

RESOLUTION NUMERIQUE DE L'EQUATION DE BURGERS

P. Arminjon

1. Introduction.

Considérons le problème mixte suivant: trouver une fonction $u = u(x,t)$ satisfaisant l'équation de Burgers

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{pour } 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (1)$$

avec les conditions initiales et aux limites

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{une fonction donnée} \quad (2)$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad \text{pour } t \geq 0 \quad (3)$$

ν est une constante qui représente, en hydrodynamique, la viscosité cinématique du fluide dont le mouvement est décrit par (1)-(3). L'équation de Burgers intervient dans certains modèles pour l'étude de la turbulence, des ondes de choc, et de processus ondulatoires en thermoélasticité non linéaire ([10],[16],[12],[17]).

Le problème (1)-(3) a été étudié par Cole [12], qui a construit une solution dans le cas où les conditions initiales et aux limites sont précisément de la forme (2)-(3). Cependant sa solution se présente sous la forme d'un développement en série assez élaboré, peu adapté aux manipulations numériques; d'autre part en dimension 2 ou 3 il n'y a plus de formule analytique pour exprimer la solution; il est donc intéressant d'étudier des méthodes de résolution numérique, notamment pour la raison que les équations de Burgers peuvent servir de test pour les méthodes numériques que l'on veut appliquer aux équations de l'hydrodynamique, particulièrement en une dimension puisque l'on connaît l'expression analytique de la solution.

Nous allons décrire une méthode d'éléments finis x,t pour l'équation unidimensionnelle, inspirée par le traitement numérique du problème de Stefan par Bonnerot-Jamet [9]. On obtient des approximations numériques qui serviront de point de comparaison avec d'autres méthodes ([2],[3]).

Nous considérons ici la fonction initiale suivante:

$$u_0(x) = u(x,0) = \frac{2\pi\nu(A_1 \sin \pi x + 2A_2 \sin 2\pi x)}{A_0 + A_1 \cos \pi x + A_2 \cos 2\pi x} \quad (2')$$

où A_0, A_1, A_2 sont des constantes; dans ce cas la solution analytique donnée par Cole prend la forme

$$u(x,t) = \frac{2\pi\nu(A_1 e^{-\nu\pi^2 t} \sin \pi x + 2A_2 e^{-4\nu\pi^2 t} \sin 2\pi x)}{A_0 + A_1 e^{-\nu\pi^2 t} \cos \pi x + A_2 e^{-4\nu\pi^2 t} \cos 2\pi x} \quad (4)$$

La connaissance d'une solution exacte permet de juger de la qualité des résultats numériques obtenus par la méthode des éléments finis. D'après les courbes d'erreur obtenues (section 3), il semble que la méthode soit d'ordre 2 par rapport à la variable spatiale x . En une dimension, les résultats sont inférieurs à ceux obtenus à l'aide de la méthode des lignes ou d'une méthode de type Runge-Kutta-Crouzeix ([13],[2]); mais en deux dimensions spatiales, la méthode des éléments finis fournit une précision au moins égale pour des temps de calcul environ 10 fois inférieurs ([21]).

2. Une méthode d'éléments finis pour l'équation de Burgers.

a) Forme variationnelle du problème.

Soit Ω la région du plan x,t définie par $0 < x < 1, \tau_1 < t < \tau_2$ pour $\tau_1 \geq 0$ et τ_2 donnés. Soit $\varphi \in C^1(\Omega)$ telle que

$$\varphi(0,1) = \varphi(1,t) = 0, \quad t > 0. \quad (5)$$

En multipliant (1) par φ et en intégrant sur Ω , on obtient l'identité intégrale suivante, qui sert de base à l'application de la méthode des éléments finis:

$$\iint_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt dx + \iint_{\Omega} \left(\frac{u^2}{2} - \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dt - \int_0^1 u(x, \tau_2) \varphi(x, \tau_2) dx + \int_0^1 u(x, \tau_1) \varphi(x, \tau_1) dx = 0 \quad (6)$$

pour tout $\tau_2 > \tau_1 \geq 0$ et $\varphi \in C^1(\Omega)$ satisfaisant (5). L'identité (6) peut aussi

s'écrire

$$A_{\Omega}(u, \varphi) = 0 \text{ pour tout } \varphi \in W_E^{1,3}(\Omega) = \{\varphi \in W^{1,3}(\Omega); \varphi(0,t) = \varphi(1,t) = 0 \text{ pour tout } t \geq 0\} \quad (7)$$

où A_{Ω} est la forme sur $W^{1,3}(\Omega) \times W^{1,3}(\Omega)$, non linéaire en u et linéaire en φ , définie par le membre de gauche de (6). L'identité (7) est la forme variationnelle du problème.

b) Description de la méthode d'éléments finis.

Soit $0 = t^0 < t^1 < \dots < t^n < t^{n+1} < \dots$ une partition de l'axe positif du temps, et $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_M = 1$ une partition de l'intervalle $[0,1]$, où M est un entier positif. Notons $h = 1/M$ la longueur de chaque sous-intervalle (x_i, x_{i+1}) , et $k = \Delta t = t^{n+1} - t^n$ celle d'un sous-intervalle de temps (qui pourra éventuellement varier avec n pour améliorer les résultats). h et k sont des paramètres que l'on peut faire tendre vers zéro en raffinant le maillage pour améliorer la précision des résultats.

Soit $P_i^n = (x_i, t^n)$ et K_i^n le rectangle de sommets $P_i^n, P_{i+1}^n, P_i^{n+1}, P_{i+1}^{n+1}$. Soit

$$E_h = \bigcup_{n \geq 0} \bigcup_{i=0}^{M-1} K_i^n$$

et V_h l'espace des fonctions φ , définies et continues sur E_h , satisfaisant $\varphi(0,t) = \varphi(1,t) = 0$ pour tout $t \geq 0$, et dont la restriction à chaque rectangle K_i^n est un polynôme de la forme

$$\varphi(x,t) = a_1 + a_2x + a_3t + a_4xt$$

où les coefficients a_i dépendent du rectangle K_i^n ; sur un rectangle K_i^n particulier, ils sont complètement déterminés par les valeurs de φ aux 4 sommets de K_i^n . Une fonction $\varphi \in V_h$ est donc complètement déterminée par ses valeurs en tous les points P_i^n du maillage.

Nous allons définir un analogue discret de l'identité intégrale (6)-(7). Soit $\Omega^n = \bigcup_{i=0}^{M-1} K_i^n$. Pour toute fonction φ définie sur Ω^n , on définit

$$I_{\Omega^n}(\varphi) = \int_{\Omega^n} \varphi = \sum_{i=0}^{M-1} \iint_{K_i^n} \varphi(x,t) dxdt \quad (8)$$

et on considère une valeur approchée $\tilde{I}_{\Omega^n}(\varphi)$ de $I_{\Omega^n}(\varphi)$ obtenue en remplaçant les

intégrales, dans (8), par des formules de quadrature appropriées.

Définissons aussi

$$I_{t^n}(\varphi) = \int_0^1 \varphi(x, t^n) dx = \sum_{i=0}^{M-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(x, t^n) dx \quad (9)$$

et notons $\tilde{I}_{t^n}(\varphi)$ une valeur approchée de $I_{t^n}(\varphi)$. Soit S_h le sous-espace de V_h constitué de toutes les $\varphi \in V_h$ telles que $\varphi(P_i^n)$ soit indépendant de n . La dimension de S_h est $M-1$, et les fonctions $\varphi^{(i)}$ de S_h telles que pour $i, j=1, 2, \dots, M-1$:

$$\varphi^{(i)}(P_j^n) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j=i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases} \quad (10)$$

forment une base de S_h .

Nous approcherons le problème (1)-(3) par le *problème discret* suivant: trouver $u_h \in V_h$ telle que

$$\tilde{A}_{\Omega^n}(u_h, \varphi^{(i)}) \equiv \tilde{I}_{\Omega^n}(u_h \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial t}) + \tilde{I}_{\Omega^n} \left[\left(\frac{u_h^2}{2} - v \frac{\partial u_h}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial x} \right] - \tilde{I}_{t^{n+1}}(u_h \varphi^{(i)}) + \tilde{I}_{t^n}(u_h \varphi^{(i)}) = 0 \quad (11)$$

pour $n=0, 1, 2, \dots$, et $i=1, 2, \dots, M-1$, et telle que

$$u_h(P_i^0) = u_0(x_i) \quad \text{pour } 0 \leq i \leq M. \quad (12)$$

Pour chaque entier $n \geq 0$, (12) représente un système de $M-1$ équations algébriques non linéaires qui peuvent s'écrire en termes des valeurs de la fonction inconnue u_h aux noeuds $\{P_i^n\}$ et $\{P_i^{n+1}\}$, une fois choisies les formules de quadrature servant à approximer les intégrales apparaissant dans (6)-(7). Plus précisément, nous utiliserons les formules suivantes: pour $\varphi \in C(\Omega^n)$, nous écrirons

$$I_{K_i^n}(\varphi) = \int_{K_i^n} \varphi \approx \tilde{I}_{K_i^n}(\varphi) = \frac{h}{4}(t^{n+1} - t^n) \cdot [\varphi(P_i^n) + \varphi(P_{i+1}^n) + \varphi(P_i^{n+1}) + \varphi(P_{i+1}^{n+1})] \quad (13)$$

et

$$\tilde{I}_{\Omega^n}(\varphi) = \sum_{i=0}^{M-1} \tilde{I}_{K_i^n}(\varphi). \quad (14)$$

Pour les intégrales simples, nous écrirons

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(x, t^n) dx \approx \frac{h}{2} [\varphi(P_i^n) + \varphi(P_{i+1}^n)] \quad (15)$$

avec $h = x_{i+1} - x_i$, et

$$I_{t^n}(\varphi) \cong \tilde{I}_{t^n}(\varphi) = \sum_{i=0}^{M-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{2} [\varphi(p_i^n) + \varphi(p_{i+1}^n)]. \quad (16)$$

Les formules (14) et (16) sont exactes pour les fonctions de V_h .

Pour $n \geq 0$ fixé et chaque $i=1,2,\dots,M-1$, (11) est une équation non linéaire reliant entre elles les valeurs de u_h aux six points $p_i^n, p_{i-1}^n, p_{i+1}^n, p_i^{n+1}, p_{i-1}^{n+1}, p_{i+1}^{n+1}$. En partant des valeurs connues $u_h(p_i^0) = u_0(x_i)$, on peut trouver les valeurs $u_h(p_i^1)$ ($i=1,\dots,M-1$) en résolvant un système tridiagonal d'équations non linéaires. De même si les valeurs $u_i^n \equiv u_h(p_i^n)$ ont été déterminées, on peut calculer celles des u_i^{n+1} ($i=1,2,\dots,M-1$) en résolvant le système tridiagonal d'équations algébriques non linéaires correspondant à (11).

c) Forme finale des équations discrètes.

En appliquant les formules de quadrature (13) et (15) dans (11), on est conduit à la forme suivante pour l'équation (11):

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{\Omega^n}(u_h, \varphi^{(i)}) &= \frac{k}{8} [(u_{i-1}^n)^2 - (u_{i+1}^n)^2] + \frac{k}{2h} [vu_{i-1}^n - \frac{2h}{k} (\frac{kv}{h} - h) u_i^n + vu_{i+1}^n] \\ &+ \frac{k}{8} [(u_{i-1}^{n+1})^2 - (u_{i+1}^{n+1})^2] - \frac{k}{2h} [vu_{i-1}^{n+1} - \frac{2h}{k} (h + \frac{kv}{h}) u_i^{n+1} + vu_{i+1}^{n+1}] = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Pour chaque entier $n \geq 0$ et chaque i fixé ($i=1,2,\dots,M-1$), (17) est une équation algébrique non linéaire en les inconnues $u_{i-1}^{n+1}, u_i^{n+1}, u_{i+1}^{n+1}$ puisque les valeurs des u_j^n ($j=1,\dots,M-1$) ont déjà été déterminées, lorsqu'on veut calculer les u_j^{n+1} .

Notons que le système (17) peut se mettre sous la forme matricielle

$$MF(U) + NU = B \quad (18)$$

où nous avons posé

$$F(U) = ((u_1^{n+1})^2, (u_2^{n+1})^2, \dots, (u_{M-1}^{n+1})^2)^T \quad (19)$$

$$U = (u_1^{n+1}, u_2^{n+1}, \dots, u_{M-1}^{n+1})^T \quad (20)$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{k}{8} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{k}{8} & 0 & -\frac{k}{8} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{k}{8} & 0 & -\frac{k}{8} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{k}{8} & 0 & -\frac{k}{8} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{k}{8} & 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$N = \begin{pmatrix} -(h+\frac{kv}{h}) & \frac{kv}{2h} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \frac{kv}{2h} & -(h+\frac{kv}{h}) & \frac{kv}{2h} & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{kv}{2h} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \frac{kv}{2h} & -(h+\frac{kv}{h}) \end{pmatrix} \quad (22)$$

et où B est un vecteur constant qui dépend de v , h , k et des u_i^n .

d) Résolution du système par itération.

Pour résoudre le système (17), nous effectuons l'itération suivante pour $i=1, \dots, M-1$

$$\begin{aligned} (u_i^{n+1})^{(j+1)} &= \frac{1}{h+\frac{kv}{h}} \left\{ \frac{k}{8} [(u_{i-1}^n)^2 - (u_{i+1}^n)^2] + \frac{k}{2h} [v u_{i-1}^n - \frac{2h}{k} (\frac{kv}{h} - h) u_i^n + v u_{i+1}^n] \right. \\ &\quad \left. + \frac{k}{8} [(u_{i-1}^{n+1})^{(j)2} - (u_{i+1}^{n+1})^{(j)2}] + \frac{kv}{2h} [(u_{i-1}^{n+1})^j + (u_{i+1}^{n+1})^j] \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

que l'on obtient comme itération de Picard d'une forme modifiée de (17). On prend comme valeurs de départ

$$(u_i^{n+1})^{(0)} = u_i^n. \quad (24)$$

Dans [2], nous démontrons que cette itération converge pourvu que $\frac{vk}{h^2}$ et h soient suffisamment petits, par exemple pour $\frac{vk}{h^2} < \frac{1}{2}$ et $h < \frac{2v}{R}$ où R est une constante appropriée.

3. Résultats numériques.

Nous avons testé la méthode dans le cas particulier où

$$A_0 = v = 1, \quad A_1 = \frac{1}{4}, \quad A_2 = \frac{1}{2}. \quad (25)$$

Comme la solution décroît très rapidement vers zéro lorsque t croît, nous avons limité les calculs au domaine $0 < x < 1, 0 < t < 0.1$. Nous avons choisi les valeurs suivantes pour $\Delta x = h$: $\frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{40}, \frac{1}{80}, \frac{1}{160}$. Pour chaque valeur de $h = \Delta x = x_{i+1} - x_i$ (gardée constante sur tout l'intervalle $[0,1]$), on a considéré plusieurs partitions de l'intervalle $0 \leq t \leq 0.1$, chacune étant caractérisée

i) par une maille $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ non constante;

ii) par la longueur maximum de tous les sous-intervalles de temps:

$$k = \max_{0 \leq t^n < 0.1} (t^{n+1} - t^n).$$

Pour chaque valeur de k , on note $N = N(k)$ le nombre de sous-intervalles correspondants (t^n, t^{n+1}) entre $t=0$ et $t=0.1$, tel que $t^{N(k)} \equiv t^N = 0.1$. La maille Δt est choisie plus fine près des extrémités $t=0$ et $t=0.1$ qu'au milieu de l'intervalle. Pour un couple donné $(h,N) = (h,N(k))$ avec $t^{N(k)} = 0.1$, on a calculé

1) les valeurs $u(x_i, t^N) = u(x_i; t=0.1)$ de la solution exacte, en utilisant l'équation (4), pour $i=1, 2, \dots, M-1$ avec $M = \frac{1}{h}$,

2) les valeurs approchées $u_i^N = u_h(x_i, t^N)$ de la solution numérique par éléments finis,

3) l'erreur $\Delta u_i^N = u(x_i, t^N) - u_i^N$ pour $i=1, 2, \dots, M-1$,

4) l'erreur relative $\varepsilon(i,N) = \Delta u_i^N / u(x_i, t^N)$ pour $i=1, 2, \dots, M-1$,

5) l'erreur relative moyenne $\bar{\varepsilon}(h,k) = \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^{M-1} \varepsilon(i,N)$, où la variable h indique la dépendance par rapport à la maille spatiale $\Delta x = h$, et

$$k = \Delta t_{\max} = \max_{0 \leq t^n < t^N = 0.1} (t^{n+1} - t^n).$$

Pour $h = \Delta x$ fixé, nous avons tracé la courbe représentant $\bar{\varepsilon}(h,k)$ en fonction de $k = \Delta t_{\max}$. Pour des valeurs relativement grandes de $k = \Delta t$, on observe que $\bar{\varepsilon}(h,k)$ croît au delà de toute limite. Lorsque Δt décroît, les valeurs de $\bar{\varepsilon}(h,k)$ décroissent jusqu'à une valeur minimum, puis recommencent à croître vers une sorte de valeur de seuil lorsque $k \rightarrow 0$. Le tableau 1 représente l'erreur relative moyenne $\bar{\varepsilon}(h,k) = \bar{\varepsilon}(\Delta x, \Delta t)$ en fonction de Δx et Δt (en pourcentages).

Pour vérifier l'ordre de la méthode, on a calculé les quotients $Q_h(\Delta t) = \bar{\varepsilon}(2h, \Delta t) / \bar{\varepsilon}(h, \Delta t)$ pour les valeurs de Δt qui donnaient des valeurs de $\bar{\varepsilon}$ voisines des valeurs supérieures (de seuil) observées pour $\bar{\varepsilon}$, pour h donné.

Le tableau 2 présente quelques valeurs de ces quotients, qui semblent converger vers $4 = 2^2$, pour h fixé et lorsque Δt décroît vers 0, ce qui suggère que la méthode est d'ordre 2 par rapport à l'espace.

Il est intéressant d'observer qu'on a obtenu, pour $h = \frac{1}{80}$, des résultats très comparables pour l'erreur relative et l'erreur relative moyenne en considérant un schéma légèrement différent du schéma aux éléments finis (17), obtenu en réécrivant (17) sous la forme équivalente

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + \frac{1}{2} \left[\frac{(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n)}{2} \cdot \frac{(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)}{2h} + \frac{(u_{i+1}^{n+1} + u_{i-1}^{n+1})}{2} \cdot \frac{(u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1})}{2h} \right] \\ - \frac{1}{2} \left[\frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h^2} + \frac{u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}}{h^2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (17')$$

Il ne semblait pas impossible qu'une certaine amélioration de la précision ait lieu si l'on remplace les valeurs moyennes

$$\frac{u_{i+1}^n + u_{i-1}^n}{2} \quad \text{et} \quad \frac{u_{i+1}^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{2},$$

qui jouent respectivement le rôle de u_i^n et u_i^{n+1} (si l'on considère (17') comme un équivalent aux différences finies de l'équation de Burgers), par u_i^n et u_i^{n+1} . Ceci conduit au schéma suivant, qui est du type Crank-Nicolson, et que l'on peut aussi obtenir par des considérations d'éléments finis ([6]):

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + \frac{1}{2} \left[u_i^n \frac{(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)}{2h} + u_i^{n+1} \frac{(u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1})}{2h} \right] - [] = 0 \quad (26)$$

où le dernier crochet est le même que dans (17'). (Si, dans les calculs conduisant

à (6), on garde le terme

$$\iint_{\Omega} u \frac{\partial u}{\partial x} \varphi \, dxdt$$

au lieu de l'intégrer par parties pour obtenir

$$\iint_{\Omega} \frac{u^2}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \, dxdt,$$

les formules de quadratures conduisant à (26).)

Pour les valeurs de Δt supérieures à la valeur $\frac{1}{560}$ qui donne l'erreur relative moyenne minimum $\bar{\varepsilon}(\frac{1}{80}, \frac{1}{560})$, pour $h = \frac{1}{80}$ et le schéma (17), le schéma modifié donne des améliorations de précision de l'ordre de 15 à 75% dans l'erreur relative moyenne, suivant la valeur de Δt , tandis que le contraire a lieu pour $\Delta t \leq \frac{1}{560}$. Ces résultats sont résumés dans les tableaux 3 et 6. Finalement, les tableaux 4 à 6 présentent les courbes $\bar{\varepsilon}(h, k) = f(k=\Delta t)$ respectivement pour $h = \frac{1}{20}, \frac{1}{40}, \frac{1}{80}$, avec les deux courbes légèrement différentes, pour $h = \frac{1}{80}$, correspondant aux schémas (17) et (26) (tableau 6). Le tableau 7 représente la fonction $u(x, t)$ pour plusieurs valeurs de t entre 0 et 0.1.

La plus petite erreur relative moyenne $\bar{\varepsilon} = 0.0015\%$ a été obtenue pour $\Delta x = \frac{1}{160}$, $\Delta t = \frac{1}{1120}$, et un temps de calcul de 43 secondes. La méthode des lignes donne la même précision avec $\Delta x = \frac{1}{40}$ et $\Delta t = \frac{1}{3040}$ en 3 secondes de calcul. Mais cette situation est inverse en 2 dimensions spatiales, où la méthode des éléments finis considérée ici donne des résultats supérieurs (voir [21]). Par exemple avec $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{40}$, $\Delta t = \frac{1}{2000}$, le schéma d'éléments finis donne, en 40 secondes de calcul, des résultats supérieurs ou égaux à ceux de la méthode des lignes ou de Runge-Kutta-Crouzeix pour $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{40}$, $\Delta t = \frac{1}{4000}$ et un temps de calcul de 438 secondes.

Références.

1. W.F. AMES, Nonlinear partial differential equations in engineering (section 7.10), Academic Press, New York (1965).
2. P. ARMINJON et C. BEAUCHAMP, A finite element method for Burgers' equation in hydrodynamics, Int. Journ. Numerical Methods in Engineering (1977).
3. P. ARMINJON, C. BEAUCHAMP, M. CARVER et D.H. CHUNG, Numerical solution of Burgers' equation by finite elements, the method of lines, and the T.C.N.R. higher order method, à paraître.
4. P. ARMINJON, Finite element analysis of moving loads on a floating ice sheet, Proceedings of the 3rd Int. Conf. on Numerical Analysis, Dublin (1976).
5. H. BATEMAN, Some recent researches on the motion of fluids, Monthly Weather Review 43, 163-170 (1915).

6. C. BEAUCHAMP, Résolution numérique de l'équation de Burgers en hydrodynamique, Mémoire de maîtrise, Université de Montréal (1976).
7. R. BELLMAN et R. KALABA, New methods for the solution of partial differential equations, dans "Nonlinear partial differential equations", édité par W.F. Ames, Academic Press (1967).
8. R. BELLMAN, S.P. AZEN et J.M. RICHARDSON, On new and direct computational approaches to some mathematical models of turbulence, Q. Appl. Math. 23, no. 1, 55-67 (1965).
9. R. BONNEROT et P. JAMET, A second order finite element method for the one-dimensional Stefan problem, Int. Journ. Numerical Methods in Engineering, vol. 8, 811-820 (1974).
10. J. BURGERS, A mathematical model illustrating the theory of turbulence, Advances in Applied Mechanics, Academic Press (1948).
11. P.G. CIARLET, Numerical analysis of the finite element method, Séminaire de Mathématiques Supérieures 1975, Presses de l'Université de Montréal (1976).
12. J.D. COLE, On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics, Quart. Appl. Math. vol. 9, no. 3, 225-236 (1951).
13. M. CROUZEIX, Sur l'approximation des équations différentielles opérationnelles linéaires par des méthodes de Runge-Kutta, Thèse de doctorat, Université de Paris VI (1975).
14. P. JAMET et R. BONNEROT, Numerical solution of the eulerian equations of compressible flow by a finite element method which follows the free boundary and the interfaces, Journal of Comput. Physics, vol. 18, no. 1 (1975).
15. O.A. LADYŽENSKAJA, Stable difference schemes for the Navier-Stokes equations (russe), Zap. Naučn. Sem. Leningrad Otdel Mat. Inst. Steklov (LDMI) 14, 92-126 (1969).
16. P. LAGERSTROM, J.D. COLE et L. TRILLING, Problems in the theory of viscous compressible fluids, Monograph, California Inst. of Technology (1949).
17. V.I. RIZUN et Iu.K. Engel'brekht, Application of the Burgers' equation with a variable coefficient to the study of nonplanar wave transients, PMM, Journal of Appl. Math. and Mechanics (traduit du journal russe ИММ) vol. 39, no. 3, 524-528 (1976).
18. P. JAMET et R. BONNEROT, A finite element method for the two-dimensional Stefan problem, à paraître dans Jour. of Comput. Physics.
19. P. ARMINJON et P. JAMET, Numerical analysis of the deformation of an ice plate submitted to a moving load, à paraître.
20. L. COLLATZ, The numerical treatment of differential equations, 3rd Edition, Springer-Verlag (1966).
21. P. ARMINJON et C. BEAUCHAMP, Numerical solution of Burgers' equation in 2 space dimensions, à paraître.

*Département de Mathématiques
Université de Montréal
Montréal, Québec, Canada H3C 3J7*

TABLEAU I. Erreur relative moyenne $\bar{\epsilon}(h, \Delta t)$ (schéma (17)) en %

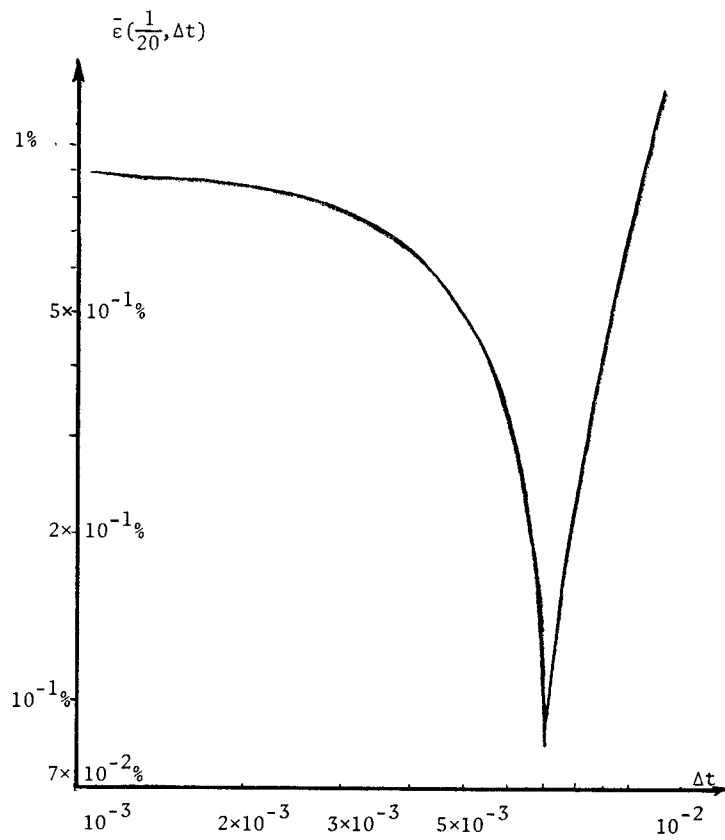
$\frac{\Delta t}{\Delta x}$	1/100	1/120	1/130	1/140	1/160	1/180	1/200	1/250	1/300	1/400	1/450	1/500	1/600
1/20	.78	.27	.10	.085	.25	.39	.49	.64	.72	.81	.83	.84	.86
$\frac{\Delta t}{\Delta x}$	1/150	1/200	1/250	1/280	1/300	1/350	1/400	1/500	1/600	1/650	1/700	1/750	1/800
1/40	.53	.20	.048	.023	.088	.089	.12	.16	.18	.19	.19	.20	.20
$\frac{\Delta t}{\Delta x}$	1/400	1/450	1/500	1/560	1/600	1/700	1/800	1/900	1/1000	1/1100	1/1150	1/1200	1/1300
1/80	.051	.028	.012	.0057	.010	.023	.030	.036	.040	.043	.045	.046	.048
$\frac{\Delta t}{\Delta x}$	1/1500	1/1800		1/3000	1/5000								
1/80	.05008	.0524		.00558	.05706								
$\frac{\Delta t}{\Delta x}$	1/1000	1/1120	1/1300	1/1600	1/1800	1/2000	1/2500	1/3000	1/5000				
1/160	.00259	.0015	.004697	.008166	.009586	.0106	.0122	.01300	.01421				

TABLEAU 2. $Q(h, \Delta t) = \bar{\varepsilon}(2h, \Delta t) / \bar{\varepsilon}(h, \Delta t)$

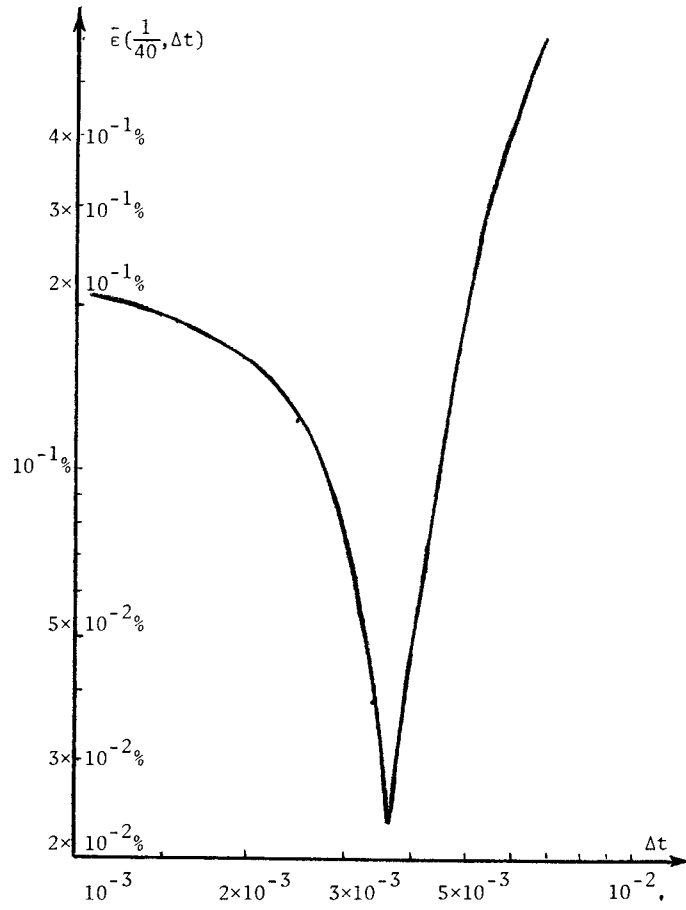
$h \backslash \Delta t$	1/600	1/800	1/1000	1/1300	1/1800	1/3000	1/5000
1/20	4.20	4.10	4.067				4.012
1/40	4.78	4.37	4.22	4.11			3.986
1/80			5.30	4.56	4.27	4.07	4.006
1/160				10.21	5.46	4.29	4.015

TABLEAU 3. Erreur relative moyenne avec le schéma modifié (17') en %

$\Delta x \backslash \Delta t$	1/400	1/450	1/500	1/520	1/530	5/550	1/560
1/80	.0439	.0212	.00525	.00156	.00323	.00738	.00936
$\Delta x \backslash \Delta t$	1/600	1/650	1/700	1/800	1/1000	1/1200	1/1500
1/80	.0164	.0235	.0291	.0374	.0471	.0524	.0567



TABEAU 4. Erreur relative moyenne, $\Delta x = \frac{1}{20}$



TABEAU 5. Erreur relative moyenne, $\Delta x = \frac{1}{40}$

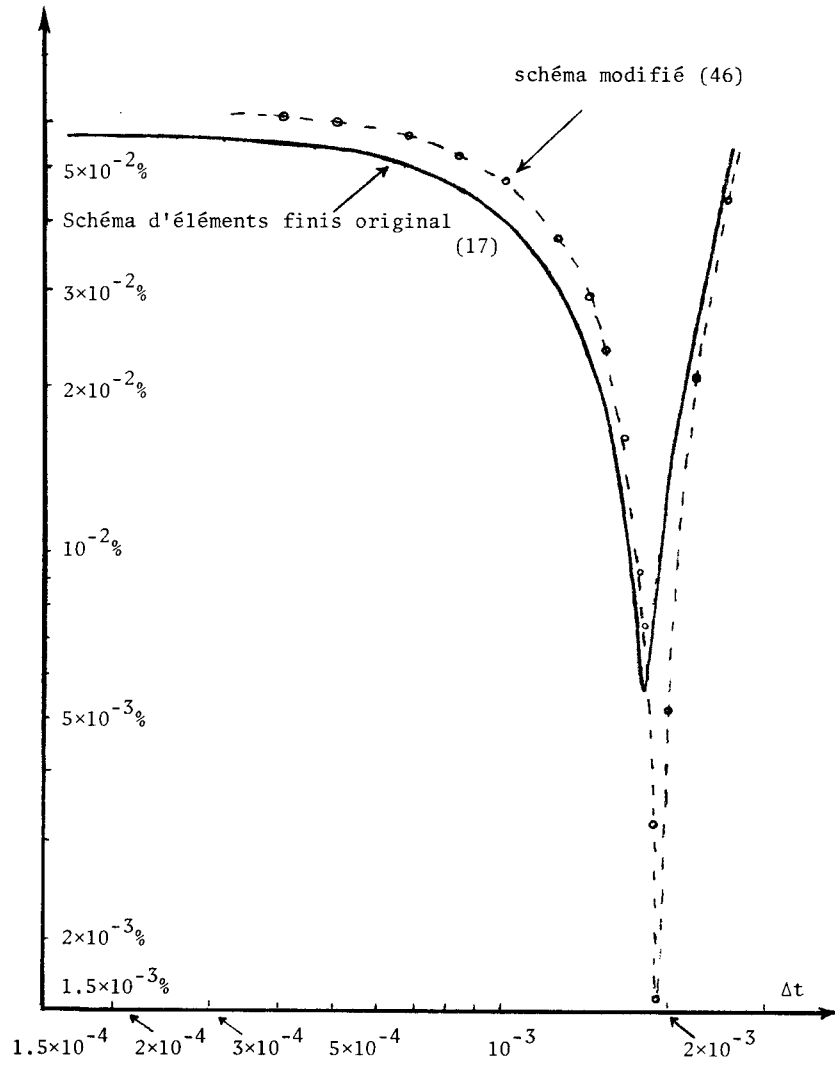


TABLEAU 6. Erreur relative moyenne, $\Delta x = \frac{1}{80}$

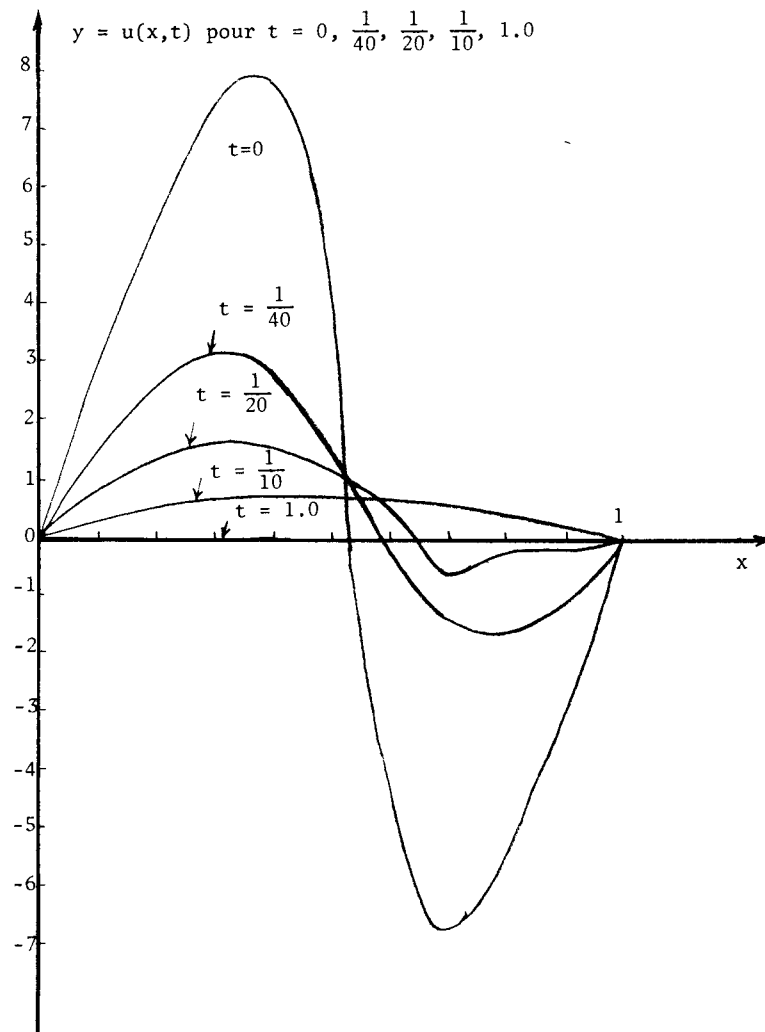


TABLEAU 7. La fonction $u(x,t)$ à $t = 0, t = \frac{1}{40}, t = \frac{1}{20}, t = \frac{1}{10}$