Ann. Sc. Math. Québec, 1977, Vol. I, No 1, pp. 81-85

SUR LES LOCALISÉS CENTRAUX DANS LES ANNEAUX RÉGULIERS AUTO-INJECTIFS À DROITE

Jean-Marie Goursaud et Robert Raphael

INTRODUCTION.

Le but de cet article est de caractériser les anneaux réguliers auto-injectifs à droite tels que chaque localisé central soit auto-injectif à droite. Nous montrons que dans le cas I_{fin} ces anneaux sont isomorphes à un produit fini d'anneaux de matrices sur les anneaux réguliers réduits auto-injectifs, et que dans les cas I_{inf}, II_{fin}, et II_{inf} ces anneaux sont des produits finis de facteurs.

Pour les notions non définies dans cet article, on pourra consulter l'article [3] de G. Renault. Les auteurs tiennent à remercier M. Renault pour ses conseils et suggestions. Le deuxième auteur aimerait aussi signaler l'hospitalité de l'Université de Poitiers et la subvention du Conseil des Arts du Canada (W 750463) et du Conseil National de la Recherche du Canada (A 7752).

Rappelons certaines notions élémentaires sur les anneaux réguliers auto-injectifs à droite. Un tel anneau se laisse décomposer d'une façon unique comme produit de cinq types d'anneaux, des anneaux de type I_{fin}, I_{inf}, II_{fin}, II_{inf}, et III. Un idempotent e d'un anneau A est abélien si les idempotents de eAe commutent, fidèle si l'annulateur à droite de eA est nul et fini si l'anneau eAe est fini, c.à.d. si la relation $xy = e$ implique $yx = e$ pour tout $x,y \in eAe$. A est de type I s'il a un idempotent abélien fidèle, de type II s'il n'a pas d'idempotents abéliens non-nuls mais s'il a un idempotent fini fidèle, et de type III s'il n'a pas d'idempotents finis non-nuls. A est proprement infini (noté inf) s'il n'a pas de facteurs directs bilatères finis. Le symbolisme I_{fin},... respecte ces définitions, par exemple, A est de type I_{fin} si A est fini et si A est de type I. Un facteur est un anneau dans lequel les seuls idempotents centraux sont 0 et 1. Un anneau est birégulier si chaque idéal principal bilatère est engendré par un idempotent central.

PROPOSITION 1.

Soit A un anneau régulier auto-injectif à droite fini. Si chaque localisé central de A est auto-injectif à droite, alors A est birégulier.

Démonstration:

Chaque localisé de A est un anneau fini, et est un anneau premier [3, 2.9 (b)] donc un facteur. Mais un anneau fini régulier auto-injectif à droite a la propriété que chaque idéal bilatère non-nul contient un idempotent central non-nul [3, 2.7], donc chaque localisé de A est un anneau quasi-simple. D'après [1] cette condition implique que A est birégulier.

La Proposition 1 nous permet de caractériser les anneaux de type I_{fin} et II_{fin} ayant la propriété.

PROPOSITION 2.

Soit A un anneau régulier auto-injectif à droite dont chaque localisé central est auto-injectif à droite. Alors si A est de type I_{fin}, A est un produit fini d'anneaux de matrices à coefficients dans des anneaux réduits auto-injectifs. Si A est de type II_{fin}, A est un produit fini de facteurs de type II_{fin}.

Démonstration:

A est birégulier, donc il suffit de se reporter à la classification des anneaux finis réguliers biréguliers auto-injectifs à droite due à Renault [4, 2.3].

Pour considérer le cas des anneaux qui ne sont pas finis, nous avons besoin de relier certains anneaux d'endomorphismes avec leurs anneaux de base.

LEMME 3.

Soient A un anneau régulier, et e un idempotent de A. Supposons que e est fidèle et que Z(eAe) = e Z(A)e où Z indique le centre d'un anneau. Alors si M est un idéal maximal de Z(A), eMe est un idéal maximal de Z(eAe).

Démonstration:

On vérifie directement que eMe est un idéal de eZ(A)e. Montrons qu'il est premier et donc maximal puisque eZ(A)e est un anneau régulier commutatif. Soient ez_1e, $ez_2e \in eZ(A)e$ tels que $(ez_1e)(ez_2e) \in eMe$. Alors $ez_1z_2e \in eMe$. Si $z_1z_2 \in M$, alors $z_1 \in M$ ou $z_2 \in M$. Si $z_1z_2 \notin M$ il existe $z_3 \in Z(A)$ et $m \in M$ tel que $1 = m + z_1z_2z_3$. Alors $e = em_1$ pour un $m_1 \in M$, ce qui contredit le fait que e est fidèle.

LEMME 4.

Soit A un anneau régulier auto-injectif à droite dont chaque localisé central est auto-injectif à droite. Si e est un idempotent fidèle de A tel que Z(eAe) = eZ(A)e, alors chaque localisé central de eAe est auto-injectif à droite.

<u>Démonstration</u>:

Le Lemme 3 montre que l'idéal eMe est maximal dans eZ(A)e pour chaque idéal maximal M de Z(A). Inversement si N est un idéal maximal de eZ(A)e, N = eNe, et si N' = $\{a \in Z(A) | eae \in eNe\}$, N' est un idéal propre de Z(A). Si M' est un idéal maximal dans Z(A) et $M' \supset N'$ d'où N = eM'e d'après la maximalité de N', alors les idéaux maximaux de eZ(A)e sont précisément les idéaux de la forme eMe où M est maximal dans Z(A). Le localisé de A à M est A/MA et celui de eAe à eMe est eAe/(eMe)(eAe) = eAe/eMAe. Si $\bar{e}$ indique l'image de e dans A/MA, l'homomorphisme canonique eAe $\to$ $\bar{e}(A/MA)\bar{e}$ a eMAe comme noyau, donc eAe/eMAe $\cong \bar{e}(A/MA)\bar{e}$. L'anneaux A/MA est régulier et il est auto-injectif à droite par hypothèse, ce qui implique [2, Théorème 1] que $\bar{e}(A/MA)\bar{e}$ est auto-injectif à droite. Alors tous les localisés centraux de eAe sont auto-injectifs à droite.

<u>COROLLAIRE 5</u>.

Soit $A = \mathrm{End}_D E(\underset{\alpha}{\oplus} D)$ l'anneau des endomorphismes de l'enveloppe injective d'un module à droite qui est libre sur un anneau D régulier auto-injectif à droite. Alors si les localisés centraux de A sont auto-injectifs à droite, les localisés centraux de D ont la même propriété.

<u>Démonstration</u>:

Soit $e_1 : \underset{\alpha}{\oplus} D \to D$ la projection de $\underset{\alpha}{\oplus} D$ sur une coordonnée particulière. D'après l'injectivité de D, e_1 se relève à une projection $e : E(\underset{\alpha}{\oplus} D) \to D$ qui est idempotent fidèle. eAe $\cong$ D, donc Z(eAe) = eZ(A)e ce qui achève la démonstration.

Nous avons maintenant besoin de citer le résultat suivant:

<u>LEMME 6</u>. [cf. 3].

Soient D un anneau régulier auto-injectif à droite et $\{e_\alpha\}$ un ensemble maximal d'idempotents centraux et orthogonaux de D. Alors $D \cong \prod_\alpha e_\alpha D$ comme D-module à droite.

Nous traitons maintenant les cas I_{inf} et II_{inf} du problème:

<u>PROPOSITION 7</u>.

Soit A un anneau régulier auto-injectif à droite de type I_{inf} ou II_{inf}. Si chaque localisé central de A est auto-injectif à droite, alors A est isomorphe à un produit fini de facteurs, respectivement de type I_{inf} ou II_{inf}.

<u>Démonstration</u>:

(a) (Cas particulier). Supposons que $A = \mathrm{End}_D E(D^{(\mathbb{N})})$ où D est, ou bien réduit, ou bien de type II_{fin}. Soit $\{e_\alpha\}$ un ensemble maximal d'idempotents centraux orthogonaux dans D. Si $\{e_\alpha\}$ est un ensemble fini alors D est un produit fini de corps et A est un produit fini de facteurs. Raisonnons par l'absurde en supposant l'ensemble $\{e_\alpha\}$ infini. Alors d'après le Lemme 6 on a

$$A = \mathrm{End}_D E(D^{(\mathbb{N})}) \cong \mathrm{End}_D[(\prod_\alpha De_\alpha)^{(\mathbb{N})}] \cong \prod_\alpha \mathrm{End}_D E[(De_\alpha)^{(\mathbb{N})}]$$

par l'application canonique évidente.

Choisissons $\{e_i, i = 1,2,\ldots\}$ dans $\{e_\alpha\}$. Alors pour chaque $n \in N$,

$$(De_n)^{(\mathbb{N})} \cong \bigoplus_{i=1}^{n} (De_n)^{(\mathbb{N})}$$

donc

$$E[(De_n)^{(\mathbb{N})}] \cong \bigoplus_{i=1}^{n} E[(De_n)^{(\mathbb{N})}]$$

et

$$\mathrm{End}_D E[(De_n)^{(\mathbb{N})}] \cong M_n[\mathrm{End}_D E[(De_n)^{(\mathbb{N})}].$$

Alors

$$A \cong (\prod_{n\in \mathbb{N}} M_n(\mathrm{End}_D E[(De_n)^{(\mathbb{N})}]))(\prod_{\alpha\notin \mathbb{N}} \mathrm{End}_D E[(De_n)^{(\mathbb{N})}).$$

Soit f l'élément de A dont la n'ième coordonnée est la matrice scalaire définie par la projection f_n de $E[(De_n)^{(N)}]$ sur De_n (en choisissant une coordonnée particulière) et dont la α'ième coordonnée, $\alpha \in N$, est la projection f_α de $E[(De_n)^{(N)}]$ sur De_n. f est un idempotent fidèle de A et

$$fAf \cong (\prod_n M_n(De_n))(\prod_{\alpha\notin \mathbb{N}} De_\alpha),$$

d'où $Z(fAf) = fZ(A)f$. Le Lemme 4 implique que les localisés centraux de fAf sont auto-injectifs à droite. fAf est un anneau fini, alors la Proposition 2 s'applique et montre qu'il y a une contradiction, puisque les ordres des matrices $M_n(De_n)$ ne sont pas bornés.

(b) (Cas général). Soit A un anneau infini de type I ou II. Le travail de Renault [3, 3.7, 4.3 et p. 249] montre que A est isomorphe à un produit $\prod_\alpha A_\alpha$ où les anneaux A_α sont du type considéré dans (a). Chaque anneau A_α a aussi la propriété, ce sont donc des produits finis de facteurs d'après (a). Supposons que $\prod_\alpha A_\alpha$ est un produit infini. Alors en suivant l'argument de (a) on peut remplacer une infinité dénombrable de A_α par des anneaux de matrices d'ordre non-borné, et puis choisir un idempotent convenable f tel que fAf n'ait pas la propriété ce qui donne une contradiction. Donc $\prod_\alpha A_\alpha$ est un produit fini, et A est un produit fini de facteurs.

Une caractérisation des anneaux réguliers auto-injectifs à droite de type III reste un problème ouvert. Renault [4, 3.2] a montré qu'un tel anneau est isomorphe à un produit d'anneaux A_j, $j \in J$ où A_j est l'anneau des endomorphismes de l'enveloppe injective d'un module libre $D_j^{(I)}$, sur un anneau birégulier D_j de type III_α où D_j est dite de type III_α si α est un cardinal tel que $dD_j \cong E(\oplus_\alpha dD_j)$ pour chaque $d \in D$, $d \neq 0$, et si pour chaque $d \in D$, $d \neq 0$, α est le plus petit ordinal avec cette propriété. Le Corollaire 5 montre que si les localisés centraux d'un anneau A de type III sont auto-injectifs à droite, les anneaux biréguliers D_j auront cette propriété aussi.

REFERENCES

1. DAUNS, J. et HOFMANN, K.H., The representation of biregular rings by sheaves, Math., Zeit., 91, 1966, 103-123.

2. FAITH, C. et UTUMI, Y., Maximal Quotient Rings, Proc. Amer. Math. Soc., 16, 1965, 1084-1089.

3. RENAULT, G., Anneaux réguliers auto-injectifs à droite, Bull. Soc. Math. de France, 101, 1973, 237-254.

4. RENAULT, G., Anneaux biréguliers auto-injectifs à droite, Jour. Algebra, 36, No. 1, 1975, 77-84.

Université de Poitiers
France

et

Université Concordia
Montréal, Canada