Ann. Sc. Math. Québec, 1977, Vol. I, No 1, pp. 59-62

SUR LES ANNEAUX FBN À GAUCHE

John A. Beachy *

Soit R un anneau unitaire noethérien à gauche. (Tous les modules considérés sont des modules à gauche unitaires.) On dit que l'anneau R est FBN à gauche si pour tout idéal premier P de R, tout idéal à gauche de R/P qui est essentiel dans R/P contient un idéal bilatère non nul. Il est bien connu [6, Proposition VII, 2.4] que R est FBN à gauche si pour tout R-module M de type fini il existe $m_1,\dots,m_n \in M$ tels que $\mathrm{Ann}(M) = \mathrm{Ann}(m_1,\dots,m_n)$, et Cauchon a montré dans [3] que la réciproque est vraie. Dans cette note nous donnons une version locale du résultat ci-dessus, et nous démontrons que R est FBN à gauche si et seulement si cette condition locale est vérifié pour toute théorie de torsion première minimale.

Pour tout R-module M, une théorie de torsion τ_M est définie de la façon suivante: $\tau_M(X) = \{x \in X \mid f(x) = 0 \text{ pour tout } f \in \mathrm{Hom}_R(X,E(M))\}$, où E(M) désigne l'enveloppe injective de M. Soit σ une théorie de torsion de R-Mod. Alors un R-module X est dit σ-torsion (sans σ-torsion) si $\sigma X = X$ ($\sigma X = 0$), et un sous-module Y de X est dit σ-dense (σ-clos) si X/Y est σ-torsion (sans σ-torsion). Une théorie de torsion π est dite première si il existe un R-module uniforme U tel que $\pi = \tau_U$. Dans ce cas, si Ann(x) est maximal dans l'ensemble $\{\mathrm{Ann}(u) \mid u \in U\}$, alors tout sous-module non nul de Rx est π-dense, et par conséquent le localisé $(Rx)_\pi$ est un sous-objet minimal de U_π. Si l'idéal P est maximal dans l'ensemble des annulateurs des sous-modules de U, alors P est un idéal premier de R, et $\tau_{R/P}$ est première dans R-Mod et vérifie $\tau_{R/P} \geq \pi$ (il existe un sous-module uniforme A de R/P tel que $\tau_{R/P} = \tau_A$ [5, Théorème 3.9]). On dit que l'idéal P est l'idéal premier associé à U. On note ass(M) l'ensemble des théories de torsion premières π telles qu'il existe un sous-module uniforme U de M tel que $\pi = \tau_U$.

---

* Je tiens à remercier le professeur J. Lambek ainsi que le département de mathématiques de l'Université McGill pour son hospitalité.

LEMME (1).

Soit π une théorie de torsion première dans R-Mod, et soit M un R-module de type fini tel que $\mathrm{ass}(M) = \{\pi\}$. Si $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ est une famille de sous-modules π-clos de M telle que $\cap_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha = 0$, alors il existe une partie finie Φ de Λ telle que $\cap_{\alpha\in\Phi} M_\alpha = 0$.

Démonstration:

Puisque M est un module noethérien et $\mathrm{ass}(M) = \{\pi\}$, M contient un sous-module essentiel $\oplus_{i=1}^n U_i$, tel que chaque module U_i est uniforme et définit π. Donc $\pi M = 0$ et M_π contient un sous-objet essentiel $\oplus_{i=1}^n M_i$, tel que chaque sous-objet M_i est minimal dans M_π. La correspondance biunivoque entre l'ensemble des sous-modules π-clos de M et l'ensemble des sous-objets de M_π [6, Corollaire IX, 4.4] (qui préserve les intersections) montre que $\cap_{\alpha\in\Lambda}(M_\alpha)_\pi = 0$, et il existe donc une partie finie Φ de Λ telle que $\cap_{\alpha\in\Phi}(M_\alpha)_\pi = 0$, et ainsi $\cap_{\alpha\in\Phi} M_\alpha = 0$. ■

THEOREME (2).

Soit σ une théorie de torsion de R-Mod, alors les conditions suivantes sont équivalentes.

(1) Pour tout idéal premier P σ-clos dans R, tout idéal à gauche de R/P qui est essentiel et σ-clos dans R/P contient un idéal bilatère non nul.

(2) Pour tout R-module M de type fini et sans σ-torsion, il existe $m_1,\ldots,m_n \in M$ tels que $\mathrm{Ann}(M) = \mathrm{Ann}(m_1,\ldots,m_n)$.

Démonstration:

(1) $\Rightarrow$ (2). Soit M un R-module de type fini sans σ-torsion. Il suffit d'établir la condition (2) avec M un R-module uniforme, parce que tout R-module de type fini X admet une décomposition $\cap_{i=1}^n X_i = 0$ telle que X/X_i est uniforme. Soient $\pi = \pi_M$, $A = \mathrm{Ann}(M)$, et $\rho \in \mathrm{ass}(R/A)$. Alors il existe un idéal premier P associé à ρ, et il est facile de vérifier qu'il existe un sous-module N de M tel que $P = \mathrm{Ann}(N)$, de sorte que P est σ-clos dans R. Si nous montrons que $\tau_{R/P} = \pi$, alors $\rho = \pi$ et $\mathrm{ass}(R/A) = \{\pi\}$, et il en résultera, d'après le Lemme 1, qu'il existe une partie finie de l'ensemble $\{\mathrm{Ann}(m) \mid m \in M\}$ telle que $A = \cap_{i=1}^n \mathrm{Ann}(m_i)$.

Si $\mathrm{Hom}_R(N',R/P) = 0$ pour tout sous-module N' de N, alors N est un R/P-module singulier, et si $N = Rx_1 +\ldots+ Rx_k$, alors $\cap_{i=1}^k \mathrm{Ann}(x_i)/P$ est un idéal à gauche essentiel et σ-clos dans R/P; donc il contient un idéal bilatère non nul I/P, et $IN = 0$, ce qui est incompatible avec $P = \mathrm{Ann}(N)$. Nous pouvons donc conclure qu'il existe un sous-module N' de N tel que $\mathrm{Hom}_R(N',R/P) \neq 0$, et si $f(N') \neq 0$, alors il existe $y_1,\ldots,y_m \in N'$ tels que $P = \mathrm{Ann}(f(y_1),\ldots,f(y_n)) = \mathrm{Ann}(y_1,\ldots,y_m)$, parce que P est un idéal premier et qu'il n'existe pas de chaîne descendante infinie d'annulateurs de R/P. Ceci montre que E(R/P) est contenu dans une somme directe finie de copies de E(M), et le théorème de Azumaya [6, Proposition V, 5.4] implique qu'il existe un sous-module A de R/P tel que $E(M) \simeq E(A)$. Donc $\tau_{R/P} = \rho$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Si P est un idéal premier de R et C/P est un idéal à gauche essentiel et σ-clos dans R/P, alors R/Ann(R/C) est contenu dans une somme directe finie de copies de R/C. Ceci montre que $P \subsetneqq \mathrm{Ann}(R/C) \subseteq C$, parce que R/C est un R/P-module singulier mais R/P est un R/P-module nonsingulier. ■

Si R satisfait les conditions du Théorème (2), alors il est facile de vérifier que la correspondance qui à tout R-module injectif indécomposable E associe l'unique idéal premier maximal dans l'ensemble des annulateurs des sous-modules de E, induit une correspondance biunivoque entre l'ensemble des types des R-modules injectifs indécomposables sans σ-torsion et l'ensemble des idéaux premiers σ-clos dans R.

COROLLAIRE (3).

Si σ est une théorie de torsion maximale de R-Mod, alors pour tout R-module de type fini sans σ-torsion M il existe $m_1,\ldots,m_n \in M$ tels que $\mathrm{Ann}(M) = \mathrm{Ann}(m_1,\ldots,m_n)$.

Démonstration:

Si σ est maximal, alors il existe un idéal premier minimal P tel que $\sigma = \tau_{R/P}$ [2, Théorème 4.6], et P est le seul idéal premier σ-clos dans R [1, Proposition 1.2]. Si A/P est un idéal à gauche essentiel dans R/P, alors $\mathrm{Hom}_R(B/A,R/P) = 0$ pour tout idéal à gauche B tel que $A \subseteq B \subseteq R$, parce que B/A est un R/P-module singulier, mais R/P est un R/P-module nonsingulier. Donc A/P n'est pas σ-clos dans R/P, et ainsi la condition (1) du Théorème (2) est trivialement satisfaite. ■

THEOREME (4).

L'anneau R est FBN à gauche si et seulement si toute théorie de torsion minimale dans l'ensemble des théories de torsion premières dans R-Mod satisfait les conditions du Théorème (2).

Démonstration:

Si R est FBN à gauche, alors les conditions du Théorème (2) sont satisfaites pour toute théorie de torsion.

Inversement, il suffit de montrer que pour tout R-module uniforme de type fini M il existe $m_1,\ldots,m_n \in M$ tels que $\mathrm{Ann}(M) = \mathrm{Ann}(m_1,\ldots,m_n)$. Soit C un idéal à gauche de R maximal dans l'ensemble des idéaux à gauche τ_M-clos dans R. Si π est première dans R-Mod et π est contenu strictement dans τ_M, alors C est contenu strictement dans un idéal à gauche B maximal dans l'ensemble des idéaux à gauche π-clos dans R. Parce que R est noethérien à gauche, cette construction donne éventuellement une théorie de torsion σ minimale dans l'ensemble des théories de torsion premières, et $\sigma \leq \tau_M$. Alors $\sigma M \subseteq \tau_M(M) = 0$ et la condition (2) du Théorème (2) montre qu'il existe $m_1,\ldots,m_n \in M$ tels que $\mathrm{Ann}(M) = \mathrm{Ann}(m_1,\ldots,m_n)$. ■

Remarquons, que si toute théorie de torsion première dans R-Mod est maximale, alors il résulte du Théorème (4) et du Corollaire (3) que R est FBN à gauche. Donc R est artinien à gauche, parce que tout idéal premier de R est maximal [6, Proposition VIII, 1.14]. Ceci donne une nouvelle démonstration du Théorème 5.10 de Goldman [4].

BIBLIOGRAPHIE.

1. BEACHY, J.A., On maximal torsion radicals, *Canad. J. Math.* 25, 712-726 (1973).
2. BEACHY, J.A., On maximal torsion radicals II, *Canad. J. Math.* 27, 115-120 (1975).
3. CAUCHON, G., Les T-anneaux et la condition de Gabriel, *C.R. Acad. Sci. Paris* 277, 1153-1156 (1973).
4. GOLDMAN, O., Elements of noncommutative arithmetic I, *J. Algebra* 35, 308-341 (1975).
5. LAMBEK, J. et MICHLER, G., The torsion theory at a prime ideal of a right Noetherian ring, *J. Algebra* 25, 364-389 (1973).
6. STENSTROM, B., *Rings of Quotients*, Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, (1975).

McGill University
Montreal, Quebec

et

Northern Illinois University
DeKalb, Illinois