Ann. Sc. Math. Québec, 1977, vol. I, No 1, pp. 7-31

SUR LA CONVEXITÉ ET SES APPLICATIONS*

Jacques Dubois

Le but de cet article est de présenter à un niveau plutôt élémentaire (afin de rejoindre et d'intéresser le plus de lecteurs possible) un bref aperçu de plusieurs aspects de la théorie des ensembles convexes et des fonctions convexes tout en tentant de mettre en relief les applications de cette théorie avec d'autres domaines des mathématiques comme la théorie de l'optimisation, l'analyse fonctionnelle, la théorie des inégalités, la théorie du contrôle, la théorie des graphes,... . A l'occasion je citerai de plus quelques applications de ces notions à la science et à la technologie tout comme je toucherai à un des aspects les plus fascinants de la convexité, à savoir le grand nombre de problèmes facilement formulables et intuitivement évocateurs qui ne sont pas encore résolus (même dans le plan).

Il n'est pas inutile de signaler qu'étant donné les développements considérables que cette théorie a connu depuis les travaux du pionnier Minkowski (1894-1909) [44], plusieurs aspects seront volontairement délaissés et peut-être parmi ceux qui tiennent le plus à coeur à certains. Les thèmes que j'ai retenus m'apparaissent parmi les plus significatifs tout en demeurant accessibles au niveau d'exposition visé. De plus, il est bien évident que même les thèmes retenus ne peuvent être développés en grand détail et c'est la raison pour laquelle ils seront uniquement illustrés par certains résultats significatifs.

Après avoir rappelé certaines notions de base, je traiterai tour à tour des fonctions convexes, de la séparation d'ensembles convexes, des parties extrémales des ensembles convexes, de certains aspects combinatoires et quantitatifs et enfin indiquerai quelques propriétés des corps convexes de largeur constante.

---

* Ce travail constitue une version enrichie d'une conférence présentée par l'auteur lors du 5e colloque des mathématiciens du Québec tenu le 6 mars 1976 à l'Université Concordia à Montréal.

Pour terminer ces avant-propos je signale que le lecteur pourra trouver dans l'article de Klee [34] une excellente exposition sur le même sujet. De fait, certains thèmes développés ici recoupent en partie ceux de [34]. Il trouvera aussi dans cet article une bibliographie assez considérable qui pourra lui servir de complément à celle que je présente dans ce travail. D'autre part, il existe une foule de volumes consacrés à la convexité. Pour tous ceux qui voudraient obtenir une meilleure connaissance du sujet, je cite, par ordre chronologique, ceux qui m'apparaissent les plus utiles: Minkowski [44], 1911, Blaschke [7], 1916, Bonnensen et Fenchel [8], 1934, Fenchel [24], 1951, Lyusternik [43], 1956, Eggleston [20,21], 1957-58, Yaglom et Boltyanskii [56], 1961, Hadwiger, Debrunner et Klee [31], 1964, Valentine [55], 1964, Benson [5], 1966, Moreau [45], 1966, Grünbaum [27], 1967, Stoër et Witzgall [54], 1970, Rockafellar [49], 1970, Laurent [39], 1972, Ekeland et Temam [22], 1976.

§1. NOTIONS DE BASE

Bien qu'il soit possible et utile de donner un sens à la notion de convexité dans une foule de contextes, je vais ici me placer dans le cadre le plus familier et le plus naturel, celui des espaces vectoriels réels. V étant un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels et x et y étant deux éléments de V nous désignerons par

$$[x,y] = \{\lambda x + (1-\lambda)y;\ 0 \le \lambda \le 1\}$$

le segment fermé d'extrémités x et y. Une partie C de V est dite *convexe* si x et y étant deux éléments quelconques de C, le segment $[x,y]$ est alors entièrement inclus dans C. De façon équivalente on dit qu'une partie C de V est convexe si quel que soit l'entier $n \ge 1$, quels que soient les scalaires $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ tels que $\lambda_i \ge 0$,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

et quels que soient $x_1,\dots,x_n$ des éléments de C on a que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in C \tag{1.1}$$

(on exprime cette propriété en disant que toute *combinaison convexe* d'éléments de C est un élément de C). Dans la représentation de x donnée en (1.1) on dit que les λ_i sont les *coordonnées barycentriques* de x par rapport aux x_j.

A toute partie S de V on peut associer le plus petit ensemble convexe de V

contenant S. Cet ensemble appelé *l'enveloppe convexe* de S sera noté $co\ S$. Il est facile de vérifier que $co\ S$ est l'intersection de tous les ensembles convexes de V contenant S ou encore, de façon équivalente, l'ensemble de toutes les combinaisons convexes d'éléments de S. Dans le cas où V est de plus un espace vectoriel topologique (e.v.t.) on parle aussi de l'enveloppe convexe fermée de S, notée $\overline{co}\ S$, pour désigner la fermeture de $co\ S$ ce qui dans le cas des e.v.t. localement convexe (e.v.t.l.c.) n'est autre que l'intersection de tous les sous-ensembles de V qui sont convexes fermés et qui contiennent S. Rappelons qu'un e.v.t.l.c. est un e.v.t. dont l'origine admet une base de voisinages formés d'ensembles convexes. Une norme $\|\cdot\|$ sur un espace vectoriel, étant une fonction positivement homogène et satisfaisant l'inégalité du triangle, permet d'obtenir que pour chaque $\varepsilon > 0$ les boules: $\{x;\ \|x\| < \varepsilon\}$ sont convexes et donc qu'en particulier tout espace normé est un e.v.t.l.c. Cette remarque a pour but de permettre au lecteur peu familier avec les e.v.t.l.c. de ne pas être trop embarrassé par ce fait dans la poursuite de la lecture de ce travail; chaque fois que la situation se présentera, il n'aura qu'à penser aux espaces normés.

Déjà ces quelques notions très élémentaires, nous permettent de signaler quelques applications de la convexité à différents domaines hors des mathématiques. Nous ne pouvons nous permettre de discuter ici en grand détail ces applications et nous allons donc être très bref et indiquer plutôt des références. Une première application au génie minier ainsi que des références à cette question peut être trouvée dans [28] en pages 39 à 42. On y discute de quelle façon le calcul des coordonnées barycentriques d'un point appartenant à un simplexe de $\mathbb{R}^n$ est, pour ce type de situation, une chose naturelle et importante à effectuer.

De toute autre nature est l'application à certaines procédures d'élection que l'on peut trouver par exemple dans [38]. On y établit une bijection entre l'ensemble des préordres complets qui peuvent être définis sur un ensemble de n éléments et l'ensemble des faces d'un certain polyèdre convexe plongé dans un espace à n-1 dimensions; dans cette bijection les comparaisons de finesse entre préordres complets correspondent aux inclusions entre faces. Le polyhèdre est ensuite utilisé comme procédé d'agrégation de plusieurs préordres de préférence *individuels:* chacun des préordres est représenté par le centre d'une face, et les centres en question, équipondérés, fournissent un centre de gravité à partir duquel une construction géométrique, de signification démocratique évidente, fournit un préordre de préférence *collectif*. Ce procédé peut être comparé à certaines règles en usage.

Dans Feynman et al. [25] volume 1, chapitre 35, on trouvera une autre application intéressante des combinaisons convexes pour expliquer mathématiquement de quelle façon les couleurs peuvent être obtenues à partir de couleurs dites primaires.

En mélangeant par exemple le rouge, le vert et le bleu dans différentes proportions on peut essentiellement obtenir toutes les couleurs et on utilise ce fait pour produire, à partir de trois lampes, toutes sortes d'effets sur les scènes de spectacles. On indique que n'importe quel groupe de trois couleurs (dont l'une quelconque ne peut être obtenue à partir des deux autres; ces couleurs sont alors dites primaires) peut être utilisé pour produire toute autre couleur mais pour ce faire il faut donner un sens à la notion de "proportion négative" en étendant pour ce cas la notion de combinaison convexe. En plaçant les trois couleurs primaires comme étant les sommets d'un triangle du plan on peut décrire le lieu des points du plan qui représente l'ensemble des couleurs (ce lieu comprendra le triangle en question et les points à l'intérieur du triangle représenteront les couleurs qui sont "vraiment" obtenues à partir des couleurs primaires). Il est aussi très intéressant, dans cette représentation graphique, de donner le lieu des couleurs qui seront confondues par ceux qui souffrent de telle ou telle maladie de la vue.

Revenons aux notions de base. Une classe particulière d'ensembles convexes, la classe des cônes, intervient très souvent en analyse. On dit qu'un sous-ensemble C de V est un *cône* si $C + C \subseteq C$ et si pour chaque $\lambda \geq 0$ on a $\lambda C \subseteq C$ (le cône est dit *saillant* si $C \cap -C = \{0\}$). Les cônes apparaissent par le biais de la

PROPOSITION.

Si V est un espace vectoriel ordonné, l'ensemble P de ses éléments positifs est un cône saillant.

Réciproquement, si P est un cône saillant d'un espace vectoriel V, la relation définie entre deux éléments x et y de V comme

$$y \geq_P x \Longleftrightarrow y-x \in P$$

est une relation d'ordre qui accorde à V la structure d'espace vectoriel ordonné et P constitue la totalité des éléments positifs de V.

(Pour un traitement détaillé des e.v.t. ordonnés on pourra consulter [46].)

A chaque cône C sur V on a l'habitude d'associer un cône C^* de V^*, le dual algébrique de V, en posant:

$$C^* = \{f \in V^*;\ f(C) \subseteq \mathbb{R}_+\}.$$

Ce cône est appelé le *cône dual* de C et, à moins de mention explicite du contraire, l'ordre considéré sur V^* est toujours celui induit par ce cône dual. Cette notion de cône dual est généralisée à celle *d'opérateur positif* ([37] est un article fondamental sur ce sujet) de la façon suivante: V et W étant des espaces vectoriels, C et D étant des cônes de V et W respectivement, on dit qu'une application linéaire

$T : V \to W$ est un opérateur positif si $T(C) \subseteq D$. C'est une extension naturelle de la notion classique de matrice non-négative (matrice réelle à entrées non-négatives) qui est un opérateur positif dans le sens que nous venons de décrire en prenant tout simplement $V = W = \mathbb{R}^n$ et $C = D = \mathbb{R}^n_+$. Il est bien connu que les matrices non-négatives possèdent entre autre des propriétés spectrales très agréables. Il en est de même pour une vaste classe d'opérateurs positifs (voir par exemple [33], [52]). De même une foule de propriétés très utiles des matrices non négatives peuvent être étendues aux opérateurs positifs. Nous nous contentons de renvoyer le lecteur à des articles assez récents qui situent le problème, donnent des résultats et permettent d'obtenir une bibliographie intéressante sur le sujet ([3], [48], [2], [9], [40]).

§2. UNE MESURE DE LA NON-CONVEXITE D'UN ENSEMBLE

En économie mathématique ([26], [32]), pour ne citer que cet exemple, les ensembles convexes jouent un rôle de premier plan et lorsque l'ensemble sous considération n'est pas convexe, on aime bien pouvoir dire dans quelle "mesure" il ne l'est pas. A la suite de Cassels [10] indiquons comment des considérations probabilistes élémentaires suggèrent une façon très naturelle de mesurer la non-convexité d'un ensemble dans un espace de Hilbert réel H.

Un *vecteur aléatoire* A est un vecteur qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs dans H, disons a_j avec probabilité p_j, $1 \le j \le n$, $p_j \ge 0$, $\sum_j p_j = 1$. A étant un vecteur aléatoire, le vecteur

$$a^* = E(A) = \sum_j p_j a_j$$

est appelé *l'espérance* de A, tandis que le scalaire

$$V(A) = \sum_j p_j \|a_j - a^*\|^2$$

est appelé la variance de A. Pour tout sous-ensemble G de H on pose

$$\{v(G)\}^2 = \sup_{a^* \in co(G)} \ \inf_{E(A)=a^*} V(A) \in [0,\infty]$$

où le vecteur aléatoire A prend ses valeurs dans G.

Si l'ensemble G est un sous-ensemble convexe de H il est clair que $v(G) = 0$. Inversement, si $v(G) = 0$ alors

$$\inf_{E(A)=a^*} V(A) = 0$$

pour tout $a^* \in co(G)$ et comme

$$V(A)^{\frac{1}{2}} \geq \min_{a \in A} \|a-a^*\| = d(a^*,A)$$

on tire que G est dense dans $co\ G$. On peut donc regarder le nombre $v(G)$ comme une mesure de la non-convexité de G.

De plus, on peut établir que si $G_1,\dots,G_m$ sont des sous-ensembles de H, alors:

$$\left\{v\left(\sum_1^m G_i\right)\right\}^2 \leq \sum_1^m \{v(G_i)\}^2$$

ce qui indique qu'il y a un sens de dire que la somme d'ensembles donne un ensemble qui est "plus convexe".

§3. FONCTIONS CONVEXES

La classe des fonctions convexes en est une qui possède une structure très riche et qui joue un des rôles principaux en analyse. L'example le plus courant d'une fonction convexe consiste à prendre une semi-norme sur un espace vectoriel V. D'autre part, rappelons qu'à toute partie convexe C de V contenant l'origine, on peut associer une *fonction convexe* de domaine $\bigcup_{\lambda>0} \lambda\, C$, dite la *jauge* de C, définie par

$$j(x) = \inf\{\lambda;\ \lambda > 0,\ x \in \lambda\, C\}.$$

La jauge de C est de plus positivement homogène et si C est symétrique (c'est-à-dire que $C = -C$) et absorbant (c'est-à-dire, que $\bigcup_{\lambda>0} \lambda C = V$) elle est une semi-norme sur V.

Comme à l'habitude nous commençons par une définition. Une fonction réelle[1] f dont le domaine de définition est une partie convexe C de V est dite une *fonction convexe* sur C si:

$$\lambda \in [0,1],\quad x \in C,\quad y \in C \Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Il revient au même de dire que

$$\{(x,t) \in C \times \mathbb{R}\ ;\ \ f(x) \leq t\} = \text{l'épigraphe de } f$$

est une partie convexe de $C \times \mathbb{R}$, ou encore que

[1] Dans ce travail la convention suivante nous sera très utile. On dira qu'une fonction est réelle si ses valeurs sont prises dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et nous adopterons les convention usuelles pour les opérations avec $+\infty$.

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \tag{3.1}$$

pour toute combinaison convexe de points de C.

Dans le cas où la fonction f est définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$, l'inégalité (3.1) peut être généralisée:

$$f\left(\int_X \phi \, d\mu\right) \leq \int_X f \circ \phi \, d\mu. \tag{3.2}$$

Dans (3.2), connue comme *l'inégalité de Jensen* (voir [51]), μ désigne une mesure de probabilité définie sur une tribu de sous-ensembles d'un ensemble X, ϕ est une fonction réelle définie sur X et intégrable au sens de Lebesgue par rapport à la mesure μ et f est une fonction convexe définie sur un intervalle contenant $\phi(X)$.

De cette inégalité on tire comme cas très particuliers des inégalités aussi fondamentales à l'analyse que l'inégalité géométrico-arithmétique, les inégalités de Hölder et Minkowski,... . D'ailleurs un très grand nombre d'inégalités importantes sont obtenues par des arguments de convexité et à ce sujet on peut conseiller la lecture du livre de Beckenbach et Bellman [4].

Une fonction qui est à la fois convexe et concave (c'est-à-dire que $-f$ est une fonction convexe) est dite une *fonction affine.* Les fonctions affines jouent un rôle crucial dans la théorie de la convexité. A titre d'exemple qu'il suffise de citer le résultat suivant:

THEOREME.

Si V est un e.v.t.l.c., si f est une fonction réelle définie sur V, alors f est convexe et semi-continue inférieurement si et seulement si

$$f(x) = \sup\{\ell(x);\ \ell \in A\}$$

où A désigne l'ensemble des fonctions affines continues sur V et minorant f.

Certaines constructions préservent la convexité des fonctions (voir [49]). Les plus utiles sont:

- la somme de deux fonctions convexes est une fonction convexe;
- la composition d'une fonction convexe avec une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui est convexe et non décroissante est une fonction convexe;
- l'enveloppe supérieure d'une famille de fonction convexes est une fonction convexe;
- la fonction polaire f^* d'une fonction convexe f définie par

$$f^*(y) = \sup_{x\in V} \{\langle x,y \rangle - f(x)\},$$

où $y \in V^*$ et $\langle \cdot,\cdot \rangle$ désigne la dualité entre V et V^*, est une fonction convexe. Ainsi si f désigne la fonction indicatrice de la boule unité B d'un espace normé V définie par $f(x) = 0$ si $x \in B$ et $f(x) = +\infty$ sinon, on a que f^* n'est pas autre chose que la norme duale sur V^*;

- f_1 et f_2 étant deux fonctions convexes sur V l'inf-convolution $f_1 \Box f_2$ de ces fonctions définies par

$$(f_1 \Box f_2)(x) = \inf\{f_1(x_1) + f_2(x_2);\ x_1+x_2 = x\}$$

est aussi une fonction convexe. Si C est un sous-ensemble convexe d'un espace normé V, si f_1 est la fonction norme sur V, si f_2 est la fonction indicatrice de C on a que $(f_1 \Box f_2)(x) = d(x,C)$, la distance de x à C, ce qui montre que la fonction distance d'un point à un sous-ensemble convexe d'un espace normé est un autre exemple de fonction convexe.

Terminons cette section en rappelant deux résultats classiques extrêmement utiles sur les fonctions convexes dont le domaine de définition est une partie de l'espace euclidien à n dimensions.

THEOREME.

Soit K un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois continument différentiable sur K. Alors f est une fonction convexe sur K si et seulement si pour chaque $X \in K$, la matrice hessienne de f,

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X)\right),$$

est une matrice semi-définie positive.

Pour des besoins futurs, montrons comment ce théorème nous permet d'établir que la fonction $f(x_1,\ldots,x_n) = (x_1 \cdot x_2 \cdot\ldots\cdot x_n)^{1/n}$, définie sur K le cône positif usuel de $\mathbb{R}^n$ et donnant la moyenne géométrique de ces nombres, est une fonction concave. En effet un calcul direct montre que pour chaque $x = (x_1,\ldots,x_n) \in K$ et $y = (y_1,y_2,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n$ on a:

$$\left\langle \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right)y, y \right\rangle = \frac{1}{n^2} f(x)\left[\left(\sum_1^n \frac{y_i}{x_i}\right)^2 - n \sum_1^n \left(\frac{y_i}{x_i}\right)^2\right]$$

cette dernière expression étant négative ou nulle en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

THEOREME.

Si f est une fonction convexe définie sur un ouvert convexe C de $\mathbb{R}^n$, alors f est une fonction continue sur C.

Ce résultat (évidemment faux si C est un fermé) indique que les fonctions convexes possèdent nécessairement certaines propriétés de régularité. On reviendra sur ce point à la fin de la section suivante en disant un mot sur la différentiabilité des fonctions convexes.

§4. SEPARATION D'ENSEMBLES CONVEXES

Dans la trousse d'un mathématicien les théorèmes de séparation se classent parmi les outils les plus utiles et les plus puissants. Ces théorèmes qui en fait sont des analogues géométriques au théorème de Hahn-Banach sont en majeure partie responsables de la fécondité de la notion de convexité dans différents contextes.

Il existe toute une variété de tels théorèmes. Nous àllons n'en citer qu'un prototype. On pourra en trouver la preuve dans n'importe quel volume portant sur la convexité ou sur l'analyse fonctionnelle.

THEOREME DE SEPARATION STRICTE.

Soient K et F deux parties convexes d'un e.v.t.l.c. V telles que K est compact, F est fermé et $K \cap F \neq \emptyset$. Alors il existe une fonctionnelle linéaire continue f sur V telle que

$$\sup\{f(x);\ x \in F\} < \inf\{f(x);\ x \in K\}.$$

En s'inspirant fortement d'une approche que l'on peut trouver dans [42], nous allons utiliser ce théorème pour fournir une preuve très courte, mais apparemment peu connue, du théorème fondamental de la dualité en programmation linéaire. Dans presque tous les textes portant sur la programmation linéaire ([14], [30], [53]) ce résultat essentiel est établi en faisant appel à ce qui est connu comme le lemme de Farkas.

Soient donc les programmes linéaires duaux:

$$(P)\begin{cases}\text{Min } Z = c^{\mathsf{T}}x \\ Ax = b \\ x \geq 0\end{cases} \qquad (D)\begin{cases}\text{Max } Z' = b^{\mathsf{T}}u \\ A^{\mathsf{T}}u \leq c \\ \end{cases}$$

où

c et x sont des vecteurs colonnes de $\mathbb{R}^n$,

b et u des vecteurs colonnes de $\mathbb{R}^m$,

et

A une matrice réelle d'ordre $n \times m$.

(Le T désigne la transposition des vecteurs ou des matrices.)

<u>THEOREME</u>. (fondamental de la dualité en programmation linéaire)

Soit x_0 une solution réalisable de (P). Alors x_0 est une solution optimale de (P) si et seulement si il existe une solution réalisable u_0 de (D) telle que $c^{\mathsf{T}}x_0 = b^{\mathsf{T}}u_0$.

<u>Preuve</u>.

Supposons que x_0 est une solution optimale de (P) et posons $c^{\mathsf{T}}x_0 = z_0$. Soit

$$C = \{(r,u) \in \mathbb{R}^{m+1};\ u = tb-Ax,\ r = tz_0-c^{\mathsf{T}}x,\ x \geq 0,\ t \geq 0\}.$$

On vérifie sans peine que C est un cône convexe, fermé, non-vide de $\mathbb{R}^{m+1}$ tel que $(1,0) \notin C$ (ce dernier point découlant du fait que x_0 est optimal).

En vertu du théorème de séparation stricte, on peut choisir $a = (a_0,a_1,\ldots,a_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ tel que

$$a_0 < \inf\{\langle a,w \rangle ;\ w \in C\} = \alpha$$

C étant un cône il suit que $\alpha=0$ et on peut donc supposer que a a été choisi tel que $a_0 = -1$. Posons

$$u_0 = (a_1,\ldots,a_m)^{\mathsf{T}}.$$

Alors

$$u_0^{\mathsf{T}}u-r \geq 0 \quad (\forall\ (r,u) \in C),$$

c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}^n_+$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$ on a:

$$(4.1) \qquad (c^{\mathsf{T}}-u_0^{\mathsf{T}}A)x - tz_0 + tu_0^{\mathsf{T}}b \geq 0.$$

Le choix $t=0$ dans (4.1) donne que

$$c^{\mathsf{T}} - u_0^{\mathsf{T}}A \geq 0$$

et donc que u_0 est réalisable pour (D).

Le choix $t=1$ et $x=0$ dans (4.1) montre que $z_0 \leq b^{\mathsf{T}}u_0$. L'inégalité inverse, $z_0 \geq b^{\mathsf{T}}u_0$, étant toujours vraie (puisque x_0 et u_0 sont des solutions réalisables de (P) et (D) respectivement) la nécessité est vérifiée.

La suffisance est établie en montrant que pour toute solution réalisable x de (P) on a $c^{\mathsf{T}}x \leq c^{\mathsf{T}}x_0$ ce qui est immédiat en utilisant les hypothèses sur u_0. ■

Cette notion de dualité joue un rôle central dans les problèmes d'optimisation. Le principe général est le suivant: soit à résoudre le problème

$$(P) \quad \min_{x \in X} f(x)$$

où X (l'ensemble des contraintes) est un certain sous-ensemble de V et f est une fonction réelle définie sur X. Quitte à remplacer f par la fonction qui vaut $f(x)$ pour $x \in X$ et $+\infty$ sinon on peut supposer que $X=V$. On construit alors un espace Y et une fonction réelle $K(x,y)$ définie sur $X \times Y$ (*la fonction lagrangienne*) telle que

$$f(x) = \sup_{y \in Y} K(x,y)$$

et on introduit le problème

$$(D) \qquad \max_{y \in Y} g(y)$$

la fonction g étant définie par la relation

$$g(y) = \inf_{x \in X} K(x,y).$$

On cherche alors des conditions qui vont faire que le minimum de (P) sera égal au maximum de (D). A ce sujet un des premiers résultats que l'on établit et en même temps un des plus fondamentaux (résultat établi à l'aide du théorème de séparation) est le suivant:

<u>THEOREME</u> (*du minimax*).

Soient A et B deux parties convexes compactes d'un e.v.t.l.c. V. Soit $K : A \times B \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui est convexe-concave. Alors

$$\min_{a \in A} \max_{b \in B} K(a,b) = \max_{b \in B} \min_{a \in A} K(a,b).$$

Signalons enfin que les théorèmes de séparation jouent un rôle central dans la théorie de la différentiabilité des fonctions convexes et de leur extréma. C'est là un des aspects des plus intéressants et des plus utiles mais décider de le développer ici nous conduirait malheureusement beaucoup trop loin. Le lecteur intéressé pourra trouver les renseignements nécessaires dans [49], [22], [45]. A titre d'illustration, nous allons nous contenter de ne citer qu'un des résultats de cette théorie.

<u>THEOREME</u>.

Soit C une partie ouverte et convexe d'un e.v.t. V et soit f une fonction réelle convexe sur C. Alors pour chaque $x \in C$ et pour chaque $y \in V$

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+ty)-f(x)}{t} \quad \text{existe}$$

(on dit que f est dérivable à droite au sens de Gateaux).

Si on dénote par $df(x;y)$ cette limite, on a de plus que pour chaque $x \in C$ la fonction définie sur V par

$$y \to df(x;y)$$

est une fonction convexe positivement homogène.

§5. LES PARTIES EXTREMALES

Une partie E d'un sous-ensemble convexe C d'un espace vectoriel réel V est dite une *partie extrémale* de C si chaque fois qu'un segment avec extrémités dans C possède un de ses points intérieurs dans E alors ce segment doit être entièrement inclus dans E. Dans le cas où E est réduit à un seul élément x, on dit que x est un *point extrême* de C. On désignera par $E(C)$ l'ensemble des points extrémaux de C.

Suite aux théorèmes que nous allons citer dans cette section, il est évident que la détermination, ou tout au moins la caractérisation, des points extrémaux d'un convexe est un problème important (malheureusement souvent difficile). A titre d'exemples, nous allons citer quelques résultats pertinents en programmation linéaire.

Un des résultats sur lesquels est fondé l'algorithme du simplexe indique que l'ensemble des solutions basiques réalisables du système $Ax = b$ (A une matrice $m \times n$ de rang $m \leq n$ et $b \in \mathbb{R}^m$) constitue l'ensemble des points extrémaux du polyèdre des solutions réalisables: $\{x \in \mathbb{R}^n;\ Ax = b\}$.

D'autre part, dans le cas où le convexe est l'ensemble Ω_n des matrices $n \times n$ qui sont doublement stochastiques (problèmes d'assignation) un résultat célèbre de Birkhoff [6] indique que l'ensemble $E(\Omega_n)$ est constitué des $n!$ matrices de permutation. La méthode hongroise de résolution des problèmes d'assignation exploite ce résultat. De façon plus générale si $a = (a_1,\ldots,a_m) \in \mathbb{R}^m_+$ et $b = (b_1,\ldots,b_n) \in \mathbb{R}^n_+$ sont des vecteurs tels que $\Sigma\, a_i = \Sigma\, b_j$ et si $T(a,b)$ désigne le polytope de transport associé aux vecteurs a et b (i.e. $T(a,b)$ est constitué de toutes les matrices $T = (t_{ij})$ d'ordre $m \times n$ qui sont telles que $t_{ij} \geq 0$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$;

$$\sum_{j=1}^{n} t_{ij} = a_i, \qquad 1 \leq i \leq m$$

et

$$\sum_{i=1}^{m} t_{ij} = b_j, \qquad 1 \leq j \leq n)$$

il est très bien connu que $E(T(a,b))$ est constitué de toutes les matrices dont le graphe positif associé est sans cycle (c'est aussi là un des résultats essentiels pour l'établissement de tout algorithme de transport).

Si dans le polytope de transport on impose de plus que $n=m$ et $a = b = \lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ on obtient le polytope de transport symétrique $T(\lambda)$ ([15], [16]) et dans ce cas on peut faire une étude plus raffinée de l'ensemble $E(T(\lambda))$. On montre ainsi que

$$\max_{\lambda} \operatorname{card} E\, T(\lambda) \geq \prod_{k=0}^{n} (k^2+1)$$

et que si $\lambda_0 < \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n$ alors

$$\operatorname{card} E\, T(\lambda) = (n!)^2 \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ si } 2\lambda_0 > \lambda_n,$$

$$\operatorname{card} E\, T(\lambda) = (n!)^2 \sum_{k=0}^{j} \frac{1}{(k!)^2 (n-k)!}$$

où j est l'entier tel que $2 \leq j \leq n$, $j\lambda_0 \leq \lambda_n$ et $(j+1)\lambda_0 > \lambda_n$.

Déjà dans le cas $n=2$, si on identifie λ avec les coordonnées barycentriques d'un point d'un triangle du plan, les ensembles de niveau de la fonction card $E\, T(\lambda)$ donnent lieu à une décomposition tout à fait remarquable du triangle et indiquent la complexité du problème [15].

Dans le cas d'un cône, la notion de point extrême ne saurait être de quelque utilité car seul l'origine peut être un point extrême. On y substitue la notion suivante: une demi-droite $\mathbb{R}_+ x = \{\lambda x;\ \lambda \geq 0\}$ issue de 0 et contenue dans un cône C est dite une *génératrice extrémale* de C si $\mathbb{R}^+ x$ est une partie extrémale de C. On peut sans peine établir que $x_0 \in C$ appartient à une génératrice extrémale de C si et seulement si chaque fois qu'un élément y de V est tel que $0 \underset{C}{\leq} y \underset{C}{\leq} x_0$ alors y est linéairement dépendant de x_0.

Une question naturelle survient: c'est de caractériser les génératrices extrémales du cône dual d'un cône C. Une solution très élégante à ce problème est fournie dans [18]. Un autre exemple assez intéressant qui conduit naturellement à la détermination des génératrices extrémales d'un cône est le suivant: étant donné un espace compact séparé S et une fonction continue $\phi: S \to S$ on demande de déterminer les mesures S boréliennes positives sur S qui sont telles que pour chaque fonction réelle continue sur S on ait:

$$\int_S f(\phi(s))d\mu(s) = \int_S f(s)d\mu(s).$$

L'ensemble de ces mesures forme un cône, dit le cône des mesures ϕ - invariantes, non vide (par exemple la masse de Dirac placée à un point fixe de ϕ est un élément du cône) dont on montre qu'une mesure μ appartient à une génératrice extrémale si et seulement si cette mesure est ergodique. Ce résultat classique ([11]) peut être étendu dans un cadre très général ([17]) et comme il est fait dans [17], cette extension permet en particulier de retrouver aisément le fameux lemme de Choquet-Deny [12] concernant les solutions à une équation de convolution.

Pour le reste de cette section nous allons supposer que V est un e.v.t.l.c., que K est un sous-ensemble convexe et compact de V. Si on désigne par $M^+(K)$ l'ensemble des mesures de Borel positives sur K, on dit que $x \in K$ est *représenté par la mesure* $\mu \in M^+(K)$ si pour tout élément f de V', le dual topologique de V, on a:

$$f(x) = \int_K f(y)d\mu(y) = \langle \mu, f \rangle .$$

On dit encore que x est le barycentre de la mesure μ.

Au sujet de ces ensembles les résultats les plus marquants sont:

THEOREME. (Bauer).

$x \in E(K)$ si et seulement si la masse de Dirac placée en x est la seule mesure de probabilité portée par K qui représente x.

THEOREME. (Krein-Milman).

$E(K) \neq \emptyset$ *et les propriétés équivalentes suivantes sont réalisées*

a) $K = \overline{Co}\, E(K)$

b) *tout point x de K est le barycentre d'une mesure de probabilité sur K portée par la fermeture de $E(K)$.*

THEOREME. (Choquet-Meyer).

Si de plus K est métrisable, alors $E(K)$ est une intersection dénombrable d'ouverts et tout point de K est le barycentre d'une mesure de probabilité μ sur K portée par $E(K)$.

De plus cette mesure μ est unique si et seulement si K est un simplexe (c'est-à-dire que K engendre un cône qui induit sur $V \times R$ un ordre qui en fait un espace vectoriel ordonné réticulé).

Comme on peut s'y attendre ces théorèmes peuvent être étendus au cas des cônes (possédant une base compacte) et peuvent être rendus plus précis dans le cas où V est un espace de dimension finie. On retrouve ainsi des résultats attribués à Minkowski et Carathéodory. Nous n'allons pas commenter ces résultats qui se trouvent dans toutes les références fournies au début. D'autre part le théorème de Choquet-Meyer paru en 1960 ([13]), a depuis reçu beaucoup d'attention et on en connaît un bon nombre de généralisations dues principalement à Choquet et Meyer eux-mêmes ainsi qu'à Bishop et De Leeuw. On trouvera ces généralisations et des applications de cette théorie dans le merveilleux petit volume de Phelps [47] ou encore dans un texte un peu plus récent comme celui de Alfsen [1].

Les théorèmes de Krein-Milman ou de Choquet-Meyer sont aujourd'hui utilisés avec beaucoup de succès. En particulier, ils permettent de retrouver de façon très élégante une foule de résultats importants comme:

- *le théorème de Bernstein sur les fonctions complètement monotones sur* $[0,\infty]$ les caractérisant comme les transformées de Laplace des mesures de probabilité sur $\mathbb{R}_+$.
- *le théorème de Bochner sur les fonctions définies positives* sur $\mathbb{R}$ à valeur dans C les caractérisant comme les transformées de Fourier d'une mesure borélienne finie et positive sur $\mathbb{R}$.
- l'existence d'une *mesure de Haar* sur les groupes topologiques abéliens localement compacts.
- *la théorie de Perron-Frobenius* sur les matrices positives.
- la représentation des fonctions harmoniques positives par le *noyau de Poisson*.
- des théorèmes de décomposition spectrale d'opérateurs (voir en particulier [19]).
- mais une des applications les plus frappantes est la preuve due à Lindenstrauss [41] (1966) du théorème de Liapounoff (1940) qui est un des résultats les plus utiles en théorie du contrôle. Dans le but d'illustrer les techniques employées nous allons répéter ici cette preuve.

THEOREME. (Liapounoff).

Soient $\mu_1,\ldots,\mu_n$, *n mesures réelles non-atomiques sur une tribu* M *de sous-ensembles d'un ensemble* X. *Posons* $\mu(E) = (\mu_1(E),\ldots,\mu_n(E)) \in \mathbb{R}^n$ $(E \in M)$.

Alors la portée de μ *est un sous-ensemble compact convexe de* $\mathbb{R}^n$.

Preuve.

Posons $\lambda = |\mu_1| +\ldots+ |\mu_n|$. C'est une mesure sur M telle que chaque mesure μ_i est absolument continue par rapport à λ. Désignons par h_i la dérivée de Radon-Kikodym de μ_i par rapport à λ et définissons

$$\Lambda : L^\infty(\lambda) \to \mathbb{R}^n \text{ comme suit:}$$

$$\Lambda(g) = (\int gh_1 d\lambda,\ldots,\int gh_n d\lambda).$$

L'ensemble $K = \{g \in L^\infty(\lambda);\ 0 \le g \le 1\}$ est, étant inclus dans la boule unité de $L^\infty(\lambda)$, un ensemble $\sigma(L^\infty,L^1)$ - compact et convexe et comme Λ est $\sigma(L^\infty,L^1)$ - continue il suffit de montrer que $\mu(M) = \Lambda(K)$.

Mais si $E \in M$, la fonction caractéristique χ_E de E appartient à K et $\Lambda(\chi_E) = \mu(E)$. Donc $\mu(M) \subseteq \Lambda(K)$.

Inversement si $p \in \Lambda(K)$ on désire montrer qu'il existe $E \in M$ tel que

$$\chi_E \in K_p = \{g \in K;\ \Lambda(g) = p\}.$$

Comme, par le théorème de Krein-Milman, nous sommes assurés que $E(K_p) \neq \emptyset$ il est suffisant de montrer que tout élément g_0 de K_p qui n'est pas une fonction caractéristique, n'est pas un élément extrémal de K_p.

Mais si g_0 n'est pas une fonction caractéristique, il existe $A \in M$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\lambda(A) > 0 \text{ et } \varepsilon \leq g_0 \leq 1-\varepsilon \text{ sur } A.$$

Utilisant le fait que λ est une mesure non-atomique on a que l'espace $\chi_A \cdot L^\infty(\lambda)$ est de dimension $> n$ et donc il est possible de trouver une fonction $\tilde{g} \in \chi_A \cdot L^\infty$ telle que $\tilde{g} \neq 0$, $\Lambda(\tilde{g}) = 0$ et $-\varepsilon < \tilde{g} < \varepsilon$. D'où $g_0 \pm \tilde{g} \in K_p$ et donc $g_0 \notin E(K_p)$. □

Dans le but d'illustrer encore davantage la nature tentaculaire de cette théorie signalons enfin que dans Rudin, Chap. V [50] on utilise le théorème de Krein-Milman pour retrouver le *théorème de Stone-Weierstrass* sur l'approximation uniforme par une sous-algèbre de fonctions des fonctions complexes ou réelles continues sur un espace topologique compact.

Mais probablement la principale raison de la grande importance des théorèmes du type Krein-Milman est contenue dans le théorème suivant. Pour simplicité et pour les illustrations que nous voulons en donner, nous allons nous contenter d'en donner la version en dimension finie.

THEOREME.

Soit K un sous-ensemble compact et convexe de $\mathbb{R}^n$. Soit f une fonction continue et convexe sur K. Posons

$$M = \sup\{f(x);\ x \in K\}.$$

Alors il existe un point extrême x_0 de K tel que $f(x_0) = M$.

Preuve.

Soit $y_0 \in K$ tel que $f(y_0) = M$. Soient $e_1,\ldots,e_k$ des points extrémaux de K et $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ des scalaires non négatifs de somme 1 tels que

$$y_0 = \sum_1^k \lambda_i e_i$$

(en dimension finie même si K est compact, il n'est pas toujours vrai que $E(K)$ est un ensemble fermé, mais il est toujours vrai que $co\ E(K)$ est fermé. C'est l'amélioration, due à Minkowski du théorème de Krein-Milman, à laquelle nous avons fait allusion précédemment). Alors

$$M = f(y_0) \le \sum_i \lambda_i f(e_i) \le M.$$

Ainsi lorsque $\lambda_j > 0$ on a $f(e_j) = M$. □

On devine rapidement que le champ des applications possibles de ce résultat est très vaste. Nous allons nous restreindre à n'en citer qu'une seule que nous avons retenue car elle fait le lien avec d'autres exemples présentés auparavant dans notre exposé.

THEOREME. (Ky Fan [23]).

Si A est une matrice hermitienne semi-définie positive avec valeurs propres $0 \le \lambda_1 \le \ldots \le \lambda_n$, alors pour tout ensemble orthonormal $x_1, \ldots, x_n$ on a:

$$\prod_{j=1}^{k} \langle Ax_j, x_j \rangle \ge \prod_{j=1}^{k} \lambda_j \qquad (1 \le k \le n).$$

Preuve.

Soit $u_1, \ldots, u_n$ un ensemble orthonormal de vecteurs propres de A correspondant aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et soit $x_1, \ldots, x_n$ l'ensemble orthonormal donné. Alors la matrice $S = (|\langle x_i, u_j \rangle|^2)$ est doublement stochastique et $S\lambda = (\langle Ax_i, x_i \rangle)$ (nous avons posé $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^T$).

Comme nous l'avons vu, la fonction

$$g(t_1, \ldots, t_n) = (\prod_1^n t_i)^{1/n}$$

est concave sur $\mathbb{R}_+^n$ et il en est donc de même de la fonction f définie sur Ω_n, l'endes matrices doublement stochastiques d'ordre $n \times m$, par

$$f(D) = g(D\lambda).$$

Le théorème précédent conjugué au théorème de Birkhoff nous assure de l'existence d'une matrice de permutation P telle que

$$f(S) = (\prod_1^n \langle Ax_i, x_i \rangle)^{1/n} \ge f(P) = (\prod_1^n \lambda_i)^{1/n}. \quad \square$$

A étant une matrice réelle non singulière, si on applique le théorème précédent à la matrice AA^{T} en prenant pour $x_1,\ldots,x_n$ la base canonique $e_i = (0,\ldots,1, 0,\ldots,0)$ de $\mathbb{R}^n$ on obtient immédiatement comme corollaire le

THEOREME. (Hadamard).

Si A est une matrice réelle non singulière:

$$(\det A)^2 \leq \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right).$$

Une autre application immédiate du théorème de Ky Fan est le

THEOREME. (Minkowski).

Si A et B sont des matrices hermitiennes d'ordre n semi-définies positives on a

$$\det(A+B)^{1/n} \geq (\det A)^{1/n} + (\det B)^{1/n}$$

et pour $0 \leq \lambda \leq 1$,

$$\det(\lambda A+(1-\lambda)B) \geq (\det A)^{\lambda}(\det B)^{1-\lambda}$$

(on dit alors que la fonction *det* est log-concave sur l'ensemble des matrices hermitiennes semi-définies positives).

§6. ASPECTS COMBINATOIRES ET QUANTITATIFS

Les développements combinatoires les plus poussés sont en rapport avec la "structure faciale" des polyèdres convexes de $\mathbb{R}^n$. C'est là un des aspects fondamentaux de la convexité. Qu'il suffise à cet égard de signaler que la méthode de solution d'un problème de programmation linéaire consiste à choisir un sommet du polytope des solutions réalisables et d'aller au sommet adjacent le plus profitable. Il s'avère donc très utile, voire essentiel, de posséder des résultats qui donnent des bornes supérieures au nombre de telles itérations que le calculateur peut avoir à effectuer. Malheureusement, nous ne pouvons nous permettre de développer les principaux résultats dans cette direction et nous nous contentons de renvoyer le lecteur à un très bon résumé sur le sujet [35].

Une très large part de l'aspect combinatoire est aussi occupée par les propriétés d'intersections des ensembles convexes. Un résultat célèbre dont on trouvera une preuve très élégante due à Radon dans [28] en page 80 est le

THEOREME. (Helly).

Soit $\{C_i\}_{i\in I}$ *une famille de parties convexes de* $\mathbb{R}^n$ *telle que pour toute partie finie J d'au plus* $(n+1)$ *éléments de I on a* $\bigcap_{i\in J} C_i \neq \emptyset$, *alors pour toute partie finie*

K de I on a

$$\bigcap_{i \in K} C_i \neq \emptyset.$$

Ce théorème peut être utilisé pour obtenir le

THEOREME. (Jung).

Tout sous-ensemble du plan dont le diamètre est au plus 1 *peut être recouvert par un disque de rayon* $\sqrt{3}/3$.

Preuve.

Soit S l'ensemble en question. Observons que si chaque sous-ensemble de S constitué de trois points peut être recouvert par un disque de rayon r alors S peut lui-même être recouvert par un disque de rayon r. En effet si on dénote par C_x le disque fermé de centre $x \in S$ et de rayon r, le théorème de Helly nous assure, à cause de notre hypothèse, que la famille $\{C_x\}_{x \in S}$ possède la propriété de l'intersection finie et donc il existe

$$x_0 \in \bigcap_{x \in S} C_x.$$

Il est clair que $S \subseteq C_{x_0}$. On est donc ramené à montrer que si un ensemble de trois points de $\mathbb{R}^2$ est de diamètre 1 alors il peut être recouvert par un disque de rayon $\sqrt{3}/3$; ce qui n'est pas difficile. □

Le théorème de Jung peut être étendu aux sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$. Dans ce cas une boule de rayon

$$\sqrt{\frac{n}{2n+2}}$$

recouvre tout ensemble de diamètre 1.

Dans ce contexte un autre résultat intéressant est le suivant:

THEOREME. (Krasnoselskii, voir [55]).

Soit K un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$ (une galerie d'art de dimension n). *Si pour chaque sous-ensemble* $\{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ constitué de n+1 *points de K on peut trouver* $x \in K$ *tel que chacun de ces* n+1 *points est visible à partir de* x (c'est-à-dire que $[x, y_i] \subseteq K$ pour $0 \leq i \leq n$) *alors K est un ensemble étoilé* (c'est-à-dire qu'il existe $x \in K$ à partir duquel tous les points de K peuvent être vus).

On réfère à ce type de problème comme à un problème d'illumination car on a ici une caractérisation des "édifices" qui sont tels qu'il est possible de placer une seule source lumineuse pouvant éclairer toute la pièce. Dans ce même esprit, beaucoup de problèmes dont la formulation est élémentaire ne sont pas encore résolus. Signalons le suivant: étant donné une table de billard triangulaire, peut-on trouver un point et une direction telle que la balle va décrire un chemin qui est dense dans le triangle? Est-il vrai que de tout point du triangle, il existe une direction qui fournit un tel chemin? (bien entendu le principe ici est que l'angle d'incidence est égal à l'angle de réfraction).

Terminons cette section en signalant deux des résultats de nature quantitative des plus frappants. Un sous-ensemble compact convexe de $\mathbb{R}^n$ dont l'intérieur est non vide est dit un *corps convexe*. Le premier résultat que nous voulons citer est un outil de base en théorie des nombres.

THEOREME. (Minkowski).

Tout corps convexe de $\mathbb{R}^n$ *symétrique par rapport à l'origine et dont le volume est au moins* 2^n *contient un point, autre que* 0, *dont toutes les coordonnées sont entières.*

Enfin, un autre résultat concerne ce qui est connu comme l'étude des volumes mixtes.

THEOREME. (Brunn-Minkowski). *Si* C_1 *et* C_2 *sont deux corps convexes* de $\mathbb{R}^n$ *et si* $0 \leq \lambda \leq 1$ *on a:*

$$\{vol\ [(1-\lambda)C_1+\lambda C_2]\}^{1/n} \geq (1-\lambda)(vol\ C_1)^{1/n} + \lambda(vol\ C_2)^{1/n}$$

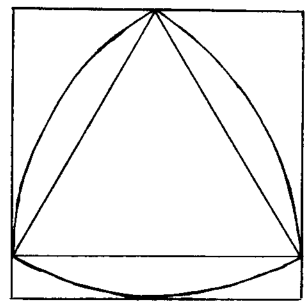
avec égalité pour $\lambda \in]0,1[$ *si et seulement si* C_1 *et* C_2 *sont homothétiques.*

Ce théorème très puissant est un des plus beaux parmi ceux qui peuvent être inclus dans un premier cours de géométrie. Dans [29] on utilise ce résultat pour obtenir une caractérisation des parallélotopes de dimension n. Ces ensembles sont définis de façon récursive comme suit. Les parallélotopes de dimension 1 sont les intervalles fermés bornés de $\mathbb{R}$. Ayant défini les parallélotopes de dimension $(n-1)$, un parallélotope de dimension n est défini comme étant un corps convexe de $\mathbb{R}^n$ qui est l'enveloppe convexe d'un parallélotope de dimension $(n-1)$ et d'un de ses translatés.

§7. CORPS CONVEXES DE LARGEUR CONSTANTE

Je vais compléter cet exposé en donnant certaines propriétés d'une famille remarquable de corps convexes du plan. Ces corps convexes possèdent des propriétés spéciales qui rendent possible leur utilisation dans différents mécanismes que nous allons décrire brièvement.

Un corps convexe du plan est dit de *largeur constante* h si h est la distance entre deux droites d'appui parallèles quelconques. L'exemple le plus simple d'un tel corps est le cercle. Cependant outre le cercle il existe une infinité de corps convexes de largeur constante h. Par exemple, considérons un triangle équilatéral de côté h et joignons chaque couple de ses sommets à l'aide d'un arc de cercle dont le centre est situé au troisième sommet.



Ce corps, appelé le triangle de Reuleaux, est manifestement de largeur constante. Par analogie on peut, en partant de tout polygone régulier possédant un nombre impair de côtés et dont la plus grande diagonale est de longueur h, obtenir un corps convexe de largeur constante h.

Il est clair qu'à l'intérieur d'un carré de côté h on peut faire tourner de 360° tout corps convexe C de largeur constante h de telle sorte que C soit continuellement en contact avec chacun des quatre côtés du carré. Cette propriété caractérise d'ailleurs les convexes de largeur constante et à cause de cette propriété, on utilise des perceuses ayant la forme d'un triangle de Reuleaux pour percer un trou carré, dans une bille de bois par exemple. Comme autre application commerciale signalons la suivante. Afin d'éviter l'apparition d'une image floue, le film dans un projecteur cinématographique ne doit pas avancer de façon continue; c'est-à-dire que le mouvement du film (objectif fermé) doit alterner avec des périodes temporaires d'arrêt du film (objectif ouvert). Le mécanisme qui rend possible ce type de mouvement utilise un triangle de Reuleaux qui effectue des rotations de 360° autour d'un de ses sommets. (Des explications supplémentaires précises peuvent être trouvées dans [56], page 72.)

Citons certains résultats remarquables concernant les corps convexes.

<u>THEOREME</u>. (Barbier)

Tout convexe du plan de largeur constante h à un périmètre égal à πh.

On peut bien sûr parler d'un convexe de $\mathbb{R}^3$ de largeur constante (la définition est évidente) mais alors l'analogue du théorème de Barbier, à savoir que tous les convexes de l'espace de largeur constante ont la même surface, est faux. Ce qui est vrai dans ce cas c'est que la projection d'un convexe de $\mathbb{R}^3$ de largeur constante h sur un plan donne lieu à une figure plane convexe de largeur constante h et donc le théorème de Barbier est valide dans ce plan; on dit alors que les convexes de $\mathbb{R}^3$ de largeur constante sont des figures à périmètre constant.

Concernant l'aire S d'un convexe du plan de largeur constante h on obtient l'estimé remarquable suivant:

$$0.7048\ h^2 \simeq \frac{1}{2}\, h^2(\pi - \sqrt{3}) \leq S \leq \frac{1}{4}\, \pi h^2 \simeq 0.7854\ h^2$$

la borne supérieure étant atteinte par le cercle et la borne inférieure par le triangle de Reuleaux.

De même pour le rayon R du cercle circonscrit à ces convexes et le rayon r du cercle inscrit on a des estimés remarquables:

$$\frac{1}{2}\, h \leq R \leq h\, \frac{\sqrt{3}}{3} \simeq 0.58\ h$$

$$0.42\ h \simeq \frac{h(3 - \sqrt{3}}{3} \leq r \leq \frac{1}{2}\, h$$

et les ensembles extrémaux sont encore le cercle et le triangle de Reuleaux.

Signalons aussi que les convexes de largeur constante possèdent des propriétés extrémales parmi les convexes de largeur h. Ainsi on montre que de tous les convexes de largeur h dans le plan, - les convexes de largeur constante h ont le plus petit périmètre. Concernant l'aire des figures convexes de largeur h on peut établir le résultat suivant: de tous les sous-ensembles convexes du plan qui sont de largeur h, le triangle équilatéral de hauteur h est la figure ayant la plus petite aire. Ce résultat peut être paraphrasé de la façon suivante: $\sqrt{3}/3$ est l'aire minimale d'un sous-ensemble *convexe* du plan qui contient un segment de longueur 1 pouvant être tourné de 360° tout en demeurant inclus dans le sous-ensemble convexe. A la lumière de ce résultat, le théorème suivant dû à *Besikovitch* peut paraître étonnant: étant donné $\varepsilon > 0$, on peut construire un sous-ensemble du plan d'aire au plus ε tel que un segment de longueur 1 peut être tourné de 360° tout en demeurant inclus dans ce sous-ensemble.

Le lecteur pourra trouver dans [56] page 226 une construction de cet ensemble ainsi qu'au chapitre 7 de cet ouvrage la vérification des propriétés que nous avons signalées dans cette section.

Ayant mentionné des propriétés aussi remarquables de convexes du plan et ayant au cours de l'exposé fait allusion à certains problèmes non résolus, il n'y a peut-être pas de meilleure façon de quitter que de vous laisser avec un autre problème qui a une longue histoire mais qui n'est pas encore résolu.

Un segment joignant deux points frontières d'un sous-ensemble du plan est appelé une *corde* et un point de l'ensemble par lequel toutes les cordes qui y passent sont de longueur constante est appelé un *point équicordal.* Question: Existe-t-il (ou non) un corps convexe du plan possédant deux points équicordaux? On pourra trouver l'historique de ce problème ainsi qu'une description de résultats partiels connus à son sujet dans [36].

BIBLIOGRAPHIE

1. ALFSEN, E., *Convex Compact Sets and Boundary Integrals*, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

2. ANSELONE, P. et LEE, J., *Spectral Properties of Integral Operators with non-negative Kernels*, J. Linear Alg. and Appl. 9, (1974), 67-87.

3. BARKER, G., *On matrices having an invariant cone*, Czech. Math. J. 22 (97), 1972, 49-68.

4. BECKENBACH, E.F. et BELLMAN, R., *Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin, 1965.

5. BENSON, R.V., *Euclidian Geometry and Convexity*, McGraw-Hill, New York, 1966.

6. BIRKHOFF, G., *Três observaciones sobre el algebra lineal*, Rev. Univ. Nacl. Tucuman, Ser. A5 (1946), 147-150.

7. BLASCHKE, W., *Kreis und Kugel*, Teubner, Leipzig, 1916 (Réimprimé en 1949 par Chelsea, New York).

8. BONNESEN, T. et FENCHEL, W., *Theorie der konvexen Körper*, Springer, Berlin, 1934 (Réimprimé en 1948 par Chelsea, New York).

9. BURNS, F., FIEDLER, M. et HAYNSWORTH, E., *Polyhedral Cones and Positive Operators*, J. Linear Alg. and Appl., 8, (1974), 547-559.

10. CASSELS, J.W.S., *Measures of the non-convexity of sets and the Shapley-Folkman-Starr theorem*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., (1975), 78, 433-436.

11. CHOQUET, G., *Lectures on Analysis*, Benjamin Inc., New York (1969).

12. CHOQUET, G. et DENY, J., *Sur l'équation de convolution* $\mu = \mu * \sigma$, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A-B 250 (1960), 799-801.

13. CHOQUET, G. et MEYER, P.Q., *Existence et unicité des représentations intégrales dans les ensembles convexes compacts quelconques*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 13 (1963), 139-154.

14. DANTZIG, G.B., *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, 1963.

15. DUBOIS, J., *Polytopes de transport symétriques*, Discrete Math. 4 (1973), 1-27.

16. DUBOIS, J., *Transformations affines agissant sur un simplexe*, Discrete Math. 5 (1973), 61-78.

17. DUBOIS, J., *Génératrices extrémales d'un cône de fonctionnelles linéaires positives invariantes*, Can. J. Math., Vol. XXV, no. 4 (1973), 733-747.

18. DUBUC, S., *Fonctionnelles linéaires positives extrémales*, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A-B 270 (1970), 1502-1504.

19. DUBUC, S., *Algèbres ordonnées et matrices symétriques*, Archiv. der Math., Vol. XXIV (1973), 30-33.

20. EGGLESTON, H.G., *Convexity*, Cambridge University Press, New York, 1958.

21. EGGLESTON, H.G., *Problems in Euclidean Space: Application of Convexity*, Pergamon, New York, 1957.

22. EKELAND, I. et TEMAM, R., *Convex Analysis and Variational Problems,* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1976.

23. KY FAN, *A Minimum Property of the Eigen values of a Hermitian Transformation,* Amer. Math. Monthly, 60 (1953), 48-50.

24. FENCHEL, W., *Convex Cones, Sets and Functions,* Lecture Notes, Princeton University, 1951.

25. FEYNMAN, R.P., LEIGHTON, R.B. et SANDS, M., *The Feynman lectures on physics,* Addison-Wesley, 1963.

26. GALE, D., *The Theory of Linear Economic Models,* McGraw-Hill, New York, 1960.

27. GRÜNBAUM, B., *Convex Polytopes,* Interscience-Wiley, London, 1967.

28. GRÜNBAUM, B. et KLEE, V., *Convexity and Applications* (L. Durst, ed.), Proc. CUPM Geometry Conference, Santa Barbara, 1967, MAA Committee on the Undergraduate Program in Mathematics, Berkeley, 1967.

29. GUGGENHEIMER, H. et LUTWAK, E., *A Characterization of the n-dimensional Parallelotope,* Amer. Math. Monthly, 83 (1976), 475-478.

30. HADLEY, G., *Linear Programming,* Addison-Wesley, 1962.

31. HADWIGER, H., DEBRUNNER, H. et KLEE, V., *Combinatorial Geometry in the Plane,* Holt, Rinehart and Winston, New York, 1964.

32. KARLIN, S., *Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics,* Vols. 1-2, McGraw-Hill, New York, 1966.

33. KARLIN, S., *Positive Operators,* J. Math. Mech., 8 (1959), 907-937.

34. KLEE, V., *What is a Convex Set?,* Amer. Math. Monthly, 78 (1971), 616-631.

35. KLEE, V., *Convex Polyhedra and Mathematical Programming,* Proc. of the International Congress of Math., Vancouver (1974), Vol. 1, 485-490.

36. KLEE, V., *Can a plane convex body have two equicordal points?,* Amer. Math. Monthly, 76 (1969), 54-55.

37. KREIN, M.G. et RUTMAN, M.A., *Linear Operators Leaving Invariant a Cone in a Banach Space,* Uspehi Mat. Nauk. 23 (1948), 3-95; Amer. Math. Soc. Transl. 26 (1950).

38. KREWERAS, G., *Représentation polyédrique des préordres complets finis et application à l'agrégation des préférences,* Colloques internationaux du Centre National de la recherche scientifique, No. 171, Aix-en-Provence, juillet 1967.

39. LAURENT, P.-J., *Approximation et optimisation,* Enseignement des Sciences, No. 13, Hermann, Paris, 1972.

40. LETAC, G., *A unified treatment of some theorems on positive matrices,* Proc. Amer. Math. Soc. 43 (1974), 11-17.

41. LINDENSTRAUSS, J., *A short proof of Liapounoff's Convexity Theorem,* J. Math. Mech., 15 (1966), 971-972.

42. LUENBERGER, D.G., *Introduction to linear and non linear programming,* Addison-Wesley, 1973.

43. LYUSTERNIK, L.A., *Convex Figures and Polyhedra,* Dover, New York, 1963 (Traduit de l'édition russe de 1956).

44. MINKOWSKI, H., *Gesammelte Abhandlungen,* Teubner, Berlin, 1911.

45. MOREAU, J.J., *Fonctionnelles Convexes*, Lecture Notes, Séminaire Equations aux Dérivées Partielles, Collège de France, 1966-67.

46. PERESSINI, A.L., *Ordered topological vector spaces*, Harper and Row, New York, 1967.

47. PHELPS, R.R., *Lectures on Choquet's Theorem*, Van Nostrand, Princeton, N.J., 1966.

48. RHEINBOLDT, W. et VANDERGRAFT, J.S., *A simple approach to the Perron-Frobenius theory for positive operators on general partially-ordered finite-dimensional linear spaces*, Math. Comp., 27 (1973), 139-145.

49. ROCKAFELLAR, R.T., *Convex Analysis*, Princeton University Press, 1970.

50. RUDIN, W., *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1973.

51. RUDIN, W., *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1966.

52. SCHAEFER, H., *Some spectral properties of positive linear operators*, Pacific J. Math., 10 (1960), 1009-1019.

53. SIMONNARD, M., *Programmation linéaire*, Vol. 1: fondements, Dunod 1972; Vol. 2: extensions, Dunod, 1973.

54. STOER, J. et WITZGALL, C., *Convexity and Optimization in Finite Dimensions I*, Springer, Berlin, 1970.

55. VALENTINE, F.A., *Convex Sets*, McGraw-Hill, New York, 1964.

56. YAGLOM, I.M. et BOLTYANSKII, V.G., *Convex Figures*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1961.

Université de Sherbrooke
Sherbrooke, Canada