Ann. Sc. Math. Québec, 1977, Vol. I, No 1, pp. 67-70

CONVOLUTIONS QUASI-CONCAVES

Gilles Deslauriers

Des conditions suffisantes sur deux fonctions sont données pour que leur convolution soit une fonction quasi-concave.

1. INTRODUCTION

I.A. Ibragimov, en 1956, a montré que la convolution d'une fonction log-concave sur $\mathbb{R}$ avec une fonction quasi-concave sur $\mathbb{R}$ donne une fonction quasi-concave. A. Prékopa, en 1972, a montré que la convolution de deux fonctions log-concaves sur $\mathbb{R}^n$ est une fonction log-concave. Nous nous servirons d'un théorème de C. Borell (1975) pour déterminer des conditions suffisantes sur deux fonctions f et g pour que leur convolution soit une fonction quasi-concave. Notre résultat complète les théorèmes d'Ibragimov et de Prékopa sans pour autant en fournir une généralisation.

Rappelons les définitions de fonctions quasi-concaves et log-concaves $\mathbb{R}^n$. Nous disons qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}^n$ est quasi-concave si $f(\theta x+(1-\theta)y) \geq \min(f(x),f(y))$ où $0 \leq \theta \leq 1$, x et $y \in \mathbb{R}^n$. Elle est log-concave si son logarithme est une fonction concave.

Introduisons des classes de fonctions non-négatives définies sur un espace vectoriel V. L'ensemble $N_f = \{x | f(x)>0\}$ sera toujours un ensemble convexe de V. Pour tout $p \in [-\infty,+\infty]$, nous noterons par $C_p(V)$ la classe de fonctions f telles que $(\text{signe } p)\cdot f^p$ est une fonction concave sur N_f. En particulier, $C_0(V)$ sera la classe des fonctions log-concaves, $C_\infty(V)$ celle des fonctions constantes et $C_{-\infty}(V)$ celle des fonctions quasi-concaves.

2. RESULTAT PRINCIPAL

Nous démontrons la relation suivante:

LEMME 1.

Si $p < q$, alors $C_q(V) \subset C_p(V)$.

DEMONSTRATION

Premier cas: $0 < p < q$. Il s'agit de montrer que si f^q est concave, alors f^p est concave. Posons $g = f^q$ et $\alpha = p/q$, ainsi $f^p = g^\alpha$. Ici $\alpha \in]0,1[$ et la fonction $x \to x^\alpha$ étant concave, on a

$$\left(\frac{g(x_1)+g(x_2)}{2}\right)^\alpha \geq \frac{g^\alpha(x_1)+g^\alpha(x_2)}{2}$$

$$g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{g(x_1)+g(x_2)}{2}.$$

La croissance de x^α assure la concavité de $g^\alpha = f^p$.

Deuxième cas: $0 = p < q$. Il s'agit de montrer que si f^q est concave, alors le log f est concave. On pose $g = f^q$, alors $\log f = \frac{\log g}{q}$. La fonction $x \to \log x$ est croissante et concave, d'où log g est concave comme le logarithme de f.

Troisième cas: $p < q = 0$. Il s'agit de montrer que si log f est concave, alors f^p est convexe. Posons $g = \log f$, $f^p = e^{pg}$. La fonction $x \to e^x$ est convexe et croissante, la fonction pg est convexe, d'où f^p est convexe.

Quatrième cas: $p < q < 0$. Si f^q est convexe, alors f^p est convexe. Posons $g = f^q$ et $\alpha = p/q$, ainsi $f^p = g^\alpha$. Ici $\alpha > 1$, la fonction $x \to x^\alpha$ est convexe et croissante, d'où f^p est convexe.

Cinquième cas: $p = -\infty < q < 0$. Si f^q est convexe, la fonction $g = f^q$ est alors quasi-convexe. La fonction $x \to x^{1/q}$ étant décroissante, ainsi f est quasi-concave.

Sixième cas: $0 < p < q = +\infty$. Une fonction constante élevée à une $p^{\text{ième}}$ puissance est constante, donc concave.

LEMME 2.

Soit f(x) et g(x) deux fonctions positives, définies sur un même intervalle ouvert, si f est convexe, si g est concave et si $\alpha > 0$, alors la fonction $f^{1+\alpha}g^{-\alpha}$ est convexe.

DEMONSTRATION

Posons $h(x) = f^{1+\alpha}(x)g^{-\alpha}(x)$. Supposons premièrement que f" et g" existent en tout point.

$$h''(x) = h(x)\left\{(\alpha+1)f''(x)/f(x)-\alpha g''(x)/g(x)+\alpha(\alpha+1)\left(\frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{g'(x)}{g(x)}\right)^2\right\}$$

d'où $h''(x) \geq 0$.

Si f(x) ou si g(x) n'est pas dérivable, on doit modifier notre argumentation. Soit x un point de l'intervalle. On sait que l'on peut trouver deux nombres a et b tels que

$$f(x+\eta) \quad f(x) + a\eta$$

$$g(x+\eta) \quad g(x) + b\eta.$$

D'où, à un voisinage de x,

$$f^{1+\alpha}(y)g^{-\alpha}(y) \geq \frac{(f(x)+a(y-x))^{1+\alpha}}{(g(x)+b(y-x))^{\alpha}}.$$

La fonction

$$y \to \frac{(f(x)+a(y-x))^{1+\alpha}}{(g(x)+b(y-x))^{\alpha}}$$

est convexe près du point x, comme on vient de le voir précédemment. La fonction $f^{1+\alpha}(y)g^{-\alpha}(y)$ est donc minorée par une fonction convexe près du point x. Ainsi h est une enveloppe de fonctions convexes, ce qui en assure la convexité.

<u>LEMME 3</u>.

Si $f \in C_p$, si $g \in C_q$ pour $p < 0 < p+q$, alors $fg \in C_r$ où $r = pq/(p+q)$.

<u>DEMONSTRATION</u>.

La fonction f^p est convexe et la fonction g^q est concave. Posons $\alpha = -p/(p+q)$, le lemme 2 donne que $(fg)^{pq/(p+q)} = f^{p(1+\alpha)}g^{-q\alpha}$ est convexe.

Citons le théorème 4.3 de Borell que nous utiliserons dans la démonstration du résultat principal.

"Soit k(x,y) une fonction positive définie sur un ouvert convexe Ω de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ telle que $k^{-1/n}$ soit une fonction convexe. Si $A(x) = \{y \mid (x,y) \in \Omega\}$, alors la fonction $x \to \int_{A(x)} k(x,y)dy$ est quasi-concave".

<u>THEOREME</u>.

Si g appartient à $C_q(\mathbb{R}^n)$ où $q > 0$, si f appartient à $C_p(\mathbb{R}^n)$ où $p = -q(1+nq)^{-1}$, alors la convolution de f avec g est une fonction quasi-concave.

<u>DEMONSTRATION</u>

On considère le noyau $k(x,y) = f(x-y)g(y)$. Le lemme 3 donne que $k^{-1/n}(x,y)$ est une fonction convexe et le théorème de Borell cité établit le résultat.

<u>REMERCIEMENT</u>

Ce papier est tiré de ma thèse de doctorat et je profite de cette occasion pour remercier mon directeur de thèse, Monsieur Serge Dubuc.

BIBLIOGRAPHIE

1. BORELL, C., "Convex set functions in d-space", Period. Math. Hungar., Vol. 6, no. 2 (1975), 111-136.

2. DESLAURIERS, G., "Mouvement Brownien dans un ensemble convexe", thèse de doctorat, Université de Montréal (1975).

3. IBRAGIMOV, I.A., "On the composition of unimodal distributions", Theory of Probability and its Applications, Vol. 1 (1956), 255-260.

4. PREKOPA, A., "On logarithmic concave measures and functions", Acta Sci. Math., Vol. 34 (1972), 335-343.

Ecole Polytechnique
Montréal, Canada