

## SUR LE PROBLEME INVERSE EN SISMIQUE A. Bamberger et G. Chavent

### INTRODUCTION.

Ce papier concerne le problème inverse suivant : le sous-sol, supposé être constitué de couches planes parallèles, est excité en surface par une explosion ; les ondes (supposées planes) ainsi engendrées se propagent vers le fond et sont réfléchies et transmises à chaque interface entre deux couches. L'état vibratoire de la surface est enregistré en un point voisin de l'explosion. Le problème inverse consiste à déduire du sismogramme ainsi obtenu, les caractéristiques du milieu en fonction de la profondeur.

Une première approche de ce problème a consisté à ne prendre en compte que les temps d'arrivée des ondes réfléchies. Plus récemment, d'autres méthodes (KUNETZ [7]) ont tenté d'utiliser aussi leurs amplitudes, mais ont montré une instabilité vis à vis des perturbations sur les mesures.

Nous posons ici le problème inverse comme un problème de contrôle optimal, dont nous montrons qu'il a une solution sur un ensemble de classes d'équivalence et nous donnons quelques résultats sur la stabilité de l'optimum par rapport aux perturbations sur l'observation. Nous essayons de donner une présentation synthétique du problème et de ses difficultés, et nous renvoyons aux articles originaux de GOPINAH et SONDHI [6], GERVER [5] et BAMBERGER [4] pour les démonstrations des théorèmes.

Nous illustrerons pour terminer la méthode de contrôle proposée par quelques résultats numériques dûs à P. LAILLY. On pourra trouver d'autres résultats de ce type dans G. CHAVENT, P. LAILLY et A. BAMBERGER [3].

NOTATIONS :

On adopte les notations habituelles suivantes :

- (1.1)  $z$  : désigne la profondeur ;  $z$  est positif ou nul.  
 (1.2)  $t$  : désigne le temps ;  $t$  est positif ou nul.  
 (1.3)  $y(z, t)$  : désigne l'ébranlement à la profondeur  $z$ , à l'instant  $t$ .  
 (1.4)  $\rho(z)$  : désigne la densité du milieu à la profondeur  $z$ .  
 (1.5)  $\mu(z)$  : désigne le coefficient d'élasticité du milieu à la profondeur  $z$ .  
 (1.6)  $\sigma(z)$  :  $\sigma(z) = (\rho(z) \mu(z))^{1/2}$  désigne l'impédance acoustique du milieu à la profondeur  $z$ .  
 (1.7)  $v(z)$  :  $v(z) = (\mu(z)/\rho(z))^{1/2}$  désigne la célérité de propagation de l'ébranlement dans le milieu à la profondeur  $z$ .  
 (1.8)  $x(z)$  :  $x(z) = \int_{0v(z')}^z \frac{dz'}{v(z')}$  représente le temps de parcours : c'est le temps mis par un ébranlement pour se propager de la profondeur 0 à la profondeur  $z$ .  
 (1.9)  $\sigma(x)$  : désigne l'impédance acoustique du milieu en fonction du temps de parcours.  
 (1.9')  $\Omega$  :  $\Omega = ]0, z_0[$  est le domaine en espace.

1. ETUDE MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME.1.1. Equations d'état.

On suppose que l'ébranlement est donné par :

$$(1.10) \quad \rho(z) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial z} (\mu(z) \frac{\partial y}{\partial z}) = 0 \quad \text{pour tout } t > 0 \text{ et } z \in \Omega$$

avec les conditions initiales :

$$(1.11) \quad \begin{cases} y(z, 0) = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial t}(z, 0) = 0 \end{cases} \quad \text{pour } z \in \Omega$$

(On suppose donc le milieu au repos à l'instant initial  $t = 0$ ) et avec les conditions aux limites :

$$(1.12) \quad -\mu(0) \frac{\partial y}{\partial z}(0,t) = g(t) \quad \text{pour } t > 0, \quad y(z_0, t) = 0$$

où  $g(t)$  représente l'impulsion en pression que l'on communique au milieu en surface à chaque instant  $t$ . Ce modèle est le plus simple possible, car c'est un modèle à une dimension d'espace et les termes d'amortissement sont négligés.

### 1.2. Formulation du Problème inverse.

On dispose d'une observation  $Y_d(t)$ , représentant l'état vibratoire en surface  $Y(t)$ , éventuellement perturbé par un bruit  $\eta(t)$ , pour des instants  $t \in [0, T]$ .

$$(1.13) \quad \begin{cases} Y_d(t) = Y(t) + \eta(t) & \text{avec} \\ Y(t) = y(0,t) \end{cases}$$

Naturellement,  $Y(t)$  dépend des fonctions  $\rho$  et  $\mu$  (caractéristiques du milieu) et de l'excitation  $g$ ; on notera donc :

$$(1.14) \quad Y(\rho, \mu, g, t) = Y(t)$$

Dans toute la suite,  $g$  sera supposée connue (ce qui n'est qu'une première approximation !) et on cherchera à déterminer  $\rho$  et/ou  $\mu$ .

On se donne ensuite un ensemble  $\mathcal{A}_{ad}$  de paramètres  $(\rho, \mu)$  admissibles, prenant en compte le maximum d'informations a priori.

On pose alors le problème d'identification de façon classique [1] [9] comme un problème de contrôle optimal :

$$(1.15) \quad \begin{cases} \text{trouver } (\rho, \mu) \in \mathcal{A}_{ad} \text{ qui minimise} \\ J(\rho, \mu) = \int_0^T |Y(\rho, \mu, g, t) - Y_d(t)|^2 dt \end{cases}$$

Le problème inverse (1.15) sera "bien posé" si, lorsque l'on perturbe légèrement l'observation  $Y_d$ , les paramètres optimaux  $\rho^*$  et  $\mu^*$  ne sont que légèrement modifiés. Une condition nécessaire pour que cela soit réalisé est que l'application inverse  $Y \rightarrow (\rho, \mu)$  (si elle existe !) soit continue sur  $\{Y(\rho, \mu), (\rho, \mu) \in \mathcal{A}_{ad}\}$ . Il suffit pour cela que l'application  $(\rho, \mu) \rightarrow Y$  soit continue et que le domaine  $\mathcal{A}_{ad}$  soit compact. Ce

sont ces conditions que l'on va tenter de réaliser.

### 1.3. Solution des équations d'état.

Etant donné un nombre  $k > 0$ , donné, on pose :

$$(1.16) \quad \mathcal{A}_{ad} = \left\{ (\rho, \mu) \in \left( L^\infty(\Omega) \right)^2 \left| \begin{array}{l} 0 < \frac{1}{k} \leq \rho(z) \leq k \\ 0 < \frac{1}{k} \leq \mu(z) \leq k \end{array} \right. \text{ pp. sur } \Omega \right\} .$$

on a alors

Proposition 1. Pour tout  $(\rho, \mu) \in \mathcal{A}_{ad}$ , on a :

$$(1.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall g \in W^{1,1}(0,T), \text{ les équations d'état ont une solution unique} \\ y(x,t) \text{ telle que } Y \in L^\infty(OT) . \end{array} \right.$$

En outre :

$$(1.18) \quad g(0) = 0 \text{ et } g \in W^{2,1}(OT) \longrightarrow Y \in W^{1,\infty}(OT) .$$

Remarque 1 : L'énergie  $I(t)$  du système étant donnée par :

$$(1.19) \quad I(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dz + \int_{\Omega} \mu \left( \frac{\partial y}{\partial z} \right)^2 dz ,$$

les hypothèses (1.16) et (1.17) permettent de démontrer seulement que :

$$(1.20) \quad I(t) = g(t) Y(t) - \int_0^t g'(s) Y(s) ds \text{ pp. sur } ]0, T[$$

ce qui s'interprète formellement par :

$$(1.21) \quad \frac{dI}{dt} = g(t) \frac{dY(t)}{dt} .$$

Le résultat (1.20) n'assure pas la continuité de l'énergie, sauf dans le cas où  $Y(t)$  est continue : lorsque  $\rho$  et  $\mu$  sont  $H^1$  dans un voisinage de  $z = 0$ , (ce qui est le cas en pratique), on peut montrer, en utilisant les caractéristiques, que  $Y(t) \in H^1$  ; l'énergie est alors continue et vérifie rigoureusement (1.21). ■

Si nous notons

$$(1.22) \quad d_2((\rho_1, \mu_1), (\rho_2, \mu_2)) = \left( |\rho_1 - \rho_2|_{L^2(\Omega)}^2 + |\mu_1 - \mu_2|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

on a le résultat suivant concernant la continuité de l'application  $(\rho, \mu) \rightarrow Y$  :

Proposition 2. Sous l'hypothèse

$$(1.23) \quad \begin{cases} g \in W^{3,1}(OT) \\ g(o) = g'(o) = 0 \end{cases}$$

on a pour tout couple  $(\rho_1, \mu_1)$  et  $(\rho_2, \mu_2) \in \mathcal{A}_{ad}$  :

$$(1.24) \quad \|Y_1 - Y_2\|_{\mathcal{C}^0(OT)} \leq C d_2((\rho_1, \mu_1), (\rho_2, \mu_2)) .$$

On voit que cette distance  $d_2$  rend bien continue l'application  $(\rho, \mu) \rightarrow Y$ . Cependant elle ne rend pas compact l'ensemble  $\mathcal{A}_{ad}$  défini en (1.16).

Nous allons donc introduire une distance plus faible :

1.4. Introduction d'une distance plus faible sur les paramètres.

Définissons sur  $\mathcal{A}_{ad}$  une nouvelle distance  $d$  par :

$$(1.25) \quad d((\rho_1, \mu_1), (\rho_2, \mu_2)) = \sup_{z \in \Omega} \left( \left| \int_0^z (\rho_1(z) - \rho_2(z)) dz \right| + \left| \int_0^z \left( \frac{1}{\mu_1(z)} - \frac{1}{\mu_2(z)} \right) dz \right| \right)$$

On vérifie d'abord que :

$$(1.26) \quad \mathcal{A}_{ad} \text{ défini en (1.16) est compact pour la distance (1.25).}$$

On a ensuite le résultat de continuité suivant (cf. [1]) :

Proposition 3. Avec l'hypothèse

$$(1.27) \quad \left\{ \begin{array}{l} g \in W^{4,1}(OT) \\ g(o) = g'(o) = g''(o) = 0 \quad (\text{condition de raccordement}) \end{array} \right.$$

on a pour tout couple  $(\rho_1, \mu_1)$  et  $(\rho_2, \mu_2) \in \mathcal{A}_{ad}$  :

$$(1.28) \quad \|Y_1 - Y_2\|_{\mathcal{C}^0(OT)} \leq C(d(\rho_1, \mu_1), (\rho_2, \mu_2)) .$$

Cette distance  $d$  rend donc continue l'application  $(\rho, \mu) \rightarrow Y$  mais est moins forte que la distance  $d_2$  de la Proposition 2.

Cette continuité est illustrée sur la Figure 1 pour une suite de répartitions  $(\rho_n, \mu_n) = (\sigma_n, \sigma_n)$ , périodique et de plus en plus oscillantes et convergeant, au sens de la distance  $d$ , vers la répartition  $(\rho^*, \bar{\mu})$ .

Remarque 2. Soit  $M > 0$  donné. Si l'on se restreint au sous-ensemble  $\mathcal{A}_{ad}^{vb}$  de  $\mathcal{A}_{ad}$  défini par :

$$(1.29) \quad \mathcal{A}_{ad}^{vb} = \{(\rho, \mu) \in \mathcal{A}_{ad} \mid \text{var } \rho \leq M, \text{ var } \mu \leq M\}$$

où

$$(1.30) \quad \text{var } \rho = \sup_{\substack{(z_i, i=1 \dots N) \\ N \in \mathbb{N}}} \sum_{i=1}^N |\rho(z_{i+1}) - \rho(z_i)| ,$$

les distances  $d_2$  et  $d$  deviennent équivalentes. ■

Il est facile d'utiliser cette nouvelle distance  $d$  pour déterminer, sur un intervalle  $[z_0, z_1] \subset \Omega$  donné, une meilleure approximation du couple  $(\rho, \mu)$  par des coefficients  $(\rho_0, \mu_0)$  constants sur  $[z_0, z_1]$  ; on trouve ainsi :

$$(1.31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_0 = \frac{1}{z_1 - z_0} \int_{z_0}^{z_1} \rho(z) dz \\ \mu_0 = \frac{1}{z_1 - z_0} \int_{z_0}^{z_1} \frac{1}{\mu(z)} dz \end{array} \right.$$

ILLUSTRATION DE LA CONVERGENCE

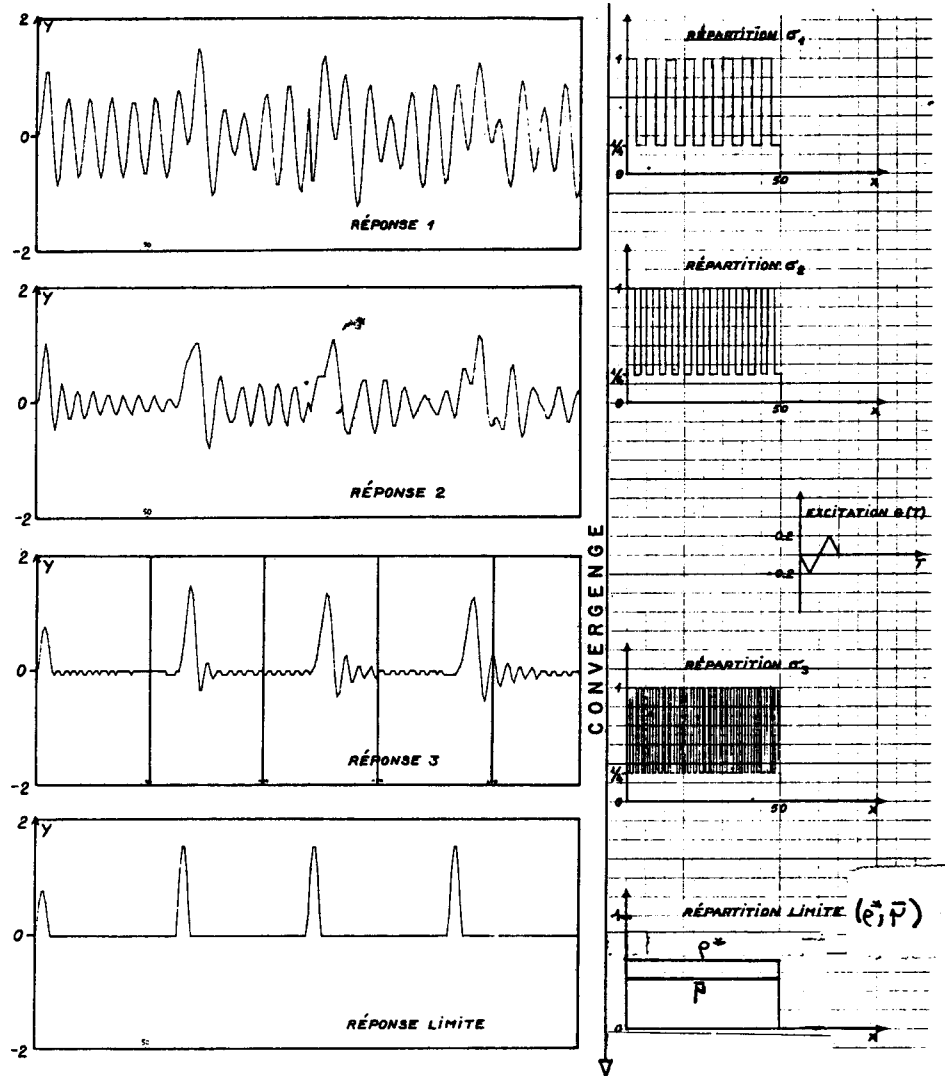


FIGURE 1.

En introduisant dans chacun des cas les vitesses de propagation sur l'intervalle  $[z_0, z_1]$  :

$$(1.32) \quad v(z) = \frac{\mu(z)}{\rho(z)}^{1/2}, \quad v_0 = \frac{\mu_0}{\rho_0}^{1/2}$$

on vérifie que :

$$(1.33) \quad v_0 \leq \left( \frac{1}{z-z_0} \int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{v(z)} \right)^{-1} \leq \frac{1}{z_1-z_0} \int_{z_0}^{z_1} v(z) dz,$$

la deuxième inégalité étant stricte, sauf cas où  $v(z) = \text{constante}$  sur  $[z_0, z_1]$ .

Lorsque la distance  $d((\rho_0, \mu_0), (\rho, \mu))$  est petite, la réponse du milieu  $(\rho, \mu)$  est pratiquement indiscernable de la réponse d'un milieu  $(\rho_0, \mu_0)$  ayant une vitesse de propagation  $v_0$  strictement inférieure (cf. (1.33)) à la vitesse réelle : on appelle  $v_0$  la vitesse apparente de propagation sur l'intervalle  $[z_0, z_1]$ .

Cette notion est illustrée sur la Figure 2 pour une répartition  $(\rho, \mu) = (\sigma, \sigma)$  ayant une vitesse réelle  $\equiv 1$ . La meilleure approximation constante sur  $[0, 100]$  au sens de  $d$  est le couple  $(\rho_0, \mu_0) = (0,625, 0,400)$ , d'où une vitesse apparente  $v_0 = 0,8$ . On constate bien un retard dans l'observation de la réflexion totale en  $z = 100$ . D'une façon générale, pour les répartitions du type de la Figure 2, la vitesse apparente  $v_0$  s'exprime en fonction du rapport  $q = \frac{\sigma_+}{\sigma_-}$  par la formule

$$(1.34) \quad v_0 = \frac{2\sqrt{q}}{1+q}$$

On constate que la vitesse apparente  $v_0$  reste voisine de 1 pour une très large bande de  $q$  :

$$(1.35) \quad 0,9 \leq v_0 \leq 1 \quad \text{pour} \quad 0,4 \leq q \leq 2,5.$$



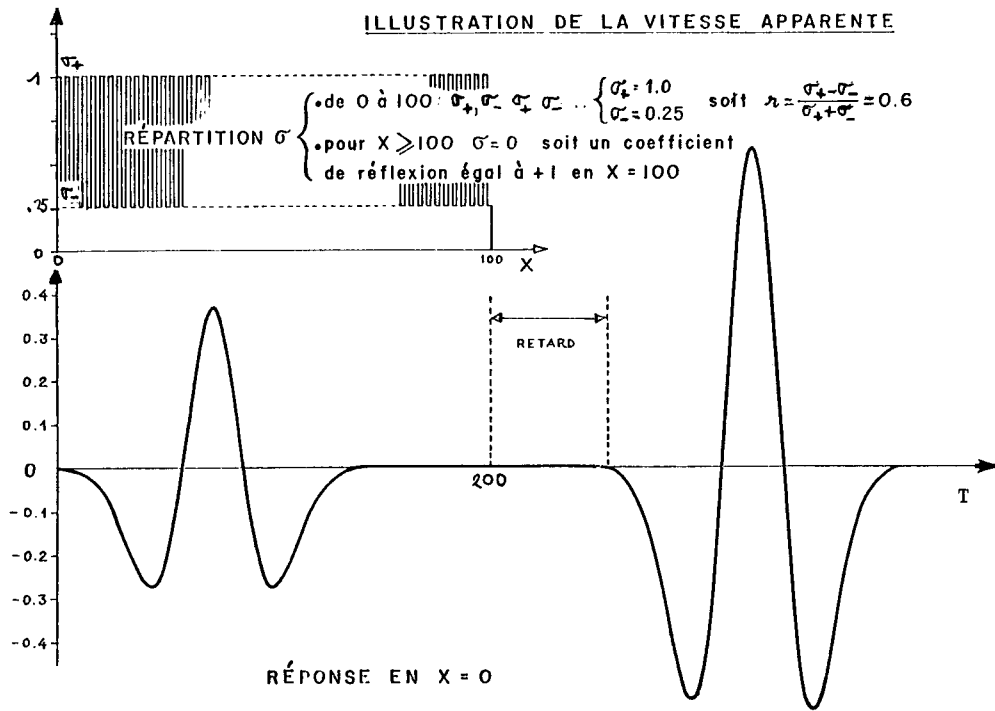


Figure 2.

1.5. Classes d'équivalence de paramètres, temps de parcours, injectivité.

On s'intéresse dans ce paragraphe à l'injectivité de l'application  $(\rho, \mu) \rightarrow Y$  (cf. § 1.3).

On choisit tout d'abord :

$$(1.36) \quad z_0 \geq k \frac{T}{2}$$

de sorte que la réponse  $Y$  sur  $[0, T]$  a une répartition  $(\rho, \mu) \in \mathcal{A}_{ad}$  défini en (1.16) ne dépende que de  $\rho$  et  $\mu$  sur l'intervalle ouvert  $]0, z_0[$ .

Définissons ensuite l'opérateur  $H$  par :

$$(1.37) \quad H_{\rho\mu} : g \in W^{1,1}(0, T) \rightarrow Y(\rho, \mu, g, \cdot) \in L^\infty(0, T).$$

Cet opérateur étant linéaire invariant dans le temps, il est entièrement déterminé par la donnée de  $g$  et de son image  $Y(t)$ , sous réserve que  $0 \in \text{supp } g(t)$ , ce qui est toujours vérifié en pratique.

Ainsi l'injectivité (pour  $g$  fixé !) de l'application  $(\rho, \mu) \rightarrow Y$  est équivalente à celle de l'application  $(\rho, \mu) \rightarrow H_{\rho\mu}$ .

#### 1.5.1. Définition de classes d'équivalence sur $\mathcal{A}_{ad}$ :

Pour tout couple  $(\rho, \mu) \in \mathcal{A}_{ad}$ , on vérifie que :

$$(1.38) \quad H_{\rho\mu} = H_{\sigma\sigma}$$

où  $\sigma$  est défini par :

$$\begin{cases} \sigma(x) = \left( \rho(z) \mu(z) \right)^{1/2} \\ x(z) = \int_0^z \left( \frac{\rho(z)}{\mu(z)} \right)^{1/2} dz \end{cases} \quad \text{avec}$$

La fonction  $x(z)$  est le temps de parcours entre la surface et la profondeur et  $\sigma(x)$  est l'impédance acoustique au temps de parcours  $x$ . Dans le plan  $(x, t)$  pour le couple  $(\sigma, \sigma)$  la vitesse de propagation est constante et égale à 1, et donc  $Y(t)$  sur  $[0, T]$  ne dépend que de  $\sigma$  sur  $\left[0, \frac{T}{2}\right]$ .

Définition : Deux couples  $(\rho_1, \mu_1)$  et  $(\rho_2, \mu_2)$  sont équivalents si et seulement si les opérateurs  $H_{\sigma_1\sigma_1}$  et  $H_{\sigma_2\sigma_2}$  (définis en (1.38)) sont les mêmes.

Dans chaque classe d'équivalence, on ne trouve qu'un seul couple de la forme  $(\sigma, \sigma)$  : l'impédance acoustique  $\sigma$  servira donc de représentant canonique de la classe correspondante.

Cette relation d'équivalence permet de partitionner  $\mathcal{A}_{ad}$  et  $\mathcal{A}_{ad}^{vb}$  en classes d'équivalences :

$$(1.39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathcal{A}}_{ad} = \left\{ \sigma \in L^\infty(0, \frac{T}{2}) \mid 0 < \frac{1}{k} \leq \sigma(x) \leq k \quad \text{pp. sur } [0, \frac{T}{2}] \right\} \\ \dot{\mathcal{A}}_{ad}^{vb} = \left\{ \sigma \in \dot{\mathcal{A}}_{ad} \mid \text{var} \sigma \leq M \right\} \end{array} \right.$$

On munit  $\dot{\mathcal{A}}_{ad}$  de la distance quotient  $\dot{d}$  définie par :

$$(1.40) \quad \dot{d}(\sigma_1, \sigma_2) = \text{Inf}_{\substack{(\rho_1, \mu_1) \sim \sigma_1 \\ (\rho_2, \mu_2) \sim \sigma_2}} d((\rho_1, \mu_1), (\rho_2, \mu_2))$$

qui rend  $\dot{\mathcal{A}}_{ad}$  (et  $\dot{\mathcal{A}}_{ad}^{vb}$ ) compact, et on note :

$$(1.41) \quad E \sigma = H \rho \mu \quad \text{lorsque } (\rho, \mu) \sim \sigma$$

Exemple :

Considérons la répartition  $\sigma$  de la Figure 2, dont nous avons vu plus haut que sa distance  $d$  au couple  $(\rho_0, \mu_0) = (0,625, 0,400)$  tendait vers zéro.

Par conséquent, la distance :

$$(1.42) \quad \dot{d}(\sigma, \sigma_o) \rightarrow 0 \quad \text{avec} \quad \sigma_o = \sqrt{\rho_o \mu_o}$$

alors que

$$(1.43) \quad d(\sigma, \sigma_o) \not\rightarrow 0 .$$

Plus généralement, si  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont deux répartitions quelconques de  $\mathcal{A}_{ad}$ , on peut toujours perturber  $\sigma_1$  par une répartition  $\sigma_{1n}$  très oscillante et de valeur moyenne nulle de telle façon que la distance  $d(\sigma_1 + \sigma_{1n}, \sigma_2)$  soit aussi petite que l'on veut : il suffit pour cela de prendre  $\sigma_{1n} = \sigma_{on}$  avec :

$$(1.44) \quad \sigma_{on}(z) = \begin{cases} \sigma_o(z) & z \in \left[ (k-1)\frac{T}{2n}, (k-\frac{1}{2})\frac{T}{2n} \right[ \\ -\sigma_o(z) & z \in \left[ (k-\frac{1}{2})\frac{T}{2n}, k\frac{T}{2n} \right[ \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

où

$$(1.45) \quad \sigma_o = (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)^{1/2} \quad \blacksquare$$

#### 1.5.2. Injectivité de l'application $\sigma \rightarrow H_\sigma$ .

On fait, dans ce paragraphe, l'hypothèse supplémentaire

$$(1.46) \quad \text{var } \sigma < +\infty$$

On peut alors affaiblir les hypothèses sur  $g$  et la Proposition 1 devient :

**Proposition 1bis.** Si  $\sigma \in \mathcal{A}_{ad}$  et vérifie (1.46), alors  $\forall g \in L^2(OT)$ , les équations d'état ont une solution unique telle que  $\frac{dY}{dt}(t) \in L^2(OT)$ .

Notons  $K_\sigma$  l'opérateur  $g \rightarrow \frac{dY}{dt}$ , qui vérifie :

$$(1.47) \quad \forall g \in W^{1,1}(OT) \quad \frac{d}{dt}(H_\sigma g) = K_\sigma g .$$

La Proposition Ibis se résume à :

$$(1.48) \quad K_\sigma \in \mathcal{L}(L^2(0,T) ; L^2(0,T)).$$

La Proposition suivante (cf. GOPINATH et SONDI [6], RAMBERGER [7]) montre que l'on peut reconstituer  $\sigma$  sur l'intervalle  $[0, \frac{T}{2}]$  à partir de  $K_\sigma$  :

Proposition 4. : Avec les hypothèses (1.16) et (1.46) on a, pour tout  $x \in [0, \frac{T}{2}]$

la relation :

$$(1.49) \quad \frac{1}{\sigma(0)} \int_0^{\frac{T}{2}-x} \sigma(x) dx = \int_x^{\frac{T}{2}} g_x(t) dt.$$

avec  $g_x$  définie par :

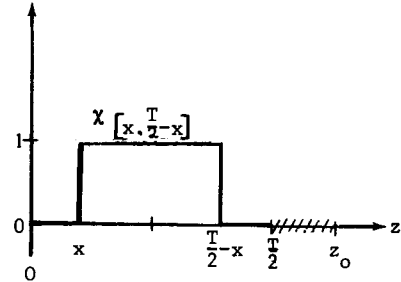
$$(1.50) \quad (K_\sigma)_s g_x = \mathbf{X} \left[ x, \frac{T}{2}-x \right]$$

où

$$(1.51) \quad (K_\sigma)_s = \frac{1}{2} (K_\sigma + K_\sigma^*)$$

est le symétrisé de  $K_\sigma$ , que l'on montre être

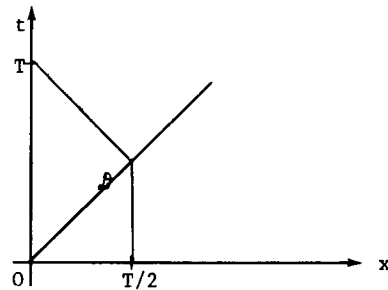
défini positif sur  $L^2(0, \frac{T}{2})$ .



Compte tenu de la Remarque faite au début de ce paragraphe, la Proposition ci-dessus montre que l'application  $\sigma \rightarrow Y_\sigma$  est injective sur  $\mathcal{A}_{ad}^{vb}$  défini en (1.39).

Remarque 3. : La Proposition 4 repose sur le fait que la connaissance, en  $x = 0$ , de  $g = \sigma(0) \frac{\partial y}{\partial x}(t)$  et  $Y(t) = y(0,t)$  détermine  $y(x,t)$  pour tout  $(x,t) \in \mathcal{D}$ , c'est-à-dire que les équations

$$(1.52) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} (\sigma(x) \frac{\partial y}{\partial x}) = 0 \\ \sigma(0) \frac{\partial y}{\partial x}(0,t) = g \quad \forall t \in [0,T] \\ y(0,t) = Y(t) \quad \forall t \in [0,T] \end{array} \right.$$



ont une solution unique sur  $\mathcal{D}$ . C'est l'obtention d'une estimation sur l'énergie dans (1.52) qui requiert l'hypothèse (1.46) de régularité sur  $\sigma$ .

Remarque 4. : On peut envisager l'utilisation de la Proposition 4 comme méthode constructive de résolution du problème inverse. Bien que cette méthode possède l'avantage d'être une méthode directe, nous ne l'avons pas testée, car elle présente a priori les deux inconvénients suivants :

- i) la détermination de  $K_G$  à partir de  $g$  et  $Y(t)$  par déconvolution n'est possible que dans la bande de fréquences de  $g$ ;
- ii) il est plus difficile de tenir compte des informations a priori sur l'impédance  $\sigma$ .

#### 1.7. Conclusions.

Nous avons rappelé qu'on ne pouvait espérer déterminer que des classes d'équivalences de couples  $(\varphi, \omega)$  (ce qui est bien connu), sur lesquelles nous avons défini une distance  $d$  rendant compact l'ensemble  $\mathcal{A}_{ad}$  des  $\sigma$  bornés inférieurement et supérieurement.

Ainsi le problème d'identification posé sous la forme (1.15) admet-il au moins une solution sur  $\mathcal{A}_{ad}$ ; cette solution n'est pas nécessairement à variation bornée; en outre, elle peut être instable par rapport aux perturbations sur l'observation (on n'a pas de résultat d'injectivité sur  $\mathcal{A}_{ad}$ !).

Par contre, le problème de minimisation de  $J$  sur l'ensemble  $\mathcal{A}_{ad}^{vb}$  admet lui aussi une solution (dépendant de la norme  $M$  de la variation de  $\sigma$ ), que l'on peut espérer être stable (par suite de l'injectivité de  $\sigma \rightarrow Y$  sur le compact  $\mathcal{A}_{ad}^{vb}$ ) par rapport aux perturbations sur l'observation.

2. RESULTATS NUMERIQUES.

Nous allons illustrer succinctement dans ce paragraphe les possibilités de la méthode de contrôle proposée au § II et mettre en évidence la faisabilité de cette méthode ainsi que quelques propriétés de stabilité du problème inverse.

Les caractéristiques communes aux essais présentés sont rassemblées ci-dessous<sup>(\*)</sup>

- Le paramètre inconnu, c'est-à-dire l'impédance acoustique  $\sigma$  en fonction du temps de parcours  $x$  est supposé constant sur des couches d'épaisseur  $N_\sigma \frac{\delta}{2}$  (cf. Fig. 4), où  $\delta = \frac{T}{N}$  est la période d'échantillonnage du sismogramme.
- Les équations d'état (1.10)(1.12) sont alors résolues par la méthode des caractéristiques, en utilisant le fait que l'impédance  $\sigma$  est constante sur des sur des couches d'épaisseur  $N_\sigma \frac{\delta}{2}$ .
- L'excitation  $g(t)$  est supposée constante sur  $N_g$  intervalles de temps de longueur  $\delta$  et sa primitive  $s(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau$  est représentée sur la Figure 3.

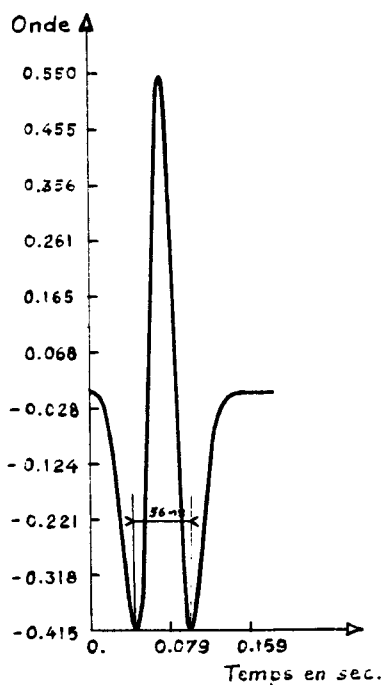


Figure 3. Impulsion  $s(t)$ .

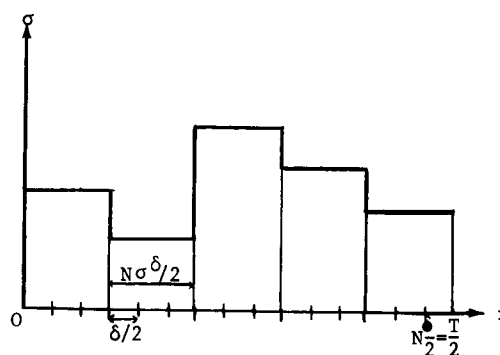


Figure 4. Discretisation de  $\sigma$ .

(\*) Ces essais ont été effectués dans le cadre d'une convention de Recherche sur les problèmes sismiques passée entre l'IRIA-LABORIA et l'INSTITUT FRANCAIS DES PETROLES (I.F.P).

- La réponse  $Y$  du système est, dans ces conditions, constante sur des intervalles de longueur  $\delta$ .
- L'observation  $Y_d$  est simulée en résolvant, comme indiqué ci-dessus, les équations d'état pour une répartition d'impédance  $\sigma_{ex}$  dite "répartition exacte" et en perturbant éventuellement la réponse correspondante par un bruit :

$$Y_d = Y_{\sigma_{ex}} + \eta$$

Le bruit  $\eta$  est obtenu en convoluant un bruit blanc gaussien (discret) par l'excitation  $g(t)$  (bruit que nous appellerons "haute fréquence") ou par l'impulsion  $s(t)$  (bruit "basse fréquence"). Le pourcentage de bruit indiqué dans la suite est le rapport de l'écart quadratique moyen de  $\eta$  sur  $[0, T]$  à l'écart quadratique moyen de  $Y_{\sigma_{ex}}$ .

- Le gradient de  $J$  est calculé par la théorie du contrôle, en utilisant un état adjoint discret.
- La méthode d'optimisation utilisée est une version améliorée du gradient conjugué (cf. LEMARECHAL [8]).
- L'ensemble admissible  $\dot{\mathcal{A}}_{ad}$  est de la forme (1.39) : on n'a pas imposé explicitement de contraintes sur la variation de  $\sigma$  (par suite de la discrétisation et de la forme de  $\dot{\mathcal{A}}_{ad}$ , cette variation est bornée par  $\frac{N}{N_\sigma} (k - \frac{1}{k})$  !).
- Les essais ont été effectués sur l'ordinateur CDC 7600 de la FRANLAB.

### 3.1. Faisabilité de la méthode.

On a d'abord voulu vérifier que, en l'absence de bruit, la méthode permettait de retrouver convenablement la répartition  $\sigma$ .

3.1.1. Exemple académique : (Fig. 5 et 6) : l'impulsion est celle de la Figure 3 (à aire non nulle), le sismogramme  $Y_d(T)$  dure  $T = 2,24s$ , le temps d'échantillonnage  $\delta$  est de 2 ms,  $N_\sigma$  vaut 7, c'est-à-dire  $\sigma$  est constant sur des couches de 7 ms. Il y a donc 160 valeurs inconnues de  $\sigma$ . On constate qu'après 600 itérations de gradient, le sismogramme est parfaitement rendu, et qu'après 1800 itérations (environ 15 mn de calcul), la répartition  $\sigma$  est parfaitement restituée.



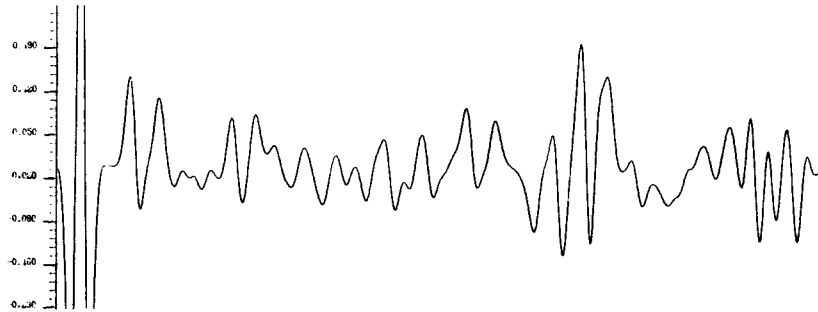


Figure 5. Sismogramme observé (non bruité) et calculé (itération 600).

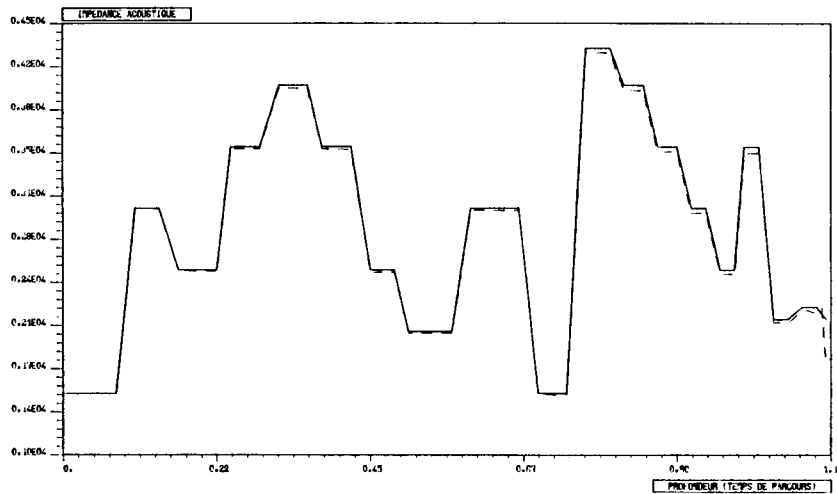


Figure 6. Répartition exacte - et calculée --- à l'itération 1800.

3.1.2. Exemple semi-réaliste (Fig. 7 et 8) : l'impulsion a la forme de la Fig.3, est à aire nulle et ne dure que 100 ms. Le sismogramme dure 2,4s, le pas d'échantillonnage  $\delta$  est de 4 ms,  $N_\sigma$  vaut 2, c'est-à-dire  $\sigma$  est constant sur des couches de 4 ms. Il y a donc ici 300 valeurs inconnues de  $\sigma$ . Le  $\sigma_{\text{exact}}$  utilisé pour la simulation de  $Y_d$  est une répartition réelle relevée au Sahara.

Après 600 itérations de gradient, le sismogramme est parfaitement rendu, ainsi que la répartition  $\sigma$  à l'exception de sa composante continue.

Entre les itérations 600 et 2000 (25mn), on ne constate qu'une légère amélioration de la composante continue sur les 0,2 premières secondes de temps de parcours.

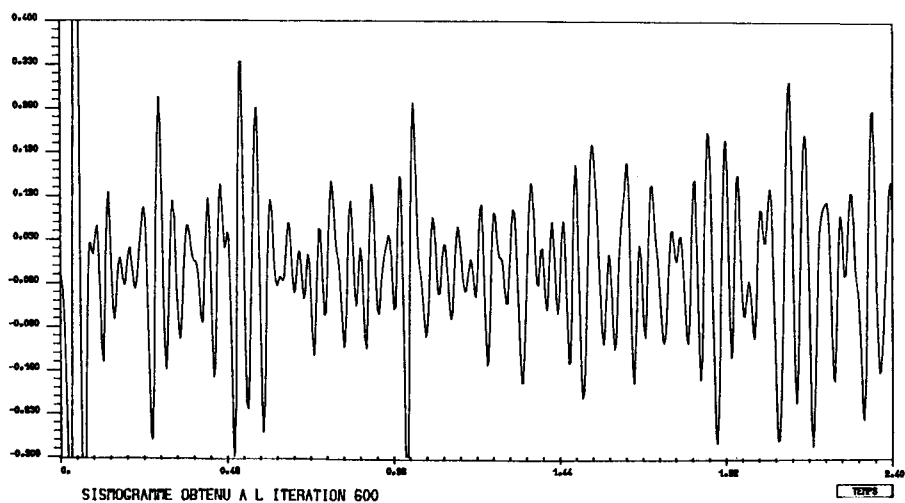


Figure 7. Sismogramme observé (non bruité) et calculé (itération 600).

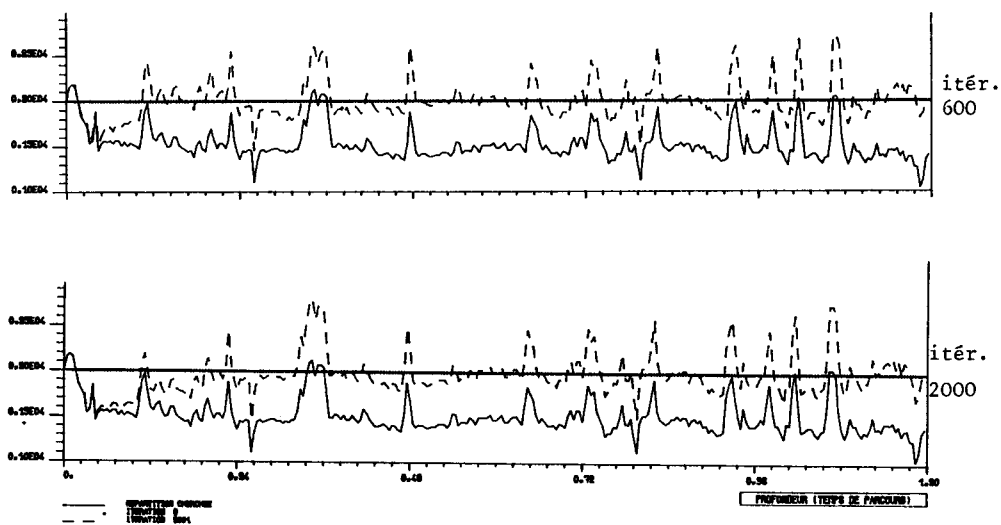


Figure 8. Répartitions exactes - et calculées (itérations 600 et 2000).

### 3.2. Stabilité par rapport au bruit.

Les bruits rencontrés en pratique sont de niveau élevé (50 à 120%) et situés dans une bande de fréquence défavorable (la même que celle du sismogramme non bruité -cf. ci-dessus le mode d'obtention de la perturbation  $\eta$ ). Les essais ont été faits sur l'exemple académique 3.1.1., sur lequel on a testé deux cas de difficulté croissante.

3.2.1. Bruit "Haute fréquence" de 60% (Fig. 9 et 10): le spectre de  $\eta$  est celui de  $g$  c'est-à-dire de la dérivée de l'impulsion  $s$ . Au bout de 2000 itérations (soit 20mn de calcul), on observe la concordance du sismogramme calculé avec le sismogramme observé, donc bruité (le comparer avec le sismogramme non bruité correspondant représenté sur la Fig. 5). La répartition d'impédance  $\sigma$  correspondant est très proche de la répartition  $\sigma_{ex}$  ayant servi à la simulation : la stabilité numérique du problème inverse est excellente dans ce cas.

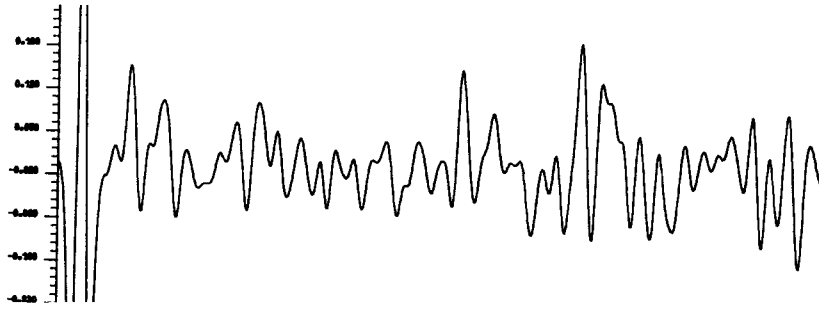


Figure 9. Sismogramme observé (bruit H.F) et calculé à l'itération 2000.

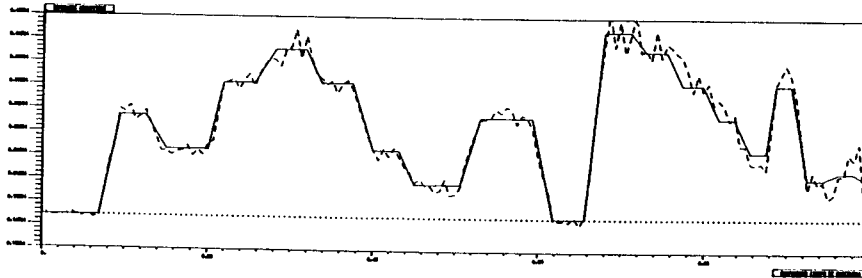


Figure 10. Répartition exacte - et calculée --- à l'itération 2000.

3.2.2. Bruit "Basse fréquence" de 62% (Fig. 11 et 12) : le spectre de  $\eta$  est ici celui de  $s$ , c'est-à-dire le même que celui du sismogramme non bruité. A l'itération 1800 (15 mn de calcul), on obtient encore la concordance entre les sismogrammes calculés et bruités, mais cette fois l'écart entre la répartition calculée et la répartition exacte est plus important, bien que l'allure générale de la répartition soit conservé.

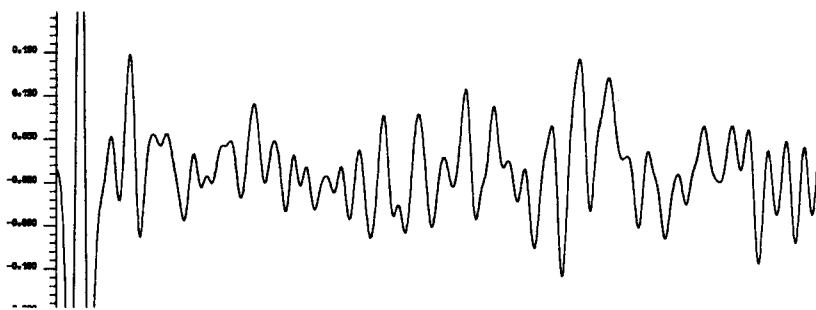


Figure 11. Sismogramme observé (Bruit B.F) et calculé à l'itération 1800.

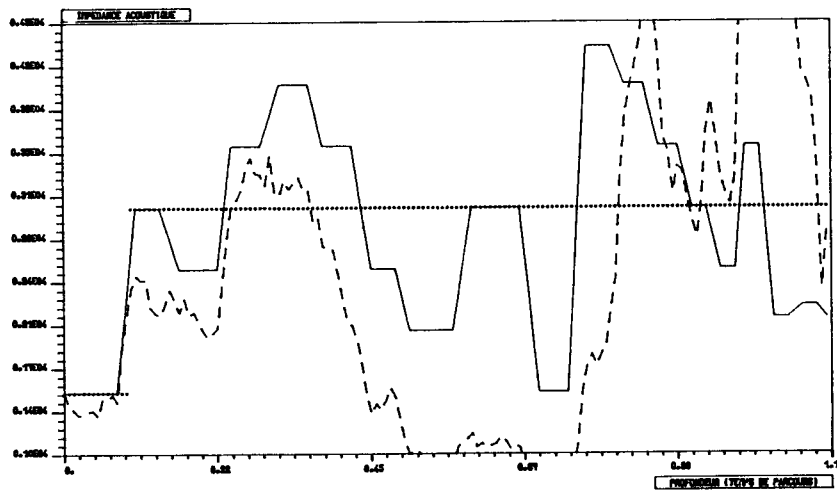


Figure 12. Répartition exacte - et calculée --- à l'itération 1800.

3. CONCLUSIONS.

Nous avons d'abord montré comment poser le problème inverse de sismique réflexion comme un problème de contrôle de façon à ce qu'il admette au moins une solution et nous avons précisé les hypothèses sous lesquelles on pouvait raisonnablement s'attendre à la stabilité de ce problème inverse.

On a ensuite donné des résultats numériques montrant que cette formulation était praticable numériquement et confirmant les résultats de stabilité escomptés.

Les recherches portent maintenant sur la diminution des temps de calcul et l'amélioration de la stabilité en présence de bruits "basse fréquence".

-----  
-----

REFERENCES

- 1 BAMBERGER, A. "Identification des coefficients d'une équation des ondes à une dimension d'espace," à paraître en 1976.
- 2 CHAVENT, G. "Identification of functional parameters in partial differential equations", in "Identification of parameters in Distributed Systems" edited by R.E.Goodson and M. Polis, A.S.M.E, New-York, (1974).
- 3 CHAVENT, G., LAILLY, P. et BAMBERGER, A. "Une application de la théorie du Contrôle à un problème inverse de sismique". Rapport I.F.P. N° 23.767, Fév. 1976 et Rapport LABORIA N° 172, soumis aux Annales de Géophysique.
- 4 CHAVENT, G. LEMONNIER, P. "Identification de la non linéarité dans une équation parabolique quasilinéaire". Applied Mathematics and Optimization, Vol. 1 N° 2, Springer-Verlag (1974).
- 5 GERVER, M.L. "The inverse problem for vibrating string equation" Izv. Acad.Sci. URSS, Physic Solid Earth, 1970-71.
- 6 GOPINATH et SONDHI "Inversion of the telegraph equation and the synthesis of non-uniform lines, Proceedings of I.E.E.E., Vol. 59, N° 3, March 1971.
- 7 KUNETZ, G. "Quelques exemples d'analyse d'enregistrements sismiques". Geophysical Prospecting, 1963, 11, N° 4.
- 8 LEMARECHAL, C. "Non differentiable optimization subgradient and  $\epsilon$ -subgradient Methods". Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 117, Optimization and Operation Research, Springer (1976).
- 9 LIONS, J.L. "Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles" Dunod-Gauthier Villars, Paris (1968).

A.B.  
*Ecole Polytechnique*  
*Centre de Mathématiques Appliquées*  
*91128 - Palaiseau Cedex*  
*France*

G.C.  
*IRIA-LABORIA*  
*Domaine de Voluceau*  
*Rocquencourt*  
*78150 - Le Chesnay, France*