Ann. Sc. Math. Québec, 1977, Vol. I, No 1, pp. 93-100

LE BORDISME D'UNE THÉORIE DE L'HOMOLOGIE

Jacques Labelle

§0. INTRODUCTION

Les théories générales de l'homologie et de la cohomologie constituent un important sujet d'étude en topologie algébrique. C'est en utilisant la K-théorie [4; chap. III] que J.F. Adams a pu trouver une solution simple au problème des champs de vecteurs sur les sphères [1]. Mentionnons de plus les travaux de classification des variétés différentielles entrepris par P.E. Conner et E.E. Floyd [3], en se servant des théories Π_* (bordisme sans orientation), Ω_* (bordisme orienté) et Ω_*^U (bordisme complexe) comme outils principaux.

Dans ce papier, nous utilisons la notion d'orientation d'une variété par rapport à une théorie multiplicative de l'homologie h [12; page 271] pour définir une nouvelle théorie Ω^h, dite le "bordisme de h". L'étude des théories Ω^h fut le sujet de la thèse de l'auteur écrite sous la direction du Professeur G.W. Whitehead au "Massachusetts Institute of Technology" durant les années 1974-75.

§1. ORIENTATION

Une théorie générale de l'homologie h sur la catégorie P des CW-complexes [12; page 247] est une famille de foncteurs $h_n:P^2 \to Ab$, $n \in Z$, et de transformations naturelles $\partial_n:h_n \to h_{n-1}\circ T$, où $T:P^2 \to P^2$ est défini par $T(X,A) = (A,\phi)$, $(X,A) \in P^2$ (i.e. A est un sous-complexe de X) et Ab est la catégorie des groupes abéliens. Bien sûr les h_n et les ∂_n doivent satisfaire aux six premiers axiomes d'Eilenberg-Steenrod [6; pages 10-12].

Nous dirons que la théorie h est multiplicative, si $\forall$ n, $\forall$ m, $\forall$ (X,A), $\forall$ (Y,B), nous avons un couplage

$$h_n(X,A) \otimes h_m(Y,B) \xrightarrow{\times} h_n(X\times Y, X\times B \cup A\times Y).$$

Ce couplage étant naturel, bilinéaire, associatif, à élément unité, $1 \in h_0(pt,\phi)$, et commutant avec ∂_*. Pour plus de détails voir [4; page 31] où les axiomes d'une théorie multiplicative de la cohomologie sont donnés.

Etant donnée une théorie multiplicative de l'homologie h sur P et une variété différentielle compacte M^n à bord ∂M, nous dirons que $u \in h_n(M,\partial M)$ est une h-classe fondamentale (ou h-classe, ou h-orientation) si $\forall\ x \in M-\partial M$, l'homomorphisme composé suivant envoie u sur +1 ou -1 dans $h_0(pt)$:

$$h_n(M,\partial M) \xrightarrow{(i_x)_*} h_n(M,M-x) \cong h_n(M,M-D) \cong h_n(D^n,S^{n-1}) \cong \tilde{h}_n(S^n) \cong \tilde{h}_0(S^0) = h_0(pt)$$

où $i_x:(M,\partial M) \to (M,M-x)$ est l'inclusion, $\tilde{h}$ l'homologie réduite [12; page 247] et D^n un disque autour de x.

Notons que lorsque $h = H_*(-;Z)$ est l'homologie singulière à coefficient dans Z et M est connexe, une h-classe de M est un générateur de $h_n(M,\partial M) \cong Z$.

Ce qui montre que la notion de h-orientation généralise la notion classique d'orientation. De plus, les h-orientations possèdent les bonnes propriétés que l'on peut espérer d'orientations généralisées. Entre autres, si $u \in h_n(M,\partial M)$ est une h-orientation de M^n alors $\partial_* u \in h_{n-1}(\partial M)$ est une h-orientation de ∂M.

L'étude de la h-orientabilité des variétés différentielles est en soit un problème profond et difficile. Mentionnons que les variétés σ-orientables ($\sigma = \pi^S$ = homotopie stable) ont été caractérisées par G.W. Whitehead [12; page 276] et que les variétés K-orientables (K pour K-théorie) sont exactement les variétés Spin^c [2; page 30].

REMARQUE.

Contrairement au cas classique où une variété connexe possède toujours 0 ou 2 orientations, le nombre de h-orientations d'une variété connexe h-orientable peut varier considérablement.

§2. LA CONSTRUCTION Ω

Soit h une théorie multiplicative de l'homologie définie sur la catégorie P_0 des CW-complexes finis. Pour une paire topologique arbitraire $(X,A) \in T^2$, une h-variété singulière de (X,A) est un triplet (M,f,u) où M^n est une variété différentielle compacte à bord, $f:(M,\partial M) \to (X,A)$ une application continue telle que $f(\partial M) \subset A$ et $u \in h_n(M,\partial M)$ une h-orientation de M.

Deux h-variétés singulières (M^n,f,u) et (N^n,g,v) de (X,A) sont dites h-bordantes s'il existe une h-variété singulière (W^{n+1},F,z) de (X,X) telle que $M \cup N$ soit une sous-variété régulière de ∂W (i.e. localement comme $\mathbb{R}^n_+ \subset \mathbb{R}^n$), $F|_M = f$, $F|_N = g$ et l'homomorphisme composé

$$h_{n+1}(W) \xrightarrow{\partial} h_n(\partial W) \xrightarrow{j^*} h_n(\partial W\text{-Int}(M \cup N)) \xrightarrow[\cong]{exc} h_n(M \cup N, \partial(M \cup N)) = h_n(M,\partial M) \oplus h_n(N,\partial N)$$

envoie ∂z sur $u \oplus (-v)$.

LEMME.

Le h-bordisme est une relation d'équivalence parmi les h-variétés singulières de dimension n dans (X,A).

REMARQUE.

Dans la définition de h-bordisme, W est compacte et $F:(W,\partial W) \to (X,X)$.

Dénotons $\Omega_n^h(X,A)$ l'ensemble des classes d'équivalence. La classe de l'élément (M,f,u) s'écrit [M,f,u]. La réunion disjointe de variétés induit une structure de groupe abélien sur l'ensemble $\Omega_n^h(X,A)$.

LEMME.

Ω_n^h est un foncteur de T^2 dans Ab.

Preuve:

Pour $g:(X,A) \to (Y,B)$, définissons $g_*:\Omega_n^h(X,A) \to \Omega_n^h(Y,B)$ par

$$g_*[M,f,u] = [M,g\circ f,u]. \quad \square$$

THEOREME 1.

Les foncteurs Ω_n^h forment une théorie de l'homologie sur la catégorie T^2 des paires topologiques.

Preuve:

Reste à définir les transformations naturelles

$$\partial_n:\Omega_n^h(X,A) \to \Omega_{n-1}^h(A).$$

On pose

$$\partial_n[M^n,f,u] = [\partial M, f|_{\partial M}, \partial_n u].$$

La vérification des 6 premiers axiomes d'Eilenberg-Steenrod est une généralisation assez immédiate de la preuve du théorème (5.1) de [3; page 12-13]. □

LEMME.

La théorie Ω^h est multiplicative.

Preuve:

On pose $[M,f,u] \otimes [N,g,v] \to [M\times N, f\times g, u\times v]$ où la structure différentielle de M×N est donnée par redressement des angles [3; page 9]. □

THEOREME 2.

Il existe deux morphismes de théories multiplicatives de l'homologie, $\mu:\Omega^h \to h$ (la représentation de Steenrod généralisée) et $\eta:\Omega^h \to \Pi$ (le morphisme oubliant) définis par $\mu[M,f,u] = f_*(u) \in h_n(X,A)$ et $\eta[M,f,u] = [M,f] \in \Pi_n(X,A)$.

Preuve:

Il est facile de vérifier que μ et η sont bien définies, naturelles et commutent avec ∂_*. Par exemple,

$$\begin{tikzcd} \Omega^h_n(X,A) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\partial"'] & h_n(X,A) \arrow[d, "\partial"] \\ \Omega^h_{n-1}(A) \arrow[r, "\mu"] & h_{n-1}(A) \end{tikzcd} \quad \text{commute car} \quad \begin{tikzcd} {[M,f,u]} \arrow[r, mapsto] \arrow[dd, mapsto] & f_*(u) \arrow[d, mapsto] \\ & \partial_* f_*(u) \arrow[d, phantom, "\parallel"] \\ {[\partial M, f|_{\partial M}, \partial_* u]} \arrow[r, mapsto] & (f|_{\partial M_*})(\partial_*(u)) \end{tikzcd}$$

"μ est multiplicatif" veut dire que $\mu(1) = 1$ et $\mu(x\times y) = \mu(x) \times \mu(y)$; ce qui est immédiat car $1 \in \Omega^h_0(pt)$ est $[pt,id,1]$ et $\mu[pt,id,1] = id_*(1) = 1$ et pour $x = [M,f,u]$, $y = [N,g,v]$, $\mu([M,f,u] \times [N,g,v]) = \mu[M\times N, f\times g, u\times v] = (f\times g)_*(u\times v) = f_*(u) \times g_*(v) = \mu[M,f,u] \times \mu[N,g,v]$. $\square$

LEMME.

Si $u \in h_n(M,\partial M)$ est une h-orientation de M alors $[M,id,u] \in \Omega^h_n(M,\partial M)$ est une Ω^h-orientation (dite canonique) de M.

Preuve:

Il suffit de vérifier "qu'autour de chaque point $x \in M-\partial M$" la classe $[M,id,u]$ se restreint à $\pm\,[pt,id,1] = \pm\,1 \in \Omega^h_0(pt)$. $\square$

THEOREME 3.

Il existe un morphisme de théories multiplicatives de l'homologie $\lambda:\Omega^h \to \Omega^{\Omega^h}$ défini par $[M,f,u] \to [M,f,[M,id,u]]$.

Preuve:

Par le lemme précédent puisque $[M,id,u] \in \Omega^h_n(M,\partial M)$ est une Ω^h-orientation de $(M,\partial M)$, on a bien $[M,f,[M,id,u]] \in \Omega^{\Omega^h}_n(X,A)$. Reste à vérifier que λ est naturelle, multiplicative et commute avec ∂_*. $\square$

REMARQUE.

Qu'arrive-t-il lorsque la théorie h varie? Soit $\mathcal{H}$ la catégorie des théories multiplicatives de l'homologie sur $\mathcal{P}_0$. La construction Ω est alors un foncteur $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$. En effet, on pose $\Omega(h) = \Omega^h$ et pour $\theta:h \to h'$, $\Omega(\theta):\Omega^h \to \Omega^{h'}$ est défini par $\Omega(\theta)[M,f,u] = [M,f,\theta(u)]$. (Puisque $\theta:h \to h'$ est multiplicative, $\theta(u)$ est bien une h'-orientation.) On vérifie facilement que μ et λ sont des transformations naturelles en h ($\mu:\Omega \to I$ et $\lambda:\Omega \to \Omega^2$).

THEOREME 4.

$\beta = (\Omega,\mu,\lambda)$ est un co-triple sur H, appelé le "co-triple du bordisme".

Preuve:

Il suffit de montrer que plusieurs diagrammes sont commutatifs. Dans le langage de Godement, on dit que le foncteur $\Omega:H \to H$ est une "construction standard" sur la catégorie H.

Question:

Ω est-elle la seule construction standard sur H?

§3. REPRESENTABILITE DE Ω^h

Comme l'a démontré G.W. Whitehead [12; page 249] un spectre topologique $\mathbb{E}$ (i.e. $\mathbb{E} = (E_n,\varepsilon_n)$, $n \in Z$, E_n un CW-complexe pointé, $\varepsilon_n:SE_n \to E_{n+1}$) définit une théorie de l'homologie $\mathbb{E}_*$ sur P. Il suffit de poser $\mathbb{E}_n(X,A) = \lim\limits_{k\to\infty} \pi_{n+k}(X/A \wedge E_k)$ où $\wedge$ dénote le produit "smash".

Inversement, si une théorie h sur P satisfait à deux axiomes supplémentaires [10; page 133] alors il existe un spectre $\mathbb{E}$ tel que h et $\mathbb{E}_*$ soient isomorphes. Lorsqu'une théorie h est ainsi représentable, le calcul des groupes $h_n(X,A)$ se ramène à un problème d'homotopie stable.

REMARQUE.

h est toujours représentable sur P_0.

Dans cette section, pour une théorie multiplicative de l'homologie h, nous décrirons un spectre Mh représentant la théorie Ω^h.

Rappel I.

Pour une famille de fibrations X [10; page 225] (i.e., $X = (X_n)_{n\geq 0}$, $f_n:X_n \to BO(n)$ des fibrations, $g_n:X_n \to X_{n+1}$ et $\forall$ n, $f_{n+1}g_n = i_nf_n$) W. Browder a défini la notion de X-variété. Voir [10; page 225] ou [7; page 14 à 18] pour plus de détails. Les X-variétés singulières permettent de définir une théorie de l'homologie Ω^X, dite le X-bordisme [10; page 232 ou 7; page 230].

Soit MX le spectre de Thom associé à X [10; page 230].

THEOREME 5.

$\Omega^X \cong (MX)_*$.

Preuve:

C'est le théorème généralisé de Thom-Pontrjagin [10; page 230].

REMARQUE.

En particulier, les groupes de coefficients $\Omega_n^X(pt)$ (i.e. le $n^{\text{ième}}$ groupe de cobordisme des X-variétés compactes) est isomorphe à $\pi_n(MX) = \lim_{k\to\infty} \pi_{n+k}(MX_k)$ où MX_k est le complexe de Thom du fibré $f_k^*\gamma_k$ et γ_k le fibré canonique au-dessus de $BO(k)$.

Rappel II.

Pour une théorie de la cohomologie [12; page 251] h^* sur P, considérons le foncteur contravariant $\mathrm{Vect}_n^{h^*}(-)$ où $\mathrm{Vect}_n^{h^*}(Y)$ = {classes d'isomorphie de n-fibrés vectoriels h^*-orientés au-dessus de Y}. (Une h^*-orientation d'un fibré vectoriel est définie en [4; page 41].) Ce foncteur est représentable [5; page 579] par un espace classifiant $Bh^*(n)$ au-dessus duquel existe un n-fibré vectoriel h^*-orienté canonique $\gamma_n^{h^*}$; i.e. $[Y,Bh^*(n)] \to \mathrm{Vect}_n^{h^*}(Y)$ défini par $f \to f^*(\gamma_n^{h^*})$ est un isomorphisme naturel.

Soit h une théorie multiplicative de l'homologie sur P_0 et h^* la théorie de la cohomologie duale ($h = \not{E}_*$, $h^* = \not{E}^*$ pour un spectre-anneau $\not{E}$).

THEOREME 6.

Les espaces $Bh^*(n)$, $n \geq 0$, forment une famille de fibrations, dénotée Bh.

Preuve:

On prend pour $f_n: Bh^*(n) \to BO(n)$ une application classifiant $\gamma_n^{h^*}$ et pour $g_n: Bh^*(n) \to Bh^*(n+1)$ une application classifiant $\gamma_n^{h^*} \oplus 1$ comme (n+1)-fibré h^*-orienté au-dessus de $Bh^*(n)$. □

LEMME.

Les h-variétés et les Bh-variétés coïncident.

Preuve:

Une h-orientation et une h^*-orientation coïncident [7; page 39]. Une h^*-orientation et une Bh-structure coïncident par définition.

THEOREME 7.

Les théories Ω^h et Ω^{Bh} sont isomorphes.

La démonstration se fait par de longues vérifications. On s'appuie sur les deux jalons suivants. Grâce au théorème généralisé de Thom-Pontrjagin, le calcul des groupes $\Omega_n^h(X,A)$ est ramené à un problème d'homotopie. De plus, l'anneau des coefficients de Ω^h est isomorphe à l'anneau gradué $\pi_*(MBh)$.

§4. DESCRIPTION DU SPECTRE DE Ω^h

Dans leur article [9], Stong et Patterson ont donné une construction des espaces classifiants $Bh^*(n)$. Cette construction nous permet de décrire le fibré $\gamma_n^{h^*}$ et son complexe de Thom, MBh_n, dans beaucoup de cas. Dans la section 5 nous nous contenterons d'expliquer rapidement les résultats obtenus dans le calcul de l'anneau des coefficients de Ω^h pour certaines théories de l'homologie h.

§5. L'ANNEAU DES COEFFICIENTS DE Ω^h

En général, $\Omega^h_*(pt) \cong \pi_*(MBh)$, ce qui donne:

a) Pour $h = H_*(-;Z_2)$, $\Omega^h_* \cong \Pi_* \cong Z_2[x_2,x_4,x_5,\ldots]$. [Thom 11; page 79].

b) Pour $h = H_*(-;Z)$, $\Omega^h_* \cong \Omega_*$, (anneau de cobordisme orienté), $\Omega_* \otimes Q \cong Q[x_4,x_8,\ldots]$ [Thom 11; page 84].

c) Pour $h = \Pi$, $\Omega^h_* \cong \Pi_*(SF\mathbb{M}O)$ où l'espace $SF\mathbb{M}O$ est la composante de $\lim_{r\to\infty} \Omega^r MO(r)$ correspondant à l'élément neutre 1 de $Z_2 = \pi_0(\mathbb{M}O) \cong \pi_0(\lim_{r\to\infty} \Omega^r MO(r))$.

d) Pour $h = \Omega$, $\Omega^h_* \cong \Omega_*(SF\mathbb{M}O)$ et $\Omega^h_* \otimes Q[x_4,y_4,x_8,y_8,\ldots]$.

e) Pour $h = \pi^S$ (homotopie stable), $\Omega^h_* \cong \pi^S_*(SF)$ et $\Omega^h_* \otimes Q \cong H_*(BO;Q) \cong Q[x_4,x_8,x_{12},\ldots]$.

f) Pour la K-théorie réelle KO* (complexe K*), grâce à l'aide du Professeur R. Stong, nous avons trouvé les monstres suivants comme anneaux de coefficients: $\Omega^{KO}_* \cong \Omega^{Spin}_*(BSO)$, $\Omega^K_* \cong \Omega^{Spin^c}(BSU)$. (Pour les définitions de Ω^{Spin} et Ω^{Spin^c}, voir [7; chap. XI].). Les espaces classifiants étant:

$$B^{KO*} \cong BSpin \times BSO \quad \text{et} \quad B^{K*} \cong BSpin^c \times BSU.$$

Ceci éclaircit une conjecture de Jackowski [5; page 581].

REMARQUE.

1. Les groupes de coefficients Ω^Π_n ont une interprétation géométrique. En effet, une Π-classe de M^n est un élément $\alpha = [f] \in \Pi_n(M^n)$, $f:N^n \to M^n$ où $f_*(\sigma_N) = \sigma_M$ (σ_N et σ_M étant les Z_2-orientations canoniques de N et M). De plus, la classe de cobordisme {f} de f (voir [8; page 245]) ne dépend pue de $[M^n,\alpha] \in \Omega^\Pi_n$. Le groupe Ω^Π_n est isomorphe à $N(n,n)$ = le groupe de cobordisme des applications préservant la Z_2-orientation. Si l'on se sert de l'isomorphisme Φ de Stong [8; page 274] entre $\Pi_n(\lim_{r\to\infty} \Omega^r MO(r))$ et $\mathcal{N}(n,n)$, on obtient les relations suivantes:

$$\Omega^\Pi_n \cong \Pi_n(SFIMO) \cong N(n,n) \subset \mathcal{N}(n,n) \cong \Pi_n(\lim_{r\to\infty} \Omega^r MO(r)).$$

Similairement, $\Omega^\Omega_n \cong \Omega(n,n) \subset \Omega(n,n)$ [8; page 257]; i.e. Ω^Ω_n est isomorphe au groupe de cobordisme des applications, entre deux n-variétés orientées compactes, préservant les orientations.

2. Il est facile de voir que pour toute famille de fibrations X, Ω^X est une

β-algèbre (au sens des co-triples). Les théories $\pi^S \cong \Omega^{fr}$ et Ω^U sont-elles des β-algèbres libres? (I.e. de la forme Ω^h pour une théorie h.) Il est probable que non.

BIBLIOGRAPHIE

0. ADAMS, J.F., "Stable homotopy and generalized homology", University of Chicago Lecture Notes, 1971.
1. ADAMS, J.F., Vector fields on spheres, Ann. Math., 75, 603-632 (1962).
2. ATIYAH, M.F., BOTT, R. et SHAPIRO, A., Clifford modules, Topology 3, suppl. 1, 3-38 (1964).
3. CONNER, P.E. et FLOYD, E.E., Differentiable periodic maps, Springer-Verlag, Vol. 33 (1964).
4. DYER, E., Cohomology theories, Benjamin (1969).
5. JACKOWSKI, S., Oriented bundles in generalized cohomology theories, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, XXII, no. 6, 579-581 (1974).
6. EILENBERG, S. et STEENROD, N., Foundation of algebraic topology, Princeton, (1952).
7. STONG, R.E., Cobordism, Princeton University Press, (1968).
8. STONG, R.E., Cobordism of maps, Topology, 5, 245-258 (1966).
9. STONG, R.E. et PATTERSON, R.R., Orientability of bundles, Duke J. of Math., 39, 619-622 (1972).
10. SWITZER, R.M., Algebraic topology-homotopy and homology, Springer-Verlag, New York et Berlin (1975).
11. THOM, R., Quelques propriétés globales des variétés différentiables, Com. Math. Helv., Vol. 28, 17-85 (1954).
12. WHITEHEAD, G.W., Generalized homology theories, Trans. Amer. Math. Soc., 102, 227-283 (1962).

Université de Montréal
Montréal, Canada