Ann. Sc. Math. Québec, 1977, Vol. I, No 1, pp. 63-65

SUR LE PROBLÈME 17 DE L. FUCHS

Khalid Benabdallah* et Adèle Laroche

Dans cette note, nous établissons une caractérisation complète des groupes torsions quasi-purs-injectifs, donnant ainsi une solution au problème 17 de L. Fuchs dans le cas important des groupes torsions. Les notations utilisées sont celles de [1] et tous les groupes considérés sont abéliens.

A l'instar de L. Fuchs [1] p. 134, considérons la classe des groupes quasi-purs-injectifs, définis de la façon suivante:

DEFINITION.

Soit A un groupe abélien. A est quasi-pur-injectif si, pour tout sous-groupe pur G de A et pour tout homomorphisme $f:G \to A$, il existe un endomorphisme $f^*:A \to A$ tel que $f^*|_G = f$.

Evidemment, tout groupe quasi-injectif est quasi-pur-injectif et tout groupe pur-injectif est quasi-pur-injectif. Démontrons quelques résultats qui justifieront l'attention toute spéciale que nous portons aux groupes réduits. Nous avons le résultat suivant dont la preuve est standard.

PROPOSITION 1.

Tout facteur direct d'un groupe quasi-pur-injectif est quasi-pur-injectif.

Il est facile de démontrer le lemme suivant:

LEMME 2.

Soit G un groupe abélien et D son sous-groupe divisible maximal. Si K est un sous-groupe pur de G, alors K + D est un sous-groupe pur de G.

Grâce à ce lemme, nous pouvons démontrer cette importante proposition.

* Le premier auteur a été subventionné par le Conseil National de Recherche du Canada, fond A5591.

PROPOSITION 3.

Si la partie réduite d'un groupe G est quasi-pure-injective, le groupe lui-même est quasi-pur-injectif.

Preuve.

$G = D \oplus R$ où D est le sous-groupe divisible maximal de G et R est réduit. Soit K un sous-groupe pur de G. Par le lemme 2, nous savons que K + D est un sous-groupe pur de G, et alors $(K+D)/D$ est un sous-groupe pur de G/D. Soit un homomorphisme $f:K \to G$. f induit un homomorphisme $\bar{f}:(K+D)/D \to G/D$ défini par $\bar{f}(k+D) = f(k) + D$, pour tout $k \in K$. $\bar{f}$ est bien défini parce que D est un sous-groupe complètement invariant de G. Or $G/D \cong R$ que nous avons supposé quasi-pur-injectif. Il existe donc un homomorphisme $\bar{\varphi}:G/D \to G/D$ tel que $\bar{\varphi}|_{(K+D)/D} = \bar{f}$.

Si $g \in G$, $g = d + r$ où $d \in D$, $r \in R$ et d et r sont uniques. Nous savons que $\alpha:G/D \to R$ tel que, $\alpha(g+D) = r$, pour tout $g \in G$, est un isomorphisme. Définissons $\varphi:G \to G$ par $\varphi = \alpha \circ \bar{\varphi} \circ \nu_D$ où ν_D est la projection canonique $\nu_D:G \to G/D$. Si $k \in K$, $\varphi(k) = \alpha \circ \bar{\varphi} \circ \nu(k) = \alpha \circ \bar{\varphi}(k+D) = \alpha(\bar{f}(k+D)) = \alpha(f(k)+D)$. Donc $f(k) - \varphi(k) \in D$ et nous avons un homomorphisme $f-\varphi|_K:K \to D$. Or D est divisible; il existe un homomorphisme $\psi:G \to D$ tel que $\psi|_K = f-\varphi|_K$. L'homomorphisme $\psi + \varphi:G \to G$ est une extension de f car, si $k \in K$, $(\psi+\varphi)(k) = \psi(k) + \varphi(k) = f(k) - \varphi(k) + \varphi(k) = f(k)$. Nous avons donc démontré que G est quasi-pur-injectif.

COROLLAIRE.

Des propositions 1 et 3, nous pouvons déduire qu'un groupe est quasi-pur-injectif si, et seulement si, sa partie réduite est quasi-pure-injective.

PROPOSITION 4.

Soit A un groupe quasi-pur-injectif. Si B est un sous-groupe pur complètement invariant de A, alors B est un groupe quasi-pur-injectif.

Par conséquent, le sous-groupe torsion d'un groupe quasi-pur-injectif est un groupe quasi-pur-injectif. Un groupe torsion-complet est le sous-groupe torsion d'un groupe pur-injectif. Il est donc quasi-pur-injectif. Tout groupe torsion est une somme directe de groupes primaires. Grâce à la proposition suivante, dont la preuve est très simple, il suffira d'étudier ceux-ci.

PROPOSITION 5.

Un groupe torsion est quasi-pur-injectif si, et seulement si, chacun de ses facteurs primaires est quasi-pur-injectif.

Le résultat suivant caractérise les groupes primaires réduits quasi-pur-injectifs.

PROPOSITION 6.

Un groupe p-primaire réduit G est quasi-pur-injectif si et seulement si G est torsion-complet.

Preuve.

Si G est quasi-pur-injectif, il est facile de vérifier que tout isomorphisme entre deux sous-groupes de base de G s'étend à un automorphisme de G car G est réduit. Par le théorème 69.2, dans [1] on voit que G est torsion complet. Réciproquement, si G est torsion complet alors G est pur-injectif parmi les groupes p-primaires et donc quasi-pur-injectif.

De ce qui précède, il découle:

THEOREME 7.

Un groupe torsion G est quasi-pur-injectif si et seulement si G_p est la somme directe d'un groupe divisible et d'un groupe torsion-complet, pour chaque nombre premier p.

REMARQUES.

La preuve de la proposition 6 remplace une preuve beaucoup plus longue que nous avions utilisée dans la première version de cette note. Notre première preuve était la conséquence d'une étude des groupes primaires dans lesquels tout endomorphisme idempotent d'un sous-groupe de base se relève à un endomorphisme de G. Au lieu du théorème 69.2 dans [1], nous utilisions un théorème de T. Koyama et J.M. Irwin ([3] théorème 3, p. 213) sur le relèvement des décompositions finies de sous-groupes de base de groupes primaires sans élément d'hauteur infinie.

BIBLIOGRAPHIE

1. FUCHS, L., "Infinite Abelian groups", vol. I et II, Academic Press, New York, 1970 et 1973.

2. KAPLANSKY, I., "Infinite Abelian groups", University of Michigan Press, Ann Arbor, 1968.

Université de Montréal
Montréal, Canada