est la méthode qui a été retenue pour résoudre le problème d'optimisation posé ci-après.

L'article est organisé comme suit: la deuxième partie est consacrée à la description du modèle mathématique et à la définition du problème d'exploitation optimale. L'utilisation de la méthode GRG dans le cadre du problème fait l'objet de la troisième partie et un exemple numérique est donné dans la dernière partie.

2. FORMULATION DU PROBLEME

Soit le système représenté à la Figure 2.1 comprenant une centrale hydraulique et une centrale thermique.

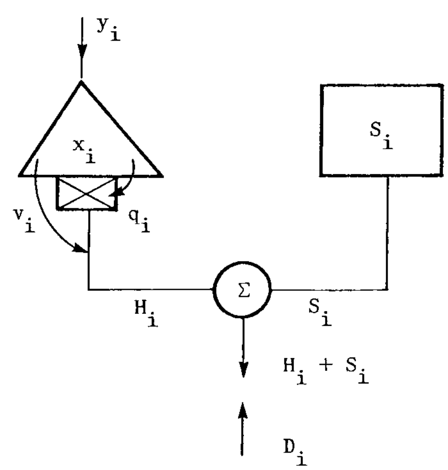


Figure 2.1

Le problème est discrétisé en temps et la période de discrétisation est choisie égale à une unité de temps.

Les variables de la Figure 2.1 représentent les quantités suivantes:

y_i = apport d'eau à la période i

x_i = contenu du réservoir à la fin de la période i

q_i = tirage à la période i

v_i = déversement à la période i

H_i = puissance hydraulique à la période i

S_i = puissance thermique à la période i

$i \in T = \{1, 2, \ldots, N\}$ l'horizon des temps

D_i = demande à la période i

On suppose que tout le coût est attribué à la partie thermique du système. Le problème consiste à déterminer (q_i, x_i, v_i, S_i); $i \in [0,T]$ pour minimiser le coût:

$$J = \sum_{i=1}^{N} (a_i + b_i S_i + c_i S_i^2) \tag{1}$$

Le coût comprend un coût fixe et un coût marginal quadratique. Des constantes a_i, b_i, c_i sont connues réelles positives.

L'évolution du système est caractérisée par l'équation aux différences suivante,

$$x_i = x_{i-1} + y_i - q_i - v_i \quad i \in T \tag{2}$$

$$x_o \text{ donné}$$

On suppose que le contenu du réservoir, le débit et la puissance hydraulique sont bornés inférieurement et supérieurement, i.e.,

$$\underline{X} \leq x_i \leq \bar{X} \qquad \forall i \in T \tag{3}$$

$$0 \leq q_i \leq \bar{Q} \qquad \forall i \in T \tag{4}$$

$$0 < \underline{S} \leq S_i \leq \bar{S} \qquad \forall i \in T \tag{5}$$

On impose également une contrainte sur le contenu du réservoir au temps final i.e.,

$$x_N \geq \gamma > \underline{X} \tag{6}$$

La puissance générée doit satisfaire la demande à chaque instant, d'où l'inégalité

$$D_i \leq H_i + S_i \qquad \forall i \in T \tag{7}$$

Si la contrainte n'est pas active, on suppose que l'énergie excédentaire

$$E_i = H_i + S_i - D_i$$

est exportée.

On considère maintenant les déversements, d'abord ils sont toujours non-négatifs,

$$v_i \geq 0 \qquad \forall i \in T \tag{8}$$

On a supposé que de l'énergie excédentaire peut être produite, donc il est sensé de déverser seulement si le tirage et l'emmagasinement sont maxima. Ceci se traduit par les contraintes égalités

$$(\bar{Q} - q_i)\, v_i = 0 \qquad \forall i \in T \tag{9}$$

$$(\bar{X} - x_i)\, v_i = 0 \qquad \forall i \in T \tag{10}$$

La puissance hydraulique fournie H_i est fonction du débit q_i et de la hauteur de chute. On suppose que cette dernière varie exponentiellement avec l'emmagasinement, H_i est alors exprimé par,

$$H_i = q_i\, H^M\, \beta(\delta - e^{-\alpha x_{i-1}}) \tag{11}$$

où H^M est la hauteur de chute maximale, α, β sont deux constantes réelles positives et

$$\delta = e^{-\alpha\bar{X}} + \frac{1}{\beta}$$

En posant $H^M\beta = h$, l'équation (11) devient

$$H_i = q_i\, h(\delta - e^{-\alpha x_{i-1}}) \tag{12}$$

Le problème formulé ci-dessus peut-être simplifié en remarquant que la fonctionnelle J n'inclut pas de gain sur l'énergie excédentaire produite. La contrainte inégalité (7) peut-être remplacée par une égalité, à condition de supprimer l'exclusion (9) sur les déversements. Toute solution du nouveau problème n'est plus alors solution du problème original. En particulier, il peut exister un déversement v_i sans pour cela turbiner au maximum $\bar{Q}$. De plus, dans le problème original, on suppose que la demande D_i est au moins égale au minimum fourni par le thermique. Si cette condition n'est pas remplie, on considère $E_i = \underline{S} - D_i$ comme étant de l'énergie excédentaire et pour traiter le problème on fixe la demande D_i égale à $\underline{S}$.

En remarquant que la demande D_i est connue et que l'énergie hydraulique est toujours non-négative, on peut modifier le problème original pour obtenir le problème P_1, qui consiste à minimiser

$$J_1 = \sum_{i \in T} (-e_i H_i + c_i H_i^2) \tag{13}$$

où

$$e_i = 2c_i D_i + b_i$$

Lié par les contraintes,

$$H_i = q_i h(\delta - e^{-\alpha x_{i-1}}) \tag{14}$$

$$x_i = x_{i-1} + y_i - q_i - v_i \tag{15}$$

$$\underline{X} \le x_i \le \bar{X} \tag{16}$$

$$x_N \ge \gamma > \underline{X} \tag{17}$$

$$0 \le q_i \le \bar{Q} \tag{18}$$

$$\underline{H}_i \le H_i \le \bar{H}_i \tag{19}$$

où

$$\underline{H}_i = \max(0, D_i - \bar{S})$$

$$\bar{H}_i = D_i - \underline{S}$$

$$(\bar{X} - x_i)v_i = 0 \tag{20}$$

$$v_i \ge 0 \tag{21}$$

Soit $(x_i^o, q_i^o, v_i^o, J_i^o)$ une solution du problème P_1 alors une solution $(x_i^*, q_i^*, v_i^*, S_i^*, J^*)$ du problème original s'obtient comme suit:

$$x_i^* = x_i^o$$
$$q_i^* = q_i^o + \min(v_i^o, \bar{Q} - q_i^o)$$

$$v_i^* = v_i^o - \min\,(v_i^o,\ \bar{Q} - q_i^o)$$

$$J^* = J_1^o + \sum_{i \in T} a_i + b_i\, D_i + c_i\, D_i^2$$

$$S_i^* = D_i - q_i^o\, h(\delta - e^{-\alpha x_{i-1}})$$

2.1 Unicité de la solution du problème P_1

Ce paragraphe a pour objet de montrer que le problème P_1 posé ci-dessus admet une solution unique. Le coût J_1 est une fonction quadratique des H_i; $i \in T$. Puisque $c_i > 0$; $i \in T$, J_1 est une fonction strictement convexe sur R^N.

Soit $\mathcal{H} \subset R^N$ le domaine d'admissibilité des H_i défini par,

$$\mathcal{H} = \{H = (H_1, H_2, \ldots, H_N) \in R^N\text{: (14-21) soient satisfaites}\}.$$

On montre aisément que $\mathcal{H}$ est un ensemble convexe. Comme J_1 est strictement convexe sur R^N, donc aussi sur $\mathcal{H}$, lui-même convexe, le problème P_1 admet un minimum global unique $H^o = (H_1^o, H_2^o, \ldots, H_N^o)$. Il reste à montrer que l'unicité de H^o entraîne l'unicité des q_i, x_i, v_i; $i \in T$, déterminés par le système d'équations (14, 15, 20). Ces équations peuvent se résoudre par récurrence: la connaissance de x_{i-1}^o détermine uniquement la solution (q_i^o, x_i^o, v_i^o),

$$q_i^o = \frac{H_i^o}{h(\delta - e^{-\alpha x_{i-1}^o})}$$

$$x_i^o = \min(\bar{X},\ x_{i-1}^o + y_i - q_i)$$

$$v_i^o = \max(0,\ x_{i-1}^o + y_i - q_i^o - \bar{X}) \qquad \blacksquare$$

Remarque

L'unicité de la solution q_i, x_i, v_i; $i \in T$ est assurée grâce à la contrainte d'exclusion (20) sur les déversements v_i. Si on supprime cette contrainte, i.e., si on tolère un déversement bien qu'il n'y ait pas risque de débordement, le déversement fait seulement fonction de variable d'écart dans l'équation de continuité (15). On peut donc remplacer cette dernière et l'inégalité (21) par la contrainte inégalité,

$$x_i \leq x_{i-1} + y_i - q_i$$

Ce nouveau problème possède également la même solution unique H^o et le même coût associé J_1^o. Cependant la solution x_i, q_i, v_i; $i \in T$ n'est plus unique. On obtient un domaine D de solutions défini par,

$$D = \{(x_i,\ q_i,\ v_i);\ i \in T:\ H_i = H_i^o,\ i \in T\}$$

Ceci indique qu'il existe un nombre infini de politiques d'exploitation du système correspondant toutes au même coût. On peut donc dans ce cas envisager une post-optimisation, soit par exemple, une régulation des crues.

3. SOLUTION DU PROBLEME VIA LA METHODE DU GRADIENT REDUIT GENERALISE

L'utilisation du tirage q_i comme variable indépendante est naturelle mais non impérative. Mehra et Davis [5] montrent que dans un problème de commande optimale avec contraintes inégalités sur les variables d'état, il est profitable de choisir celles-ci comme indépendantes, pendant les intervalles de temps où elles atteignent leurs bornes.

L'algorithme de calcul est semblable à celui d'Abadie et Carpentier [3]. L'idée de base consiste à faire évoluer le problème en modifiant les variables indépendantes et en déterminant les variables dépendantes par l'intermédiaire des contraintes égalités. Les variables indépendantes sont choisies pour qu'un tel calcul soit possible, et pour faciliter le maniement des contraintes inégalités. A l'étape i, le calcul des variables dépendantes est possible si la matrice jacobienne de contraintes égalités du problème, calculée à l'étape i, par rapport aux variables dépendantes est inversible [4].

Le gradient généralisé est calculé en utilisant les techniques proposées en [4] et [5] et rappelées au paragraphe 3.1.

A chaque itération, l'algorithme suivant est utilisé,

i) Séparer les variables en variables dépendantes et indépendantes.

ii) Calculer le gradient réduit relativement aux variables indépendantes.

iii) Générer une direction d'avance par une méthode conventionnelle: méthode du gradient, gradients conjugés.

iv) Faire progresser les variables indépendantes dans la direction choisie tout en calculant les variables dépendantes, jusqu'au minimum de la fonctionnelle ou jusqu'à ce qu'une variable dépendante sature une contrainte inégalité.

v) Reprendre la même méthode à l'étape (i) jusqu'à ce qu'un critère de convergence préfixé soit satisfait.

3.1 Calcul du gradient réduit

En adjoignant les contraintes égalités (14, 15, 20) à la fonctionnelle (13) à l'aide de multiplicateurs de Lagrange λ_i^1, λ_i^2, λ_i^3, $\in R^N$, $i = 1, 2, \ldots, N$, on obtient le Lagrangien du problème.

$$
\begin{aligned}
L = \sum_{i=1}^{N} c_i(H_i)^2 - e_iH_i &+ \lambda_i^1\,[q_ih(\delta - e^{-\alpha\,x_{i-1}}) - H_i] \\
&\lambda_i^2[x_{i-1} + y_i - q_i - v_i - x_i] \\
&+ \lambda_i^3\,[(\bar{X} - x_i)\,v_i] \qquad (22)
\end{aligned}
$$

Considérant de petites variations sur H_i, q_i, v_i, x_i et négligeant les termes d'ordre supérieurs à 1, la variation de L s'écrit,

$$
\begin{aligned}
\delta L = \sum_{i=1}^{N-1} g_{H_i}\,\delta H_i &+ g_{q_i}\,\delta q_i + g_{v_i}\,\delta v_i + g_{x_i}\,\delta x_i \\
&+ g_{H_N}\delta H_N + g_{q_N}\,\delta q_N + g_{v_N}\,\delta x_N \qquad (23)
\end{aligned}
$$

où $g_{H_i}, g_{q_i}, g_{v_i}, g_{x_i}$ représentant respectivement les gradients de L par rapport à

H_i, q_i, v_i, x_i sont donnés par

$$
\begin{aligned}
g_{H_i} &= 2c_i\, H_i - e_i - \lambda_i^1 \quad \forall i \in T \\
g_{q_i} &= \lambda_i^1\, h(\delta - e^{-\alpha x_{i-1}}) - \lambda_1^2 \quad \forall i \in T \\
g_{v_i} &= \lambda_i^3\, (\bar{X} - x_i) - \lambda_i^2 \quad \forall i \in T \\
g_{x_i} &= -\lambda_i^3\, v_i - \lambda_i^2 + \lambda_{i+1}^1\, q_{i+1}\, h\,\alpha\, e^{-\alpha x_i} + \lambda_{i+1}^2 \\
i &= 1,\, 2,\, \ldots,\, N\text{-}1 \\
g_{x_N} &= -\lambda_N^3\, v_N - \lambda_N^2
\end{aligned}
\qquad (24)
$$

Le système (24) de 4.N équations fait intervenir 7.N inconnues

$$[\lambda_i^1,\ \lambda_i^2,\ \lambda_i^3,\ g_{H_i},\ g_{q_i},\ g_{v_i},\ g_{x_i}];\ i \in T.$$

Le gradient réduit est calculé en exprimant qu'à chaque étape les composantes du gradient par rapport aux trois variables dépendantes sont nulles. A l'étape i, $[i \in T]$ on fixe ainsi 3 des 4 variables $\{g_{H_i},\ g_{q_i},\ g_{v_i},\ g_{x_i}\}$. Le système (24) se réduit alors à un système de 4.N équations à 4.N inconnues $[\lambda_i^1, \lambda_i^2, \lambda_i^3, g_{R_i}$ le gradient réduit$]$.

La résolution de ce système peut être conduite récursivement à partir de l'étape finale N. A l'étape i, la détermination des λ_i^j; $j = 1, 2, 3$ nécessite la résolution d'un système de 3 équations à 3 inconnues. Le système admet une solution unique si le Jacobien des contraintes égalités par rapport aux variables dépendantes est inversible. Le choix des variables dépendantes garantit la régularité de ce Jacobien et la résolution est donc toujours possible [3].

3.2 Détermination d'une solution initiale

L'algorithme GRG tel que présenté n'est applicable qu'à une solution de départ admissible, i.e., satisfaisant toutes les contraintes. Il existe plusieurs méthodes pour générer une telle solution [3, 4].

Une approche consiste à déterminer une solution admissible à l'aide de considérations intuitives. La solution utilisée est une solution singulière générée par une approche bang bang.

La solution initiale peut s'exprimer ainsi,

$$H_i = \max\,(0,\ D_1 - \bar{S})$$

$$q_i = \frac{H_i}{h(\delta - e^{-\alpha x_{i-1}})} \qquad \forall i \in T$$

$$x_i = \min\,(\bar{X},\ x_{i-1} + y_i - q_i)$$

$$v_i = \max\,(0,\ x_{i-1} + y_i - q_i - \bar{X})$$

En utilisant une telle politique, s'il y a pénurie d'énergie, le problème n'a pas de solution, i.e. il est nécessaire de délester.

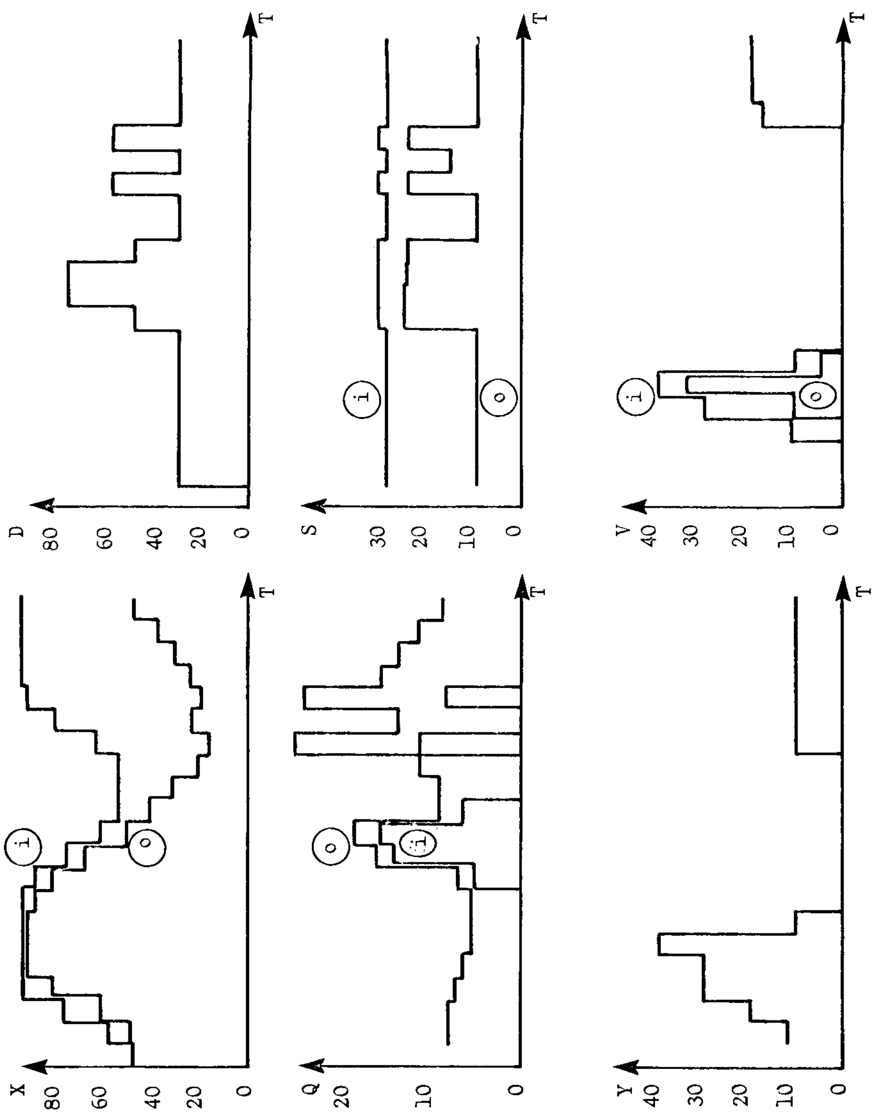
4. Exemple numérique

La méthode de résolution du problème P_1 présentée dans la troisième partie a été transcrite en langage Fortran IV pour être exécutée sur un ordinateur IBM 360-145.

L'exemple proposé comporte 20 périodes d'une unité de temps. Les autres paramètres sont donnés ci-dessous,

$\alpha = 0.012$	$\delta = 1.05$	$a_i = 0$
$c_i = 0.001$	$b_i = 1+(i-1)/100$	$h = 4.69$
$\gamma = 50$	$x_o = 50$	$\underline{X} = 5$
$\bar{X} = 100$	$\bar{Q} = 30$	

La valeur initiale du critère est $J_1 = 682$ et la valeur finale est $J_1 = 339$. Les coefficients b_i augmentent avec le temps pour tenir compte des augmentations dans le coût de combustible. Les trajectoire initiale et optimale des variables s,q,v,x sont données à la Figure 4.1.



i initial o optimal

Figure 4.1

5. CONCLUSION

On a considéré la gestion optimale d'un modèle de système hydrothermique simple. On a montré que l'unicité de la solution dépend de la politique retenue pour les déversements, ouvrant ainsi la possibilité d'une post-optimisation.

La résolution de l'exemple numérique proposé à permis de montrer que la méthode GRG déjà reconnue comme très efficace est facilement transposable aux problèmes de gestion industrielle. La rapidité de convergence de la solution et le faible encombrement de code objet en mémoire (5 kbytes) permettent d'envisager le traitement de problèmes de plus grandes dimensions ou la commande de processus en temps réel.

REFERENCES

[1] Y.N. Oh, "An application of the discrete maximum principle to the most economical power system operation", Elec. Eng. in Japan, Vol. 4, p. 17, 1967.

[2] M. El-Hawary and G.S. Christensen, "Functionnal optimization of Common-Flow hydrothermal systems", IEEE, T-PAS, pp. 1833-39, 1972.

[3] J. Abadie et J. Carpentier: "Generalization of Wolfe's reduced gradient method for the case of nonlinear constrainsts" dans Optimization, R. Fletcher, Ed. N.Y., Academic Press 1969.

[4] J. Abadie, "Application of the GRG algorithm to optimal control Problems" dans Integer and Nonlinear Programming, J. Abadie, Ed. Amsterdam, Pays-Bas: North-Holland Publ. 1970.

[5] R.K. Mehra et R.E. Davis: "A generalized gradient method for optimal control problems with inequality constrainsts and singular arcs" IEEE transactions on Automatic Control, Vol. AC-17, pp. 69-79, February 1972.

J.-P. C.
Bell-Northern Research
3 Place du Commerce
Verdun, Québec, Canada H3E 1H6

M.P.P.
Département de Génie Electrique
Ecole Polytechnique
C.P. 6079, Succursale A
Montréal, Québec, Canada H3C 3A7