Ann. Sc. Math. Québec, 1977, vol. I, No. 2, pp. 131-152

EQUATIONS ET INEQUATIONS VARIATIONNELLES A RETARD

Michel Artola

INTRODUCTION

L'objet de cet exposé est de présenter quelques résultats obtenus dans la dernière décade sur les problèmes variationnels retardés.

De tels problèmes ont une motivation appliquée car ils interviennent dans de nombreux domaines : Biologie et Sciences Humaines, Economie, Neutronique(théorie de l'âge dans un milieu ralentisseur) viscoélasticité dans les matériaux à mémoire longue, problèmes d'asservissements retardés en Thermique et de manière générale dans toute théorie où se manifeste un phénomène d'Hystérésis.

Nous ne considérons pas ici le cadre des systèmes d'équations différentielles ou intégro différentielles en dimension finie (ou non finie) cadre qui a suscité une multitude de travaux pour lesquels nous renvoyons à Hanalay [1], Myskis [1], [2] et à l'exposé de M. Delfour [1] où l'on trouvera une bibliographie assez complète sur le sujet principalement dans le cas de systèmes à un ou plusieurs retards constants.

On considère ici les problèmes à retard pour les équations et les inéquations aux dérivées partielles en prenant pour point de départ les résultats de l'Auteur [1], [2], [3] et de C. Baïocchi [1] (1967) . Pour une liste des résultats antérieurs on pourra consulter A. Myskis (loc. cit).
Nous nous plaçons dans le cadre opérationnel usuel des problèmes aux limites cf. Lions [1], [2], Lions Magenes [1] .

Le plan suivi est le suivant :

I - Equations d'évolution à Retard

1 - Position du problème : problèmes de Cauchy à données ponctuelles ou épaisses.

2 - Exemples

2.1. Retard constant

2.2. Retard variable

2.3. Retard dans les conditions aux limites

3 - Théorie du contrôle et retard

3.1. Un exemple

3.2. Méthode Q.R. et retard

3.3. Dégénérescence

4 - Problèmes périodiques

5 - Autres équations

II - Inéquations d'évolution à retard

1 - Inéquations d'évolution du 1er ordre

2 - Inéquations d'évolution du 2e ordre.

III - Approximation numérique des problèmes à retard

1 - Un problème stationnaire

2 - Problème d'évolution : méthode de décomposition

3 - Méthodes diverses

4 - Problèmes périodiques.

IV - Bibliographie.

I - EQUATIONS D'EVOLUTION A RETARD

1 - Position du problème : Problème de Cauchy à données ponctuelles ou épaisses.

Soit pour fixer les idées, un espace de Hilbert réel ou complexe X, F(X) un espace de fonctions à valeurs dans X (contenu dans l'espace des fonctions continues de $[0,T] \to X$, $T > 0$).

On considère :

$$(1\text{-}1) \quad \begin{cases} \text{i)} & t \to \omega(t) \text{ une fonction mesurable dans } (0,T) \\ \text{ii)} & E_o = \{ t \,;\, \psi(t) = t - \omega(t) > 0 \quad \text{pp} \} \\ \text{iii)} & E_1 \text{ le complémentaire de } E_o \text{ dans } (0,T) \end{cases}$$

on pose (par exemple) le problème :

$$(1\text{-}2) \quad \begin{cases} & \text{Trouver } u \in F(X) \text{ vérifiant (en un sens à préciser)} \\ \text{i)} & \dfrac{\partial u}{\partial t} + A(t)\,u(t) + B(t)\,u(\psi(t)) + \displaystyle\int_o^t K(s,t)\,u(s)\,ds = f(t) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad \text{pp en } t \in (0,T) \\ \text{ii)} & u(o) = u_o \text{ donné dans } X \\ \text{iii)} & u(t) = \tilde{u}(t) \quad \text{pp } t \in \check{E}_1 = \psi(E_1) \end{cases}$$

où $A(t)$, $B(t)$, $K(s,t)$ sont des opérateurs linéaires ou non f et u des fonctions données.

La condition 1-2-ii) est une donnée de Cauchy ponctuelle

La condition 1-2-iii) est une condition de Cauchy épaisse.

2 - Exemples

Avant de donner des exemples, précisons le cadre fonctionnel et les notations.

Nous supposerons que tous les espaces considérés sont réels (ce qui n'a rien d'essentiel) et séparables.

D'une manière générale, on se donne :

- V un espace de Hilbert (resp. de Banach réflexif)
- H un espace de Hilbert

dans la situation suivante :

(2-1) V est inclus dans H avec injection continue et densité ; alors si on identifie H et son dual et si V' désigne le dual de V, nous avons les inclusions :

(2-2) $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$ (injections continues et densité)

on note $u \to \|u\|$ la norme dans V, (f, g) le produit scalaire dans H ou dans la dualité entre V et V' ; $f \to |f|$ désigne la norme dans H, $f \to \|f\|_*$ la norme dans V'.

Soit $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $a, b \in \mathbb{R}$, $L^p(a, b ; X)$ (X Banach, norme $|\ |_X$) désigne l'espace des (classes de) fonctions de puissance p ième sommable pour la mesure de Lebesgue, à valeurs dans X muni de sa structure d'espace de Banach. $\mathcal{C}^0([a, b] ; X)$ désigne l'espace de Banach des fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs dans X.

Enfin, si X et Y sont 2 espaces topologiques, $\mathcal{L}(X, Y)$ désignera l'espace des applications linéaires continues de $X \to Y$.

Opérateur $A(t)$. Si V est un espace de Hilbert, pour chaque $t \in [0, T]$ on se donne une forme bilinéaire continue $a(t ; u, v)$ sur V ayant les propriétés suivantes.

(2-3) $\begin{cases} \text{Pour tout } u, v \text{ la fonction } t \to a(t ; u,v) \text{ est mesurable} \\ \text{et } |a(t ; u, v)| \leqslant M \|u\| . \|v\| \text{ , M cte indépendante de } t, u, v \end{cases}$

Alors pour u fixé dans V, la forme linéaire

$$v \to a(t ; u, v)$$

est continue sur V, donc peut s'écrire $a(t ; u, v) = (A(t) u, v)$ avec $A(t) u \in V'$ $\|A(t) u\|_* \leqslant M \|u\|$, pour tout $u \in V$.

Ainsi la famille d'opérateurs $A(t) \in \mathcal{L}(V, V')$. On la supposera coercive i.e. vérifiant :

(2-4) Il existe $\lambda, \alpha > 0$ tels que $a(t;u,v) + \lambda |u|^2 \geqslant \alpha \|u\|^2$ pour tout $u \in V$

On rapelle alors le résultat suivant pour lequel on renvoie à J. L. Lions [1], [2] Théorème I-1 : On suppose que 2-1 à 2-4 ont lieu.

Soit f et u_o donnés avec :

(2-5) $f \in L^2(0, T ; V')$ (resp. $L^1(0, T ; H)$)

(2-6) $u_o \in H$

il existe une fonction u et une seule , vérifiant:

(2-7) $u \in L^2(0, T ; V)$, $u' = \frac{du}{dt} \in L^2(0,T;V')$ (resp. $u' \in L^2(0,T;V')+L^1(0,T;H)$)

(2-8) $A(t) u + u' = f$

(2-9) $u(o) = u_o$

On notera que u vérifiant (2-7) est la classe d'une fonction (notée encore u) $u \in \mathcal{C}^o(0, T ; H)$, si bien que 2-5 a un sens.

2-1 Cas du Retard Constant

On introduit une famille d'opérateurs $B(t) \in \mathcal{L}(V, V')$ avec

(2-10) $\|B(t)\|_{\mathcal{L}(V, V')} \leqslant \beta$ pour tout $t \in (0, T)$

pour $\omega_o > 0$ fixé, on considère l'équation :

(2-11) $u'(t) + A(t) u(t) + B(t) u(t-\omega_o) = f(t)$ $t > 0$, (f vérifiant 2-5)

avec

(2-12) $u = \tilde{u}_o$ pour $t \in]-\omega_o, 0[$, $\tilde{u}_o \in L^2(-\omega_o, 0 ; V)$ donné

(2-13) $u \in L^2(0\ T ; V) \cap \mathcal{C}^o([0, T] ;H)$

(2-14) $u(o) = u_o$, u_o donné dans H.

(2-11) est une équation parabolique avec retard constant ω_o.

La solution du problème ici est immédiate. Sous les hypothèses du théorème (I-1) il y a existence et unicité , ce qui s'obtient (en considérant d'abord le problème sur $(0, \omega_o)$ (Pb de Cauchy ponctuel) , puis sur $(\omega_o, 2\omega_o)$ et ainsi de suite jusqu'à atteindre T) par application itérée du Th. I-1, cf. Artola [2] , Baïocchi [1], Lions-Lattes [1] .

2-2 Retards variables

On introduit maintenent une fonction ω vérifiant

$$(2\text{-}15)\qquad \begin{cases} t \to \omega(t) \quad \text{est mesurable dans } (0,T) \\ \text{si } -\omega_o = \inf\limits_{t\in(0,T)} \psi(t) \quad , \quad \psi(t) = 1-\omega(t) \qquad \text{alors } \omega_o > 0. \end{cases}$$

et l'on considère (avec les hypothèses du n° 2-1) l'équation

$$(2\text{-}16)\qquad u'(t) + A(t)\,u(t) + B(t)\,u(\psi(t)) = f(t)$$

avec (2-12), (2-13), (2-14) où maintenant ω_o est défini par (2-15)

(2-16) est une équation parabolique à retard variable en fonction de t

Ici, l'existence et l'unicité de u vérifiant (2-12), (2-13), (2-14), (2-16) n'est plus aussi immédiate que le cas ω = cte et ne s'obtient pas en général sous la seule hypothèse (2-15) avec B(t) donné par (2-10).

L'étude du cas $\omega(t) = \omega_o$ suggère cependant de transformer le problème à donnée épaisse (2-12) à (2-16) en un problème de Cauchy ponctuel.

Pour cela on introduit :

- L'opérateur M_o défini (pour u mesurable à valeur dans V par exemple)

$$(2\text{-}17)\qquad M_o u(t) = \begin{cases} u(\psi(t)) & \text{si } \psi(t) > 0 \quad \text{p. p.} \\ 0 & \text{si } \psi(t) \leq 0 \quad \text{p. p.} \end{cases}$$

- la fonction $\tilde{f}$ définie par

$$(2\text{-}18)\qquad \tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } \psi(t) > 0 \quad \text{p. p.} \\ f(t) - \tilde{u}(\psi(t)) & \text{si } \psi(t) \leq 0 \quad \text{p. p.} \end{cases}$$

Alors en posant :

$$(2\text{-}19)\qquad M(t) = B(t) \circ M_o$$

le problème (2-12) à (2-16) devient :

$$(\text{p})\quad \begin{cases} & \text{Trouver } u \text{ vérifiant :} \\ \text{i)} & (2\text{-}13) \\ \text{ii)} & (2\text{-}14) \\ \text{iii)} & u'(t) + A(t)\,u(t) + (M(t)\,u)\,(t) = \tilde{f}(t) \\ & \text{où } \tilde{f} \text{ est comme dans } L^2(0,T;V') \text{ (resp. } L^1(0,T;H)+L^2(0,T;V')) \\ & \text{si } f \text{ est donné par 2-15} \end{cases}$$

qui est un problème de Cauchy ponctuel.

En général, sauf hypothèses de régularité sur ω, pour $u \in L^2(0,T;V)$, $M_o \notin \mathcal{L}(L^2(0,T;V))$ et on ne peut pas définir $A(t) + M(t)$ comme opérateur coercif de $\mathcal{L}(L^2(0,T;V), L^2(0,T;V'))$, si bien que le problème (P) n'est pas de même nature que le problème parabolique usuel considéré au Th. I-1. Il apparaît comme une perturbation de celui-ci.

Il est possible de dégager les propriétés de base assez générales de l'opérateur M_o. On a avec ω vérifiant (2-15) et X un espace de Banach

$$\text{(2-20)} \qquad \begin{cases} \text{il existe une cte } C > 0 \text{ avec} \\ \|M_o u\|_{L^\infty(0,T\,;\,X)} \leq C\,\|u\|_{L^\infty(0,T\,;\,X)} \end{cases}$$

En outre M_o est de type "local" au sens suivant :

Tout d'abord, si t est fixé dans (0, T) il est possible d'identifier $L^\infty(0,t\,;\,X)$ avec le sous-espace de $L^\infty(0,T\,;\,X)$ défini par

$$\{\, u \mid u \in L^\infty(0,T\,;\,X) \quad , \quad u(s) = 0 \quad \text{p. p.} \quad s > t \,\}$$

Dans ces conditions, si $u \in L^\infty(0,T\,;\,X)$ on peut définir sa restriction à (0, t) par

$$\text{(2-21)} \qquad r_t u\,(s) = \begin{cases} u(s) & \text{p. p.} \quad s \in (o, t) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

ainsi

$$\text{(2-22)} \qquad \begin{cases} r_t u \in L^\infty(0, t\,;\,X) \\ \|r_t u\|_{L^\infty(0,T;X)} \leq \|u\|_{L^\infty(0,T\,;\,X)} \end{cases}$$

On pose alors la :

<u>Définition I-1</u> : Soient X et Y deux espaces de Banach

$$\mathfrak{M} \in \mathcal{L}(L^\infty(0,T\,;\,X), L^\infty(0,T\,;\,Y))$$

$\mathfrak{M}$ est dit de type local ou de type "L", si $\mathfrak{M}$ vérifie

$$\text{(2-23)} \qquad \begin{cases} \text{il existe } \mu = \mu(T) > 0 \quad \text{tel que} \\ \text{Pour tout } t_o \in (0, T) \quad \|r_{t_o} \mathfrak{M} u\|_{L^\infty(0,T;Y)} \leq \mu \|r_{t_o} u\|_{L^\infty(0,T;X)} \end{cases}$$

Remarque 2-1 : - L'opérateur M_o diminuant les supports, (2-23) est évidemment vérifiée et la propriété se transmet aussitôt à la famille M(t) d'opérateurs définie par (2-19).

- Il est utile de noter (cf. n° 5 ci-après) que l'ensemble des opérateurs $\mathcal{M}$ vérifiant (2-23) contient les opérateurs définis par certains noyaux et les opérateurs de convolution augmentent les supports cf. Artola [2].

- Bien entendu une famille $\mathcal{M}(t) \in \mathcal{L}(X, Y)$ avec $\|\mathcal{M}(t)\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq c$ (cte indépendante de t) vérifie (2-23).

On peut alors démontrer le théorème suivant.

Théorème I-2 : On suppose :

i) l'injection de V dans H compacte

ii) A(t) donnée comme au Th. I-1

iii) $M \in \mathcal{L}(L^\infty(0,T;H) ; L^\infty(0,T;H))$ de type "L" vérifiant en outre

(2-24) si $u_\mu(t) \to u(t)$ p. p. dans H, $(Mu_\mu)(t) \to (Mu)(t)$ p. p. dans H.

iv) u_o donné dans H, $\tilde{f}$ donné dans $L^2(0,T ; V')$ (resp. $L^1(0,T;H) + L^2(0,T ; V')$).

Alors le problème (P) admet une solution unique.

Remarque 2-2 :

Ceci résoud donc le problème de retard initial dans le cas où ω est donnée par (2-15), avec M défini par (2-19), mais où

(2-25) $$B(t) \in \mathcal{L}(H, H), \ \|B(t)\|_{\mathcal{L}(H,H)} \leq \beta \quad \text{(indépendant de t)}$$

Remarque 2-3 : Lorsque :

(2-26) $M \in \mathcal{L}(L^\infty(0,T ; V), L^\infty(0,T ; H))$ de type local, vérifie (2-24) on a un résultat analogue au Th. I-2, mais avec des hypothèses supplémentaires sur a(t, u, v).

Par exemple, si :

(2-27)
$$\begin{cases} \text{i)} & a(t;u,v) = a(t,v,u) \quad \text{pour tout } u, v \in V \\ \text{ii)} & t \to a(t; u, v) \text{ est dérivable au sens des distributions et a} \\ & \text{une dérivée mesurable bornée pour tout } u, v \in V. \end{cases}$$

alors on a une conclusion analogue au théorème I-2.

Cela a lieu en particulier avec M défini par 2-15 et

$$(2\text{-}28) \qquad B(t) \in \mathcal{L}(V\,,\,H)\,,\ \|B(t)\|_{\mathcal{L}(H,H)} \leqslant \beta$$

Remarque 2-4 :

Pour la démonstration de ces résultats on renvoie à Artola [1] [2] [3] ; la méthode de démonstration est celle de Faedo-Galerkine et le passage à la limite s'effectue par un résultat de compacité exigeant des estimations a priori sur les dérivées fractionnaires cf. Lions [3] , [4] d'où l'hypothèse de compacité de l'injection de V dans H.

Les difficultés de passage à la limite (surmontées ici par des méthodes "non linéaires") disparaissent lorsque l'on peut définir M comme opérateur continu de $L^2(0,T\,;\,H)$ dans lui même resp (de $L^2(0,T\,;\,V)$ dans $L^2(0,T\,;\,H)$) ou encore comme opérateur continu de $L^2(0,T\,;\,V)$ dans $L^2(0,T\,;\,V')$ mais avec une norme "petite" devant la constante de coercivité α de l'opérateur A.

Ce dernier cas est obtenu par exemple par M défini par 2-15 avec B vérifiant (2-10) et la fonction ω suffisamment régulière et β convenable.

Exemples : 1) $\omega(t) = \omega_o$

2) ω de classe C^1, $|\psi'(o)| \geqslant \gamma_o > 0$, $\beta < \sqrt{\gamma_o}\,.\,\alpha$

Pour des résultats analogues avec des méthodes différentes voir Baïocchi [1] .

Remarque 2-5 :

Nous nous sommes bornés à ne considérer ici qu'un problème modèle avec un seul retard en la variable t et dans un cadre linéaire.

De nombreuses variantes sont possibles et rentrant dans le cadre d'opérateur M linéaires possédant des propriétés analogues à (2-20) (2-23) (2-24) :

i) cas de plusieurs retards en t

ii) cas des retards en t et dans les espaces

iii) opérateurs intégro-différentiels à retards etc.

Pour cela on renvoie à Artola [2], Baïocchi [1] , Reverdy [1] (Pb. stationnaires).

iv) Pour le cas d'opérateurs A, M non linéaires voir Artola [2] , Duvaut-Lions [1] et M. Gaultier [1]. On trouvera aussi dans le travail de Gaultier l'étude d'équations à coefficients opérateurs multivoques.

2-3 Retards dans les conditions aux limites

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, Γ sa frontière supposée suffisamment régulière.
Soit V un sous espace fermé de $H^2(\Omega)$ avec

$$H^1_o(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega)$$

on suppose Ω borné de sorte que l'injection de $H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ soit compacte.

Exemple 1 : (Pas de retard dans les conditions aux limites)

On prend :

$$\text{(2-30)} \qquad a(u,v) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx \ , \quad u, v \in H^1(\Omega)$$

$$\text{(2-31)} \qquad \begin{cases} b(u,v) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}\, v\, dx + \int_\Omega b_o(x) u v\, dx, \quad u, v \in H^1(\Omega) \\ b_i \in L^\infty(\Omega) \qquad i = 0, 1, \dots, n \end{cases}$$

ω et M_o étant définis par (2-15) - (2-17) l'opérateur $M(t) = B \circ M_o$ est tel que :

$$\text{(2-32)} \qquad Mu(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x, \psi(t)) + b_o(x)\, u(x, \psi(t)) & \text{si } \psi(t) > 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

alors

$$\text{(2-33)} \qquad \begin{cases} \text{Pour } \tilde{u} \text{ donné dans } L^2(-\omega_o, o\, ; V),\ u_o \in L^2(\Omega) \\ \text{il existe } u \text{ unique vérifiant :} \\ \text{i)} \quad u = \tilde{u} \qquad t \in (-\omega_o, o) \\ \text{ii)} \quad r_T u \in L^2(0T\, ; V) \cap \mathcal{C}^o([0,T]\, ; L^2(\Omega)) \\ \text{iii)} \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + M(t) u = 0 \qquad \text{dans } \Omega_T = \Omega \times]0, T[\\ \text{iv)} \quad u(o) = u_o \end{cases}$$

Les conditions aux limites étant contenues dans l'appartenance de $r_T u$ à $L^2(0,T;V)$

Exemple 2 : (Retard dans les conditions aux limites)

On se donne une famille d'opérateurs $B_o(t) \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma)\, ,\, H^{-1/2}(\Gamma))$

on note $\gamma_o u = u|_\Gamma$, $u \in H^2(\Omega)$; alors on suppose que $B_o(t)$ vérifie :

$$(2\text{-}34) \qquad \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \;,\; \exists\ (C\varepsilon) \text{ indépendant de } t, \text{ tel que} \\ |\langle B_o(t)\gamma_o u, \;\gamma_o v\rangle| \leqslant \varepsilon \,\|u\|^2_{H^1(\Omega)} + C(\varepsilon)\|v\|^2_{L^2(\Omega)} \end{cases}$$

ce qui a lieu si $B_o(t)$ forme une famille d'opérateurs tangents à Γ.

Si maintenant on suppose que $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, Γ_i $i = 1, 2$ de capacité $> o$

et si

$$(2\text{-}35) \qquad V = \{ u \in H^1(\Omega) \;,\; \gamma_o u = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \}$$

alors il existe u vérifiant par exemple

$$(2\text{-}36) \qquad \begin{cases} u = 0 \quad \text{pour } t < 0 \\ u \in L^2(0,T\,;\,V) \cap \mathcal{C}^o([0,T]\,;\,L^2(\Omega)) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad \text{dans } \Omega_T \\ \gamma_o u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} + B_o(t)\,\gamma_o u(\psi(t)) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2 \end{cases}$$

Exemple 3 :

Dans le même ordre d'idée, l'équation suivante intervient en Thermique dans le cas d'un asservissement retardé (cf. Duvaut - Lions [1]).

Soit τ un réel > 0 on définit M par :

$$(2\text{-}37) \qquad Mu(t) = \frac{u(t) - u(t-\tau)}{\tau}$$

on considère une fonction $\lambda \to \Phi(\lambda)$ vérifiant :

$$(2\text{-}38) \qquad \Phi(\lambda) \leqslant C_1 |\lambda| + C_2$$

alors on montre (cf. Duvaut-Lions (loc. cit.)) .

Il existe u unique vérifiant :

$$(2\text{-}39)\quad \begin{cases} u = \tilde{u} & \text{dans } -\tau \leq t < 0 \quad , \ \tilde{u} \text{ donné dans } L^2(0,T, H^1(\Omega)) \\ u(o) = u_o & , \ u_o \quad '' \quad '' \quad H \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{dans } \Omega_T \ , \ f \quad '' \quad '' \quad L^2(0,T; L^2(\Omega)) \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + \Phi(Mu) = 0 & \text{sur } \Gamma_T = \Gamma \times \ ]0, T[\end{cases}$$

3 - Théorie du contrôle et retard

3-1 Un exemple (cf. Lions [3])

On désigne par $W(0,T)$ l'espace des $u \in L^2(0,T\ ;\ V)$, $u' \in L^2(0,T\ ;\ V')$ où V, H, V' sont donnés vérifiant 2-1 et soit $A(t)$, $M \equiv M_o$ définis comme au n°2.

On note que $u \in W(0,T)$ est (la classe d') une fonction continue de $(0,T) \to H$.

Désignons par $\mathcal{U}$ l'espace de Hilbert des contrôles et soit $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{H})$, $\mathcal{H} = L^2(0,T;H)$
On considère le système dont l'état $y(v)$, $v \in \mathcal{U}$ vérifie

$$(3\text{-}1)\quad \begin{cases} y'(v) + A(t)\, y(v) + M_o\, y(v) = f + B\, v \\ y(o, v) = y_o \in H \quad , \quad f \text{ donné dans } L^2(0,T\ ;\ H) \end{cases}$$

On suppose la fonction coût donnée par :

$$(3\text{-}2)\qquad J(o) = \int_0^T |y(t,v) - z_d|^2\, dt + (\mathcal{N} v, v)_{\mathcal{U}}$$

où $\mathcal{N} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ et z_d donné dant $L^2(0T\ ;\ H)$. $\mathcal{U}_{ad}$ convexe fermé de $\mathcal{U}$ est l'ensemble des contrôles admissibles, le contrôle optimal $u \in \mathcal{U}_{ad}$.

on a:

$$M_o \in \mathcal{L}\ (\mathcal{C}^o([0,T]\ ;\ H)\ ;\ L^2(0,T\ ;\ H))$$

et donc :

$$(3\text{-}3)\qquad M_o \in \mathcal{L}\,(W\ (0,T)\ ;\ L^2(0,T\ ;\ H))$$

ainsi l'adjoint M_o^* vérifie

$$(3\text{-}4)\qquad M_o^* \in \mathcal{L}\,(L^2(0,T\ ;\ H)\ ;\ (W\,(0,T))')$$

et on définit l'état adjoint $p(u)$ par :

$$(3\text{-}5)\qquad \begin{cases} -\dfrac{dp(u)}{dt} + A^*(t)\,p(u) + M_o^*\,p(u) = y(u) - z_d \\ p(T,u) = 0 \end{cases}$$

qui dans le cas $\omega =$ cte par exemple :

$$(3\text{-}6)\qquad \begin{cases} -\dfrac{dp(u)}{dt} + A^*(t)\,p(u) + p(t+\omega\,;\,u) = y(t,u) - z_d\ , & t \in \,]\,0, T-\omega\,[\\ -\dfrac{dp(u)}{dt} + A^*(t)\,p(u) = y(t,u) - z_d\ , & t \in \,]\,T-\omega, T\,[\\ p(T,u) = 0 \end{cases}$$

Le contrôle optimal u est caractérisé par :

$$\int_0^T (y\,(t;u) - z_d\ ,\ y(t,v) - y(t,u))\,dt + (\,\mathcal{N} u\ ,\ v-u)_{\mathcal{U}} \geqslant 0 \quad u \in \mathcal{U}_{od}$$

ce qui induit, en utilisant (3-5) et l'isomorphisme canonique $\Lambda_{\mathcal{U}}$ de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{U}'$:

$$(3\text{-}7)\qquad (\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} B^* p(u) + \mathcal{N} u\ ,\ v-u)_{\mathcal{U}} \geqslant 0 \qquad \text{pour tout } v \in \mathcal{U}_{ad}$$

et le contrôle optimal u est donné par la résolution de (3-1) avec v=u (3-5) et (3-7)

Dans le cas où $\omega(t) = \omega$ (et condition épaisse nulle) on aura à résoudre:

$$(3\text{-}8)\qquad \begin{cases} y'(u) + A(t)\,y(u) + y(t-\omega\,;\,u) = f & t > \omega \\ y'(u) + A(t)\,y(u) \quad y(o\,;\,u) = y_o & 0 < t < \omega \end{cases}$$

(3-6) et l'équation (3-7) correspondante.

3-2 Méthode Q. R. et retard cf. Lions-Lattes [1]

On considère ici le problème de trouver $\xi(x)$ telle que si $\mathcal{U}(x,t,\xi) = u(x,t)$ est la solution de

$$(\mathrm{I})\begin{cases} (3\text{-}7) & \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x,t) \qquad t > 0 \qquad x \subset [0,1] \\ (3\text{-}8) & u(x,o) = \xi(x) \\ (3\text{-}9) & u(o,t) = u(1,t) = 0 \qquad t > 0 \end{cases}$$

on ait

$$(3\text{-}10)\qquad J(u,\xi) = \int_{T-\tau}^{T+\tau} \int_0^1 [u(x,t) - \chi(x)]^2\,dx\ ,\ \text{minimum},\ \chi\ ,\ T \text{ et}$$

τ étant donnés τ assez petit $J(u,\xi)$ est une fonctionnelle épaisse.

La méthode de Quasi-Réversibilité (Q. R.) conduit à chercher $\xi(x) = u(x,o)$ où $u(x,t)$ est solution de

$$
\text{(II)}\begin{cases}
(3\text{-}11) \quad \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - \varepsilon\Delta^2 u - \varepsilon u(x,t+2\tau) = f(x,t) \\
(3\text{-}12) \quad u(x,t) = \chi(x) \quad \text{sur } t \in [T-\tau, T+\tau] \\
(3\text{-}13) \quad \begin{cases} u(1,t) = u(o,t) = 0 \\ \Delta u(1,t) = \Delta u(0,t) = 0 \end{cases}
\end{cases}
$$

en intégrant dans le sens croissant du temps et en posant :

$$(3\text{-}14) \qquad w(x,t) = u(x, T-\tau-t)$$

on est ramené à chercher $\xi = w(x,o)$ où $w(x,t)$ vérifie le problème à retard:

$$
\text{(III)}\begin{cases}
(3\text{-}15) \quad \dfrac{\partial w}{\partial t} + \Delta w + \varepsilon\Delta^2 w + \varepsilon w(x,t-2\tau) = -f(x,t) \quad t \in [0, T-\tau] \\
(3\text{-}16) \quad w(x,t) = \chi(x) \quad t \in (-2\tau, 0) \\
(3\text{-}17) \quad \left.\begin{aligned} w(x,t) &= 0 \\ \Delta w &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ si } x=0 \text{ et } x=1 \quad , \ \in]0, T-\tau[
\end{cases}
$$

Pour d'autres considérations sur la méthode Q. R. et les équations à retards on renvoie à Lions-Lattes (loc. cit) .

3-3 Dégénérescence

Le résultat suivant est dû à P. Charrier [1] qui généralise ainsi au cas des équations d'évolution de type parabolique des résultats antérieurs de V. S. Popov (cf. Bibliographie de P. Charrier [1]). On suppose que A est le générateur d'un semi groupe $T(t)$ borné et continu dans l'espace de Hilbert H de domaine $D(A)$ dense dans H.

Soit B un autre opérateur de domaine dense dans H, on considère l'équation à retard

$$
(3\text{-}18) \qquad \begin{cases} y'(t) + Ay(t) + B(y(t-h)) = 0 \qquad h < 0 \text{ donné} \\ y(\theta) = y_o(\theta) \quad , \quad \theta \in [-h, o] \end{cases}
$$

$y_o \in \mathcal{C}^o([-h, o];H)$ donné

Soient donnés : $x_o \in H$ et $\tau > 0$. On dit selon Popov que (3-18) est dégénéré par rapport à x_o à partir de l'instant τ si et seulement si toute solution $t \to y(t, y_o)$ vérifie :

(3-19) $\quad (x_o, y(t, y_o)) = 0$ pour tout $t \geq \tau$.

Le résultat de P. Charrier est alors le suivant :
on suppose :

(3-20) $\quad \begin{cases} y_o \in \mathcal{C}^o([0, T] ; \mathcal{D}(A)) \cap \mathcal{C}^1([0,T]; H) \ , \ \mathcal{D}(A) \text{ muni de la} \\ \text{norme du graphe.} \end{cases}$

Alors si $x_o \in H$ est tel qu'il existe $\xi_o \in \mathcal{D}(A)$ vérifiant

(3-21) $\quad (x_o, \xi_o) = 1 \ , \ (x_o, T(h)\xi_o) = 0 \ , \ (x_o, AT(h)\xi_o) = 0$

on peut construire $B \in \mathcal{L}(D(A), H)$ tel que (3-18) soit dégénérée à partir de l'instant $t=2h$.
Pour un exemple de cette situation on renvoie à Charrier [1] .

4 - Problèmes périodiques.

Le problème est le suivant :
on cherche u vérifiant :

(4-1) $\quad u \in L^2(0,T ; V) \ , \ u' \in L^2(0,T ; V')$

(4-2) $\quad \frac{\partial u}{\partial t} + A(t)u + Mu = \tilde{f}$

(4-3) $\quad u(o) = u(T)$

les données de Cauchy épaisses étant incluses dans $\tilde{f}$.

Ce problème a été considéré dans le cas où M est donné par (2-15) mais avec des hypothèses de régularité sur ω (de classe C^1) dans V. COMINCIOLI [1], [2] et dans C. MOLINARI [1].

Le cas plus général où M vérifie seulement (2-20), (2-23) est étudié dans M. GAULTIER [1] qui obtient l'existence et l'unicité d'une solution périodique pour (4-1) (4-2) (4-3) moyennant des conditions liant μ (intervenant dans 2-23), α (constante de coercivité de $A(t)$) et de T.

5 - Autres équations.

5-1 Equations du type de Schrödinger avec retard

C'est le cas d'une équation du type

$$\frac{\partial u}{\partial t} + iA(t)\, u + Mu = \tilde{f} \tag{5-1}$$

où la forme $a(t\,;u,v)$ est ici symétrique.

On trouvera l'étude de 5-1 (dans l'optique du travail de C. BAIOCCHI (loc. cit.)) dans G. A. POZZI [1] [2].

5-2 Equations du type de l'élasticité (matériaux à mémoire longue)

Ce sont des équations du type :

$$\begin{cases} u'(t) + A(t)\, u(t) + \int_{-\infty}^{t} K(s, t-s)\, u(s)\, ds = f(t) \\ u(o) = u_o \\ u(t) = \tilde{u}_o(t) \quad -\infty < t < 0 \end{cases} \tag{5-1}$$

où $A(t)$, $K(t,\sigma)$ sur des opérateurs linéaires ou non linéaires d'un espace de Banach V dans V'.

Un problème tel que (5-1) à données épaisses se ramène au problème de Cauchy ponctuel :

$$\begin{cases} u'(t) + A(t)\, u(t) + \int_{0}^{t} K(s, t-s)\, u(s)\, ds = \tilde{f}(t) \\ u'(o) = u_o \end{cases} \tag{5-2}$$

Un cas particulier important est celui où :

$$K(s, t-s) = \gamma(t-s)\, B \tag{5-3}$$

où γ est une fonction **scalaire** B un opérateur linéaire ou non linéaire monotone.

Le cas où $A(t) = -\Delta$, $B(u) = y(u)$ où $y(\sigma) = \sigma^{\ell}$ est étudié dans Artola [2] [3].

Le cas où $A(t) = -\Delta$, $B(u) = G(u, \frac{\partial u}{\partial x})$ opérateur monotone avec par exemple en dimension d'espace $n = 1$ $Bu = -\frac{d}{dx}\left(\left|\frac{du}{dx}\right|^{p-2} \frac{du}{dx}\right)$ est étudié dans

M. L. RAYNAL [1] [2].

Pour d'autres travaux avec $A(t) = A$ monotone, B monotone mais avec des non linéarités assez bonnes on pourra consulter Londen [1] [2], Crandall -LONDEN-NOHEL [1].

Dans ces travaux l'ordre de l'opérateur A est supérieur à celui de B sauf dans l'exemple du travail de M. L. RAYNAL (loc. cit.).

On trouvera d'autres exemples dans Daffermos [1] [2] et dans Duvaut-Lions [1].

II - INEQUATIONS D'EVOLUTION

1 - Inéquations d'évolution du 1er ordre avec retard

Un problème à données épaisses se ramenant à un problème de Cauchy ponctuel, le problème est le suivant : V et H étant deux espaces de Hilbert dans la situation déjà considérée soit

(1-1) $\qquad K$ un convexe fermé de V

on se donne

(1-2) $\qquad f \in L^2(0,T\,;\,V')\ ,\quad u_o \in K$

et on cherche u vérifiant

(1-3) $\qquad u \in L^2(0,T\,;\,V) \cap \mathcal{C}^o([\,0,T\,]\,;\,H)$

(1-4) $\qquad u(t) \in K \quad$ p. p. $\quad t \in [\,0, T\,]$

(1-5) $\qquad u(o) = u_o$

(1-6) $\qquad \displaystyle\int_0^s (v'+A(t)u+(Mu)(t) - f, v-u)\,dt \geq \tfrac{1}{2}|v(s)-u(s)|^2+\tfrac{1}{2}|v(o)-u_o|^2$

Pour tout $v \in L^2(OT;V)$, $v' \in L^2(0T;V')$, $v(t) \in K$ p. p. $t \in [0, T]$ et pour tout $s \in [0, T]$ où $A(t)$ et M sont donnés comme au I.

Pour le cas $M = M_o$ cf. (n° I - 2-15) l'existence et l'unicité par une méthode de pénalisation est dûe à V. COMINCIOLI [3] et une généralisation avec M vérifiant seulement (2-20) (2-23) à M. BIROLI [1].

D'autres exemples d'Inéquations du 1er ordre avec des retards sont donnés dans Duvaut-Lions [1] (asservissements retardés en thermique).

2 - Inéquations du 2^e ordre

On considère le problème de trouver $u(x,t)$, $x\in\Omega$, $t\in[0,T]$ vérifiant :

$$(2\text{-}1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta^2 u - \int_\Omega (\operatorname{grad} u(x,t))^2 dx\cdot\Delta u + B(t)\,u(x,\psi_1(t)) + \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,\psi_2(t)) = f \\ \psi_1(t) = t-\omega_1(t) \quad , \quad \psi_2(t) = t-\omega_2(t) \\ B(t)\,u = \sum\limits_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_i} + b_o(x,t)\,u \end{cases}$$

$$(2\text{-}2)\quad \begin{cases} u(x,t) \equiv 0 \quad \text{si } t<0 \\ u(x,o) = u_o(x) \quad , \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,o) = u_1(x) \quad , \; u_o, \; u_1 \text{ donnés et les} \end{cases}$$

conditions unilatérales:

$$(2\text{-}4)\quad \begin{cases} u_{|\Gamma_T} = 0 \quad , \quad \Gamma_T = \Gamma\times\,]0,T[\\ \Delta u \geqslant 0 \quad , \quad \dfrac{\partial}{\partial n}\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right) \geqslant 0 \quad \text{sur } \Gamma_T \quad (n \text{ normale à } \Gamma) \\ \Delta u \dfrac{\partial}{\partial n}\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_T \end{cases}$$

Introduisons

$$(2\text{-}5)\qquad V = \{ v \mid v\in H_0^1(\Omega) \; ; \; \Delta v\in L^2(\Omega)\}$$

et le convexe fermé $K\subset V$ défini par

$$(2\text{-}6)\qquad K = \{ v\in V \; ; \; \frac{\partial v}{\partial n} \geqslant 0 \text{ sur } \Gamma\}$$

$$(2\text{-}7)\qquad a_1(u,v) = (\Delta u,\Delta v), \qquad a_2(u,v) = (\operatorname{grad} u \,,\, \operatorname{grad} v),$$

Le problème (2-1) à (2-4) revient à chercher u vérifiant une inéquation variationnelle du 2^e ordre.

Le résultat suivant est dû à V. COMINCIOLI [4].

Il existe u unique vérifiant :

$$(2\text{-}7)\qquad u\in L^\infty(0,T;V) \;,\; u'\in L^\infty(0,T;V),\; u''\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$$

(2-8) $$u'(t) \in K \quad \text{p.p.} \quad \text{en } t \;, \quad u(o) = u_o \;, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(o) = u_1$$

(2-9) $$\begin{cases} (u''(t)\,,\ v-u'(t)) + a_1(u(t)\,,v-u'(t)) + a_2(u(t)).a_2(u(t),\ v-u'(t)) + \\ \quad +(B(t)u(\psi_1(t))\,,v-u'(t)) + (u'(\psi_2(t),\ v-u'(t)) \geq (f(t),\ v-u'(t)) \\ \text{p.p. } t \in [0,T]\,, \quad \text{pour tout } v \in K. \end{cases}$$

u_o , u_1, ψ_1 , ψ_2 f étant donnés convenables.

III - ANALYSE NUMERIQUE DES PROBLEMES A RETARD

1 - Problème stationnaire.

Pour un problème elliptique du type :

$$a(u,v) + \int_\Omega Mu\ v\ dx = (f,v) \quad \forall v \in V\ ,\ H_0^1(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega)$$

où M est défini par $Mu(x) = \begin{cases} m(x)\ u\ (x-\omega(x)) & ,\ \text{si } x-\omega(x) > 0 \\ 0 \end{cases}$

plusieurs schémas de discrétisation (approximations de type interne) sont comparés dans J. REVERDY [1].

2 - Problèmes d'évolution : Méthode de décomposition

Une méthode de décomposition des opérateurs qui consiste à remplacer l' équation initiale : $\frac{\partial u}{\partial t} + (A(t) + M)u = f = f_1 + f_2$

par le système $\begin{cases} \text{(I)} & \frac{\partial u_1}{\partial t} + A(t)\, u_1 = f_1 \\ \text{(II)} & \frac{\partial u_2}{\partial t} + M\, u_2 = f_2 \end{cases}$

(où (I) est une équation parabolique opérationnelle, (II) une équation différentielle ou intégro différentielle à retard ordinaire) est donnée dans ARTOLA [2]. La méthode consiste en des approximations de type mêlé, c'est à dire approximations discrètes pour (I), semi-discrètes pour (II).

2 - Problèmes d'évolution : autres méthodes

Une méthode de différences finies pour l'équation de type parabolique correspondant aux problèmes périodiques est proposée dans V. COMINCIOLI [1] . Consulter aussi L. D. MARINI [1]
Pour les problèmes relatifs aux inéquations variationnelles à retard voir V. COMINCIOLI et G. FAUSTI [1].
Une méthode de discrétisation en temps et espace utilisant les éléments finis est proposée dans REVERDY [2] , lequel a des résultats (à paraître) en utilisant des méthodes de RUNGE KUTTA et d'éléments finis.

IV - BIBLIOGRAPHIE

ARTOLA, M. [1], Equations paraboliques à retardement, C.R.A.S. 1-264, série A, p. 668-671 (1967).
[2], Sur les perturbations des équations d'évolution - Applications à des problèmes de retard, Ann. Scient., Ecole Normale Sup. Paris, 4e série t-2, p. 137-253 (1969).
[3], Equations de Nohel-Levin, Exposé Séminaire Lions-Schwartz, Paris 19.

BAIOCCHI, C. [1], Sulle equazioni differenziali astratte lineari del primo ed del secundo ordine negli spazi di Hilbert, Ann. pura appl., série 4, t. 76, p. 233-304 (1967).

BENSOUSSAN, A. [1], Filtrage des systèmes linéaires avec retard, Rapport IRIA 1521.

BIROLI, M. [1], Sulla perturbazione delle disequazioni d'évoluzione paraboliche, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, p. 1-24 (1971).

CHARRIER, P. [1], Sur la dégénérescence des équations d'évolution avec retard, C.R.A.S., t. 277, série A-121 (1973).

COMINCIOLI, V. [1], Problemi periodici relativi a equazioni d'evoluzione paraboliche con termini di ritardo, Resoluzione e approssimazione delle soluzioni mediante uno shema alli differenze finite, Rendic. Istituto Lombardo Sc. A. 104, 356-381 (1970).
[2] Ulteriori ossuvazioni sulle soluzioni del problema periodico per equazioni paraboliche lineari con termini di perturbazione, Rend. Istituto Lombardo Sc. A. 104, 726-735 (1970).
[3], Un resultato relativo a disequazioni variazionali d'evoluzione per operatori del primo ordine in t con termini di ritardo, Ann. Mat. pura e App. IV, Vol. LXXXVIII, 357-378 (1971).
[4], Disequazioni variazionali d'evoluzione per operatori del 2^{e} ordine in t con termini di ritardo, Bal. Un. Mate. Ital. (4) 4, 273-289 (1971).

COMINCIOLI, V. et FAUST, G. [1], Esperienze numeriche relative all-approssimazione delle soluzioni di desiquazioni variazionali d'evoluzione con termini di retardo, Pul. del C.N.R. Pavia, no. 12 (1971).

CRANDALL, M.G., LONDEN, S.O. et NOHEL, J.A. [1], An abstract non linear Volterra Integro differential equation, Techn. Summary Report (1975).

DAFERMOS, C.M. [1], An abstract Volterra equation with applications to linear Viocoelasticity, Journal of Diff. Equations 7, 554-569 (1970).

DELFOUR, M. [1], Linear hereditary differential systems and their control, C.R.M., 310 (1975).

DUVAUT, G. et LIONS, J.L. [1], Les inéquations en mécanique et en physique, Dunod, Paris (1972).

GAULTIER, M. [1], Sur certains problèmes non linéaires perturbés, Thèse Bordeaux, janvier 1973.

HALANAY, A. [1], Differential difference equation. Stability oscillations time lag, Academic Press, N.Y. (1966).

LATTES, A. et LIONS, J.L. [1], Méthode de quasi-reversibilité et applications, Dunod, Paris (1967).

LIONS, J.L. [1], Equations différentielles opérationnelles, Springer, Berlin (1961).
[2], Quelques remarques sur les équations différentielles opérationnelles du 1er ordre, Rend. Sem. Padova (33), 213-225 (1963).

[3], Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux Dérivées Partielles, Dunod, Paris (1968).

LIONS, J.L. et MAGENES, E. [1], Problèmes aux limites non homogénes et applications, Tomes 1, 2, 3, Dunod, Paris (1968).

MONARI, C. [1], Soluzioni periodiche a una equazione parabolica con termini di ritardo non lineare, Istituto Lombardo Sc. A. 103 (1969).

MYSKIS, A. [1], Rapport sur les systèmes à retard, A.M.S. Transl., Vol. 4, 207-267 (1962).
[2], Rapport sur les systèmes à retard, Uspeki, T. 22 (2-134), 21-57 (1967).

POZZI, A. [1], Problemi di Canchy e problemi al limiti per equazione di evoluzione del tipo di Schrödinger lineari e non lineari, Ann. Mat. Pura et Appl. (IV), Vol. LXXVIII, 197-258 (1968).
[2], Problemi di Canchy e problemi al limiti per equazione di evoluzione del tipo di Schrödinger lineari e non lineari, Ann. Mat. Pura et Appl., 205-248 (1969).

RAYNAL, M.L. [1], Sur un problème de diffusion non linéaire, C.R.N.S. Paris, T. 280 (1975).
[2], Thèse, Université de Bordeaux I, mars 1975.

REVERDY, J. [1], Disentisation d'une équation aux différences différentielles. Comparaison entre divers schémas, Ist. Lombardo Sc. A. 107, 511-527 (1973).
[2], Approximation d'une équation d'évolution linéaire du premier ordre perturbé par un ferme retard, Pub. U.E.R., Informatique, Univ. Paul Sabatier, Toulouse.

U.E.R. de Mathématiques et d'Informatique
Université de Bordeaux I
351 Cours de la Libération
33405 Talence, France